

Curvatura Gaussiana para Professores de Física

(VERSÃO PRELIMINAR)

A C Tort*

Instituto de Física

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Caixa Postal 68.528; CEP 21941-972 Rio de Janeiro, Brazil

15 de Março de 2014

*e-mail: tort@ufrj.br.

Geodésicas, curvatura e métrica

Nesta nota de aula, estudaremos alguns aspectos da geometria das superfícies bidimensionais (e tridimensionais!) com curvatura, alguns exemplos das quais são mostradas na Figura 1. Ficaremos restritos às superfícies suaves, i.e.. superfícies sem cantos ou arestas, como por exemplo a superfície dos poliedros. A idéia é ganhar familiaridade com algumas idéias e conceitos da geometria diferencial que se mostrarão importantes quando você, leitor, fizer a transição da gravitação newtoniana para a gravitação relativística.

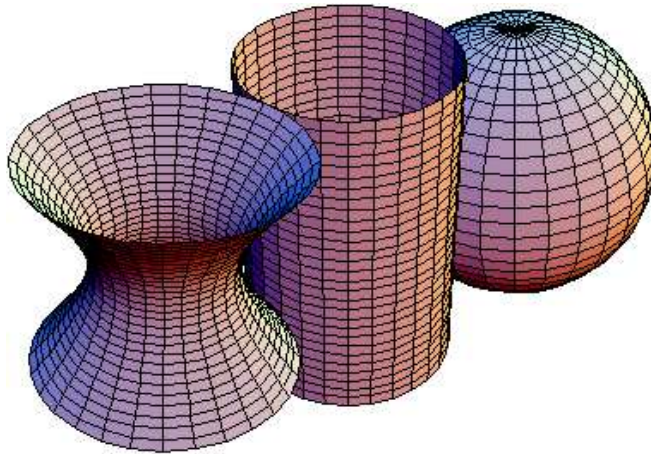


Figura 1: Superfícies hiperbólica, cilíndrica e esférica. A curvatura da superfície cilíndrica é nula. A superfície hiperbólica tem curvatura negativa e a esférica positiva.

Superfícies bidimensionais

Uma boa parte da geometria que aprendemos na escola secundária diz respeito à geometria do plano euclidiano. O que queremos dizer quando afirmamos que a tampa de uma mesa de jantar ou de uma mesa de bilhar pode ser modelada por uma porção finita de um plano euclidiano? Ora, queremos dizer simplesmente que sobre a tampa da mesa vale o teorema de Pitágoras, ou que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180° . Esses teoremas, e todos os que decorrem dos postulados da geometria de Euclides, podem ser aplicados aos problemas práticos do mapeamento ou da agrimensura, desde que as medições envolvidas sejam tais que a curvatura da Terra possa ser desprezada. Mas, e se a curvatura da Terra não puder ser desprezada? A Figura 2 mostra-nos o que acontece com a soma dos ângulos internos de um triângulo se o desenharmos sobre a superfície de uma esfera ou de uma superfície em forma de sela. Evidentemente, a **curvatura** da esfera e da sela têm um papel importante na geometria destas superfícies.

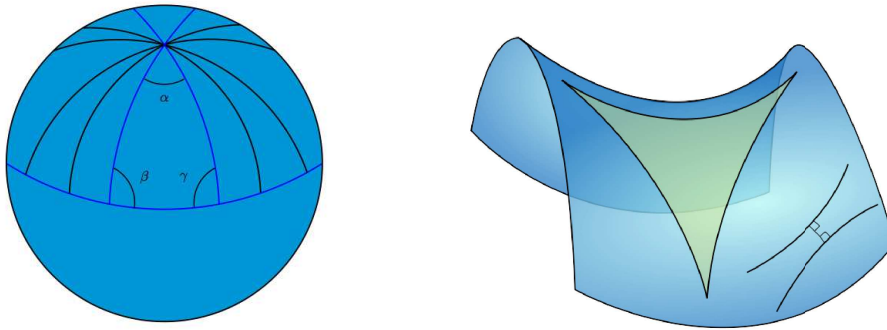


Figura 2: Sobre a superfície de uma esfera, a soma dos ângulos internos de um triângulo, $\alpha + \beta + \gamma$, é maior do que 180° . Sobre uma superfície em forma de sela, a soma dos ângulos internos é menor do que 180° .

