



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO**  
Instituto de Física  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física  
Mestrado Profissional em Ensino de Física

**Uma introdução à Relatividade Restrita e Geral  
para professores do ensino médio.**

**Parte II: Gravitação e Geometria**

Alexandre C. Tort

Rio de Janeiro  
2011

# Uma Introdução à Relatividade Restrita e Geral para Professores do Ensino Médio Parte II: Gravitação e Geometria

(VERSÃO PRELIMINAR)

A C Tort\*  
Instituto de Física  
Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Caixa Postal 68.528; CEP 21941-972 Rio de Janeiro, Brazil

12 de Janeiro de 2011

---

\*e-mail: tort@ufrj.br.

## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Gravitação newtoniana e gravitação relativística</b>	<b>3</b>
1.1	O princípio de equivalência de Newton . . . . .	5
1.2	O princípio de equivalência de Einstein . . . . .	6
1.3	A duração temporal em campos gravitacionais . . . . .	8
1.4	O princípio de mínima ação e a gravitação newtoniana no espaçotempo . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Geodésicas, curvatura e métrica</b>	<b>14</b>
2.1	Superfícies bidimensionais . . . . .	15
2.2	Curvatura em dimensões superiores . . . . .	27
2.3	A superfície esférica tridimensional $S^3$ . . . . .	30
2.4	Espaços de Riemann . . . . .	34

# 1 Gravitação newtoniana e gravitação relativística

Das quatro interações fundamentais, a saber: a forte, a fraca, a eletromagnética e a gravitacional, sem dúvida as duas últimas são as que nos são mais familiares, e destas duas, a interação gravitacional nos é mais familiar ainda. A interação gravitacional é descrita pela lei da gravitação universal, proposta por Isaac Newton em 1687 nos *Principia*. De acordo com a lei da gravitação universal, em notação moderna, a intensidade entre duas corpos puntiformes de massas  $m_1$  e  $m_2$ , que no instante  $t$  estão separados por uma distância igual a  $\|\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)\|$ , onde  $\vec{r}_1(t)$  e  $\vec{r}_2(t)$ , são vetores de posição das massas em relação a um referencial inercial, é dada por:

$$\|\vec{F}\| = G \frac{m_1 m_2}{\|\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)\|^2},$$

onde  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$ , é a constante de gravitação universal. A lei da gravitação universal combinada com as três leis do movimento de Newton permite-nos analisar e entender como o sistema solar e muitos outros sistemas similares que interagem gravitacionalmente funcionam.

A introdução em 1905 da relatividade restrita ou especial resolve problemas teóricos suscitados pela teoria eletromagnética de Maxwell, por exemplo, a invariância das equações de Maxwell, mas ao mesmo tempo cria outros. Entre esses, a necessidade de uma nova teoria da gravitação compatível com a relatividade restrita. Por exemplo, na expressão acima, os vetores de posição das duas massas devem ser medidos ao mesmo tempo. Mas a teoria da relatividade restrita nos ensina que simultaneidade é um conceito relativo, e não absoluto. A gravitação newtoniana é uma teoria de ação a distância. Aqui temos outro obstáculo, pois a relatividade restrita estabelece um limite para a velocidade com a qual a informação pode ser transmitida. Até a época em que Albert Einstein (1879-1955) começa a enfrentar este problema não havia uma discrepância experimental marcante entre a gravitação newtoniana e os dados experimentais. Ou seja, a teoria da relatividade geral ou gravitação relativística nasce de uma incompatibilidade teórica fundamental entre a gravitação newtoniana e a teoria da relatividade restrita. A busca de uma teoria relativística da gravitação leva a uma ruptura radical com a gravitação newtoniana. A lei da gravitação universal será no final substituída por uma geometrização completa dessa interação.

Mas, se a gravitação newtoniana é uma teoria bem sucedida em muitos aspectos – afinal de contas fomos à Lua com ela! – em que condições a gravitação relativística deixa de ser uma exigência formal e passa a ser experimentalmente relevante? *Grosso modo* podemos responder esta pergunta lembrando-nos do modo pelo qual decidimos se devemos ou não aplicar a cinemática relativística a um determinado problema. Se  $v$  é a celeridade de um corpo, e  $c$  é

celeridade da luz, então se  $v/c \ll 1$  a situação é não-relativística, por outro lado, se  $c/v \sim 1$ , então a situação é relativística. Da mesma forma, como decidimos quando um problema físico pode ser considerado como quântico? Com as quantidades físicas relevantes do sistema formamos uma grandeza que tenha dimensões de ação=energia  $\times$  tempo. Se esta quantidade for muito maior do que a constante de Planck, o problema é clássico, se for da mesma ordem de grandeza dessa constante, o problema é quântico. Para a gravitação relativística podemos ter critério similar. De fato, o critério é fixado pela quantidade:

$$\frac{GM}{Rc^2},$$

onde  $M$  é a massa da fonte gravitacional e  $R$ , o seu raio. Se esta quantidade for muito menor do que a unidade, o sistema é newtoniano, Se, por outro lado:

$$\frac{GM}{Rc^2} \sim 1,$$

o sistema exigirá que o analisemos do ponto de vista da gravitação relativística<sup>1</sup>. O sistema que estudaremos nestas notas, o buraco negro estelar, satisfaz, como veremos mais adiante, este critério.