Outro conceito importante que nos ajudará a entender a geometria das superfícies curvas é o de **geodésica** ou **curva geodésica**. Dados dois pontos sobre o plano, o caminho mais curto entre eles, sabemos todos, é o segmento de reta que os une. Dados dois pontos sobre a esfera qual o caminho mais curto entre eles? E sobre a superfície em forma de sela da Figura 2? No caso da esfera, será o menor dos arcos do grande círculo que que passa pelos dois pontos, no caso da sela, a curva geodésica é um pouco mais complexa. De qualquer modo, para os nossos propósitos aqui, convém pensar da seguinte forma: dada uma superfície arbitrária, suave, e dois pontos sobre essa superfície, uma geodésica é uma curva que contém o arco mais curto que une esses pontos. Há é claro, definições mais rigorosas de curva geodésica, mas por enquanto é suficiente ter uma idéia do conceito.

Geodésicas

Para introduzir a idéia de curvatura de um modo mais preciso estudemos a circunferência C de um círculo de raio ℓ . O primeiro passo para construção de um círculo de raio ℓ sobre uma *superfície arbitrária* com centro em um ponto O , é traçar algumas curvas geodésicas representativas que partem do ponto O . A seguir marcamos sobre cada uma das geodésicas, o ponto cuja distância ao ponto O é ℓ . O lugar geométrico de todos esses pontos, por definição, é o círculo que queremos. Apliquemos a construção acima à uma esfera de raio R , veja a Figura 3. A circunferência C vale:

Curvatura

$$C = 2\pi r = 2\pi R \sin \alpha, \tag{1}$$

mas, por definição:

$$\alpha = \frac{\ell}{R}, \tag{2}$$

logo

$$C = 2\pi R \sin\left(\frac{\ell}{R}\right). \quad (3)$$

Vamos supor que $\ell \ll R$. Então podemos fazer uso da expansão de Taylor do seno e escrever:

$$\sin\left(\frac{\ell}{R}\right) \approx \frac{\ell}{R} - \frac{1}{3!} \frac{\ell^3}{R^3}, \quad (4)$$

segue então que a circunferência se escreve:

$$C \approx 2\pi\ell \left(1 - \frac{1}{6} \frac{\ell^2}{R^2}\right) = 2\pi r \left(1 - \frac{1}{6} \ell^2 K\right), \quad (5)$$

onde

$$K := \frac{1}{R^2}, \quad (6)$$

é a **curvatura** da esfera. A Eq. (5) pode ser reescrita na forma:

$$K = \frac{3}{\pi} \lim_{\ell \rightarrow 0} \left(\frac{2\pi\ell - C}{\ell^3} \right), \quad (7)$$

que é uma forma mais útil para a identificação do tipo de curvatura que estamos com a qual estamos lidando, pois nessa forma, podemos estudar a curvatura local de superfícies arbitrárias, como por exemplo, uma superfície em forma de sela de cavalo, ou hiperbólica. **Em outras palavras, podemos considerar a Eq. (7) como a definição de curvatura local para uma superfície bidimensional.** Se $C < 2\pi\ell$, então a curvatura local é positiva; se $C = 2\pi\ell$, a curvatura local é nula. Finalmente, se $C > 2\pi\ell$, então a curvatura é negativa.

Exercício 1 A partir da definição de curvatura local de uma superfície bidimensional, calcule a curvatura local de uma esfera de raio R . **Sugestão:** refaça o caminho inverso ao que nos levou à Eq. (7). ■

Para finalizar o exemplo da superfície esférica, façamos um breve cálculo que será útil para entender as situações mais complexas que nos aguardam. Dado uma geodésica sobre a esfera, considere como anteriormente a circunferência geodésica de raio ℓ , medido a partir do ponto O . Suponha que você queira calcular uma variação $d\ell$ em função de r , veja a Figura 3. Note que $r \geq 0$ é um raio extrínscio à superfície esférica ao contrário do raio geodésico ℓ e de C que em princípio podem ser medidos com uma trena sem que tenhamos que abandonar a superfície.

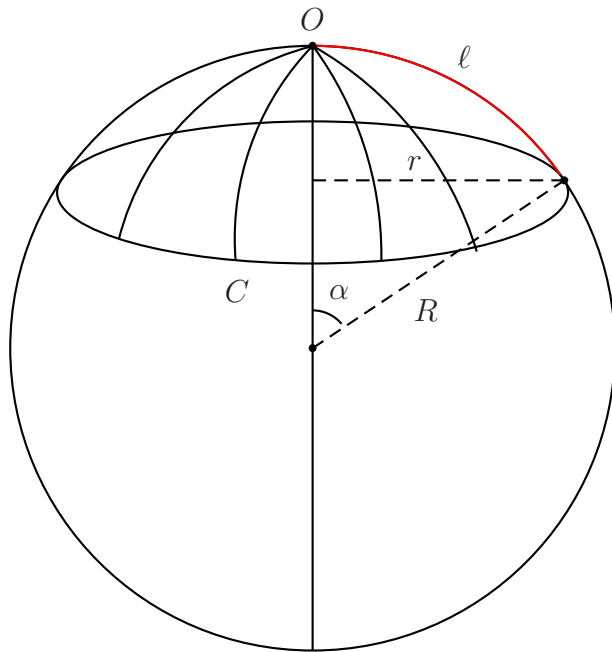


Figura 3: Círculo geodésico de raio ℓ (em vermelho) sobre uma esfera de raio R .

Estas duas últimas quantidades são chamadas grandezas intrínsecas à superfície esférica. A curvatura gaussiana local, dada pela Eq. (7), pode ser determinada sem que precisemos visualizar a esfera imersa em um espaço de dimensão superior¹. Voltemos ao cálculo. Examinando a geometria da Figura 4, não é muito difícil mostrar que:

$$d\ell = \frac{dr}{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{1/2}}, \quad 0 \leq r \leq R. \quad (8)$$

A Eq. (8) nos dá a separação entre duas circunferências infinitesimalmente próximas. No limite em que $r/R \ll 1$, a Eq. (8) nos diz que $d\ell \rightarrow dr$. Uma separação finita ℓ pode ser calculada integrando a equação acima:

¹Medidas intrínsecas são cruciais para nós humanos que percebemos um mundo tridimensional!

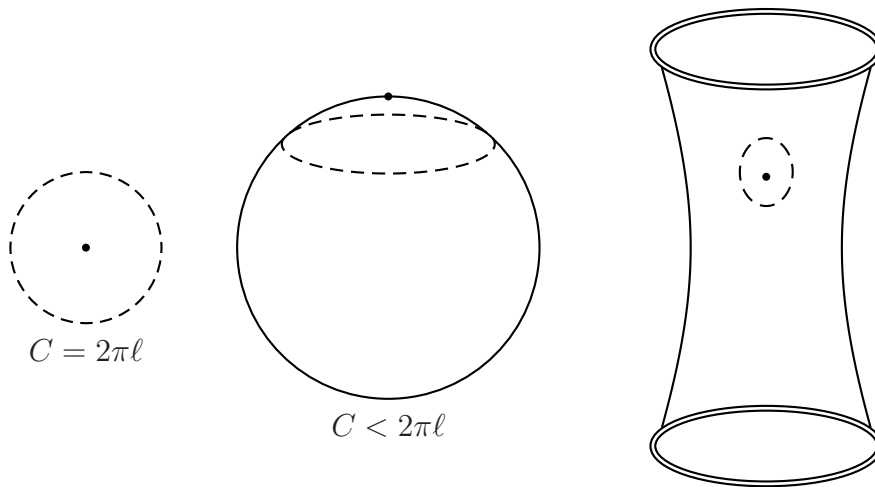


Figura 4: Ilustrando a definição geométrica de curvatura de Gauss.

$$\ell(r) = \int_0^r \frac{dr'}{\left(1 - \frac{r'^2}{R^2}\right)^{1/2}} = R \operatorname{arcsen} \left(\frac{r}{R} \right). \quad (9)$$

Invertendo esta última equação:

$$r = R \operatorname{sen} \left(\frac{\ell}{R} \right). \quad (10)$$

Portanto, em função do raio geodésico ℓ (ou raio próprio), a circunferência C se escreve:

$$C = 2\pi R \operatorname{sen} \left(\frac{\ell}{R} \right). \quad (11)$$

Exercício 2 Obtenha as Eqs, (8), (9) e (11) . Calcule C para ℓ igual a um múltiplo inteiro de $2\pi R$. Interprete geometricamente o resultado. ■

A abordagem à curvatura que desenvolvemos até aqui é chamada *geométrica*. Esta abordagem fundamenta-se na definição de Gauss, Eq. (7). Entretanto, dependendo da superfície

bidimensional que estamos estudando a definição de Gauss pode ser de difícil aplicação prática. Há, felizmente, outra abordagem à curvatura das superfícies bidimensionais que baseia-se no estudo da distância entre dois pontos da superfície curva infinitesimalmente próximos. Essa distância pode ser estudada por meio de um objeto matemático chamado: **métrica**. Essa abordagem foi desenvolvida por Gauss por volta de 1827 e chama-se *geometria diferencial*. Para entendê-la (apenas o suficiente aos nossos propósitos!) precisamos fazer primeiro uma breve digressão sobre sistemas de coordenadas curvilíneas, em particular, as coordenadas curvilíneas ortogonais. Começemos com as coordenadas cartesianas x e y que nos são tão familiares e que podem ser consideradas como um caso particularíssimo de coordenadas curvilíneas. Por conveniência futura escreveremos: $x = x^1$, e $y = x^2$. A distância entre dois pontos fixos do plano infinitesimalmente próximos um do outro em cartesianas é dada por (Pitágoras!):

$$(ds^2) = (dx)^2 + (dy)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2, \quad (12)$$

onde $g_{11} = 1$ e $g_{22} = 1$, são componentes de um objeto com dois índices inferiores cristianizado como **tensor métrico** ou **métrica**. Tensores métricos podem ser representados por matrizes. No caso:

$$[[g]] = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

**Coordenadas
ortogonais;
tensor
métrico**

A relação entre as coordenadas cartesianas e as plano-polares é:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad (14)$$

ou, fazendo $x^1 = x$, $x^2 = y$, $\bar{x}^1 = r$, e $\bar{x}^2 = \theta$,

$$x^1 = \bar{x}^1 \cos \bar{x}^2, \quad x^2 = \bar{x}^1 \sin \bar{x}^2. \quad (15)$$

A transformação inversa se escreve:

$$\bar{x}^1 = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} \quad \text{ou,} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad (16)$$

e:

$$\tan \bar{x}^2 = \frac{x^2}{x^1} \quad \text{ou,} \quad \tan \theta = \frac{y}{x}. \quad (17)$$

Para calcular a distância entre dois pontos infinitesimalmente próximos em coordenadas plano-polares escrevemos:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta, \quad (18)$$

e:

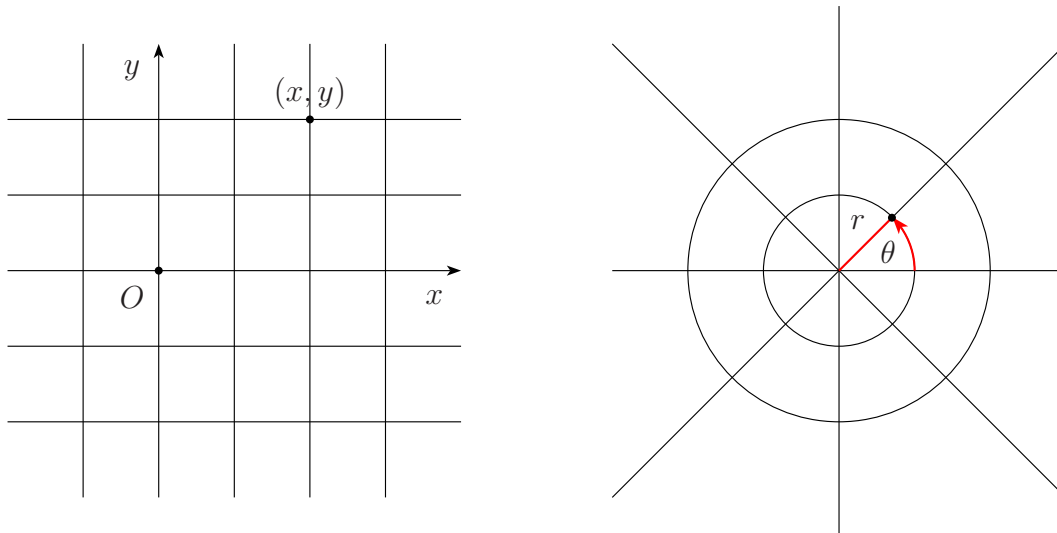


Figura 5: Coordenadas cartesianas e plano-polares.

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta \quad (19)$$

Segue que:

$$(dx)^2 + (dy)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2, \quad (20)$$

ou:

$$(dx^1)^2 + (dx^2)^2 = (d\bar{x}^1)^2 + (\bar{x}^1)^2 (d\bar{x}^2)^2, \quad (21)$$

É fácil escrever o tensor métrico associado com as coordenadas plano-polares:

$$[[g]] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\bar{x}^1)^2 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

As coordenadas plano-polares são o exemplo mais simples de sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonais. Se você examinar a Figura 5 constatará facilmente que as curvas $r = \text{constante}$, *i.e.*: os círculos, interceptam perpendicularmente as curvas $\theta = \text{constante}$, *i.e.*: as retas, eis a razão do adjetivo *ortogonais*. Há muitos outros sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonais, em duas e três dimensões espaciais. A escolha de um sistema em particular envolve, em geral, considerações de simetria.

O objeto mais importante no estudo analítico das superfícies bidimensionais imersas no espaço euclidiano tridimensional, como por exemplo as superfícies representadas na Figura 1, é sua métrica g_{ij} . Eis alguns resultados gerais sobre a métrica (sem demonstração!), tenha em mente que x^1 e x^2 representam coordenadas curvilíneas arbitrárias:

- (i) De modo geral, a distância entre os dois pontos sobre uma superfície curva ao quadrado se escreve:

$$(ds^2) = g_{11} (dx^1)^2 + g_{12} (dx^1)(dx^2) + g_{21} (dx^2) (dx^1) + g_{22} (dx^2)^2.$$

onde $g_{ij}(x^1, x^2)$, o tensor métrico, pode ser uma função do ponto sobre a superfície cujo endereço é dado pelas coordenadas x^1 e x^2 ;

- (ii) o tensor métrico é simétrico, isto é: $g_{ij} = g_{ji}$, logo, podemos escrever:

$$(ds)^2 = g_{11} (dx^1)^2 + 2g_{12} (dx^1)(dx^2) + g_{22} (dx^2)^2;$$

Esta expressão quadrática é conhecida em geometria diferencial como **primeira forma fundamental**;

- (iii) a primeira forma fundamental tem a importante propriedade:

$$(ds)^2 \geq 0;$$

- (iv) qualquer métrica pode ser posta na forma diagonal na qual as componentes $g_{12} = g_{21}$ são nulas. Este tipo de métrica é chamada de *métrica ortogonal* pois as curvas que formam o ‘reticulado’ sobre a superfície interceptam-se em ângulos retos. Quando isto acontece, as coordenadas x^1, x^2 sobre a superfície são ditas ortogonais. Os sistemas de coordenadas mais populares: plano-polares, cilíndricas e esféricas são ortogonais. Quase todas as métricas que discutiremos aqui serão ortogonais. O exercício a seguir é uma das poucas exceções.

Exercício 3 Considere a superfície definida pela equação:

$$x^3 - \text{sen}(x^1 x^2) = 0. \quad x^1, x^2 \in (-\infty, +\infty).$$

(i) Mostre que:

$$(ds)^2 = [1 + (x^2)^2 \cos^2(x^1 x^2)] (dx^1)^2 + 2 x^1 x^2 \cos^2(x^1 x^2) dx^1 dx^2 + [1 + (x^1)^2 \cos^2(x^1 x^2)] (dx^2)^2.$$

(ii) Calcule as componentes do tensor métrico correspondente. As coordenadas x^1, x^2 , são ortogonais?

(iii) Faça um gráfico tridimensional desta superfície com o seu *software* favorito [MAPLE, Mathematica, ou Maxima (gratuito!!!)].

■

O fato de utilizarmos coordenadas plano-polares para localizar um ponto no plano não significa que este tenha curvatura. Da mesma forma, em três dimensões, usar coordenadas esféricas para localizar um ponto do espaço também não significa que este seja curvo. Dada uma métrica, como saber se não existe um truque, uma transformação mágica, que mostre que a superfície é na verdade intrinsecamente plana, em outras palavras: como saber se uma superfície é realmente curva do ponto de vista de um bípede implume bidimensional? A resposta foi dada pelo grande Gauss por meio do *Teorema Egregium*. A fórmula de Gauss nos dá a curvatura local intrínseca da superfície em termos das componentes da métrica e de suas derivadas de primeira e segunda ordem. Em coordenadas ortogonais ($g_{12}(x^1, x^2) = g_{21}(x^1, x^2) = 0$), o teorema, resumido na equação que se segue, envolve apenas as componentes $g_{11}(x^1, x^2)$ e $g_{22}(x^1, x^2)$. Ei-lo:

Teorema Egregium

$$K = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial x^2} \right) \right\}, \quad (23)$$

ou, desenvolvendo as derivadas:

$$K = \frac{1}{2g_{11}g_{22}} \left\{ -\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial (x^2)^2} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial (x^1)^2} + \frac{1}{2g_{11}} \left[\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2g_{22}} \left[\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right)^2 \right] \right\}. \quad (24)$$

Tenha em mente que aqui, x^1 e x^2 são coordenadas curvilíneas ortogonais arbitrárias. Se, por exemplo, aplicarmos o teorema ao caso do plano descrito pelas coordenadas plano-polares obteremos $K = 0$, como deveríamos esperar.



Figura 6: Karl Friedrich Gauss (1777–1858) em 1828. A obra de Gauss é vastíssima e abrange muitos ramos da matemática. Boa parte dessa obra foi recuperada e publicada postumamente. Em vida, Gauss publicou relativamente pouco, *pauca sed matura* era seu lema. A contribuição de Gauss à teoria das superfícies está em dois trabalhos de 1825 e 1826. (Ilustração Wikipédia)

Quando as coordenadas que descrevem a superfície não são ortogonais, o *Teorema Egregium* assume uma forma mais complexa.

Exercício 4 Use o *Teorema Egregium* e calcule a curvatura de uma esfera de raio R . Você já sabe a resposta: $1/R^2$. ■

Exemplo 1 Eis um exemplo de uma superfície cuja curvatura varia de ponto para ponto. Considere a superfície bidimensional definida por:

$$z - e^{-(x^2+y^2)} = 0, \quad x, y \in (-\infty, +\infty),$$

que também pode ser escrita na forma:

$$z - e^{-r^2} = 0, \quad r \in [0, \infty),$$

onde $r^2 = x^2 + y^2$. Obviamente estamos usando coordenadas cilíndricas e a notação usual. Observe também que r desempenha aqui o mesmo papel que desempenhou no caso da esfera. Esta variável não diretamente é acessível aos bípedes implumes bidimensionais que habitam a superfície dada. Para medir r temos que medir uma circunferência C tal que $r = C/(2\pi)$.

A distância ao quadrado entre dois pontos sobre essa superfície infinitesimalmente próximos obedece à relação:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + (dz)^2.$$

Como:

$$dz = -2e^{-2r} dr,$$

segue que:

$$(ds)^2 = (1 + 4r^2 e^{-2r^2}) (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2.$$

Fazendo as identificações: $x^1 = r$ e $x^2 = \theta$, vemos que o tensor métrico correspondente se escreve:

$$[[g]] = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4r^2 e^{-2r^2} & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Observe que quando $r \rightarrow \infty$, temos $(ds)^2 \rightarrow (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2$, que corresponde a uma métrica plana. Como a métrica não depende do ângulo θ , o *Teorema Egregium* assume a forma particular:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial x^1} \right) = -\frac{1}{\sqrt{(1 + 4r^2 e^{-2r^2}) r^2}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 4r^2 e^{-2r^2}}} \frac{\partial \sqrt{r^2}}{\partial r} \right).$$

Efetuando as derivadas e simplificando obtemos:

$$K = -\frac{4e^{-2r^2}(-1 + 2r^2)}{(1 + 4r^2 e^{-2r^2})^2}.$$

O gráfico da Figura 7 mostra o comportamento da curvatura em função de r . Se a partir do ponto $(x = 0, y = 0, z = 1/e)$ construirmos com as geodésicas dessa superfície círculos geodésicos de raio ℓ e circunferência $2\pi\ell$, como no caso da esfera, a distância entre duas circunferências geodésicas infinitesimalmente próximas será dada por:

$$d\ell = \left(1 + 4r^2 e^{-2r^2}\right)^{1/2} dr,$$

onde, não custa insistir, r é definido por $r = C/(2\pi)$, com C medido sobre a superfície com uma trena, (lembre-se: você é um bípede implume bidimensional!).

■

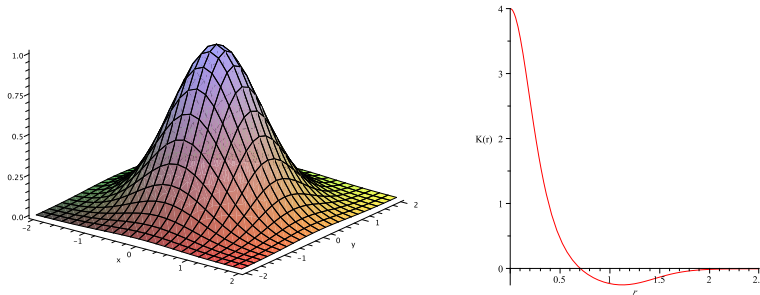


Figura 7: A superfície $z - e^{-(x^2+y^2)} = z - e^{-r^2} = 0$, e sua curvatura gaussiana. Observe que a curvatura muda de sinal e que para $r \rightarrow \infty$, $K \rightarrow 0$, e a superfície torna-se plana.

A curvatura gaussiana é uma propriedade intrínseca das superfícies. Ela não depende de uma escolha particular de sistemas de coordenadas, isto é: ela é invariante frente a uma troca coordenadas. Por exemplo, em coordenadas esféricas, a distância entre dois pontos sobre a esfera infinitesimalmente próximos ao quadrado é dada por:

$$(ds)^2 = R^2 (d\theta)^2 + R^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2, \quad (25)$$

onde R é o raio da esfera, θ é o ângulo polar e ϕ é o ângulo azimutal. Se no lugar dos ângulos θ e ϕ , utilizarmos a coordenada r definida por $r = C/(2\pi)$, veja a Figura 3 e a Figura 4, a mesma quantidade será dada por:

$$(ds)^2 = (dl)^2 + r^2 (d\phi)^2 = \frac{(dr)^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} + r^2 (d\phi)^2, \quad (26)$$

onde dl é dado pela Eq. (8). Quaisquer que sejam as coordenadas, desde que localizem corretamente um ponto da superfície da esfera, o *Teorema Egregium* nos dirá que a curvatura gaussiana da esfera vale $1/R^2$!

Exercício 5 Calcule a curvatura gaussiana da esfera com as duas métricas dadas acima. Faça o cálculo com um *software* que permita economizar tempo, como por exemplo o MAPLE, Mathematica, ou Maxima. ■

Outro modo de perceber a curvatura de uma superfície bidimensional é estudar como duas geodésicas próximas afastam-se ou aproximam-se uma da outra. Isto nos leva à idéia do **desvio**

geodésica. Consideremos, *ad arguendum*, dois arcos de grande círculo de comprimento ℓ , isto é duas geodésicas, sobre a superfície de uma esfera de raio R que partem de um ponto comum, veja a Figura 8. Da figura, vemos que o comprimento de arco ξ subtendido pelo ângulo $d\phi$ se escreve: **desvio geodésico**

$$\xi = r d\phi = R \operatorname{sen} \theta = R \operatorname{sen} \left(\frac{\ell}{R} \right). \quad (27)$$

Derivando em relação a ℓ duas vezes obtemos:

$$\frac{d^2 \xi}{d\ell^2} = -\frac{d\phi}{R} \operatorname{sen} \left(\frac{\ell}{R} \right). \quad (28)$$

Multiplicando e dividindo por R e lembrando que a curvatura gaussiana da esfera é $1/R^2$:

$$\frac{d^2 \xi}{d\ell^2} = -K \xi, \quad (29)$$

que é a equação da separação ou desvio geodésico.

Embora deduzida para a esfera, a Eq. (29) pode ser aplicada às superfícies bidimensionais de modo geral. A solução dessa equação será uma função de ℓ e terá a curvatura gaussiana K como parâmetro. Sendo assim, em princípio, podemos medir ℓ e ξ sobre a superfície, comparar os resultados com os previstos pela solução e com isso determinar K . Observe que K pode ser um parâmetro positivo, negativa, ou nulo. Veja o exemplo e faça o exercício que vem a seguir.

Exemplo 2 Considere $K > 0$. A solução geral da equação do desvio geodésico se escreve:

$$\xi(\ell) = \xi_0 \cos \left(\sqrt{K} \ell + \alpha \right),$$

onde ξ_0 e α são constantes que devem ser determinadas com as condições de contorno do problema. Por exemplo, se supusermos que as geodésicas partem de um ponto comum, como na Figura 8, então uma solução (falta determinar ξ_0 !) será:

$$\xi(\ell) = \xi_0 \sin \left(\sqrt{K} \ell \right).$$

Tente interpretar geometricamente esta solução. A curvatura é dada por:

$$K = \frac{1}{\ell^2} \operatorname{arcsen}^2 \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right).$$

Considere duas geodésicas que partem do pólo norte da Terra. Acompanhe essas geodésicas até que interceptem a linha do Equador quando então a separação entre elas vale ξ_0 . Sobre a linha do Equador, $\xi = \xi_0$ e $\ell = (\pi/2)R$. Segue então que:

$$K = \frac{1}{R_{\text{Terra}}^2} \approx \frac{1}{(6 \times 10^6 \text{ m})^2} = 1 \times 10^{-12} / \text{m}^2.$$

Como a curvatura da Terra se compara com a curvatura de uma bola de futebol? ■

Exercício 6 Resolva a equação do desvio geodésico para $K = 0$ e $K < 0$. Interprete geometricamente as soluções. ■

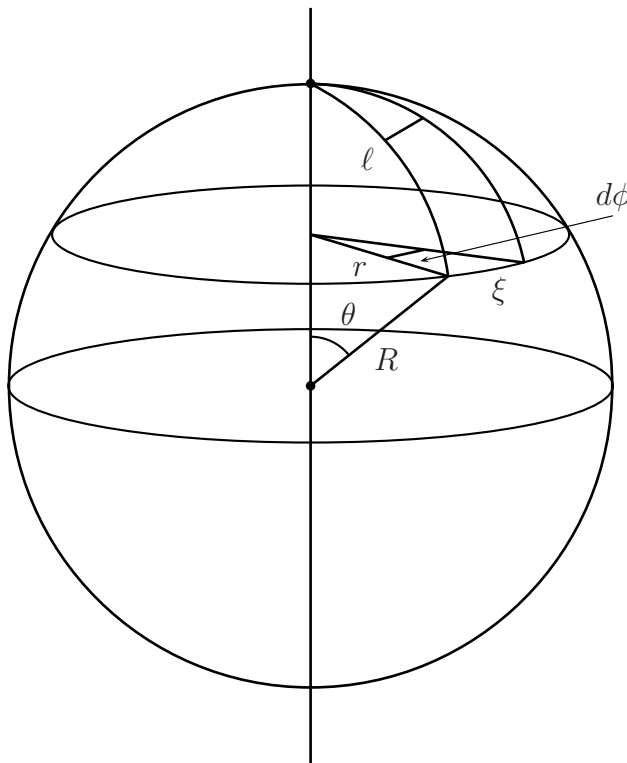


Figura 8: Desvio geodésico sobre uma esfera de raio R .

Referências

- [1] W. Rindler *Essential Relativity: Special, General, Cosmological* 2nd ed. 2006 (OUP, Oxford)
- [2] E. Kreyzig *Differential Geometry* 1991 (Dover: Mineola)
- [3] MAPLE 12 tensor package.