A gravitação relativística é importante também nos problemas relacionados com estrelas de nêutrons, buracos negros galácticos. Também é importante para a localização precisa de um ponto sobre a superfície da Terra por meio do sistema GPS.

A gravitação relativística tem seus críticos. Há problemas que ainda despertam a desconfiança de alguns teóricos, como por exemplo, a questão da conservação da energia. Argumenta-se também, por exemplo, que outras teorias da gravitação, inclusive a gravitação newtoniana, prevêm a existência de buracos negros. No entanto, ela parece ser a melhor alternativa à gravitação newtoniana que temos atualmente, pois os experimentos modernos mostram que as teorias alternativas devem ser descartadas. A teoria prevê a existência de ondas gravitacionais. Até o momento há resultados experimentais muito fortes que indicam a produção dessas ondas. A detecção direta de ondas gravitacionais, porém, permanece irrealizada. Se tais ondas forem detectadas será o grande triunfo da teoria.

Nosso portal de entrada ao universo da gravitação relativística será o buraco negro. Estudar esse sistema particular nos permitirá um primeiro encontro com uma das idéias mais fascinantes do física teórica: *a atração gravitacional é uma manifestação da geometria do espaço-tempo do nosso universo!* Nas seções seguintes, porém, antes mesmo de atacar o problema do buraco negro, tentaremos entender e explorar essa idéia fundamental.

---

<sup>1</sup>Evidentemente, os critérios expostos apresentam uma faixa ‘cinzenta’ que por simplicidade deixaremos de comentar por enquanto.

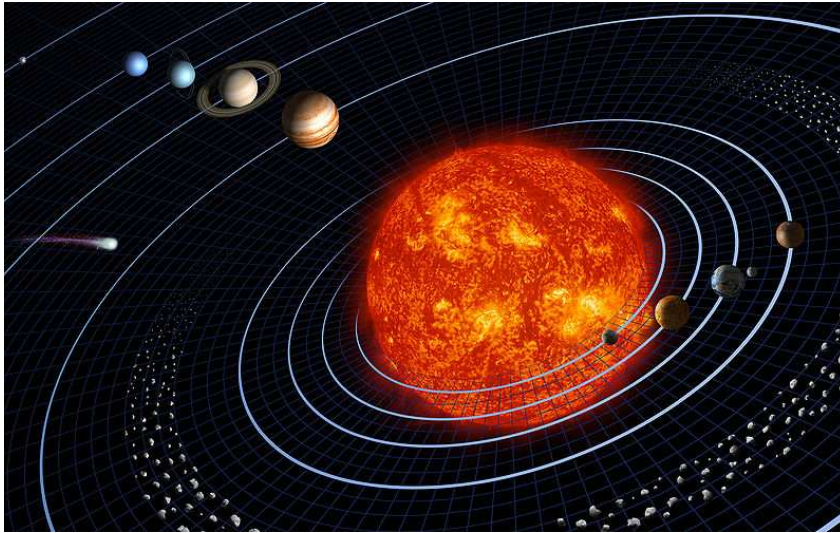


Figura 1: A mecânica do Sistema Solar é descrita com grande precisão pela lei da gravitação universal. (Ilustração Wikipédia)

**Exercício 1** Calcule  $G M / (R c^2)$  para :

- (i) a Terra;
- (ii) o Sol;
- (iii) uma estrela de nêutrons;
- (iv) um buraco negro estelar;
- (v) um buraco negro galáctico.

■

## 1.1 O princípio de equivalência de Newton

Considere uma partícula de prova de massa inercial  $m$  e, em princípio, massa gravitacional  $m_g$ . A equação newtoniana de movimento se escreve:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \sum_k \vec{F}(\vec{r} - \vec{r}_k, \vec{v} - \vec{v}_k, t) + m_g \vec{g}, \quad (1)$$

onde incluímos, por amor à generalidade, a interação da partícula de prova com outras partículas por meio de forças que o princípio da relatividade galileano permite. Observe que  $\vec{g}$  é a aceleração da gravidade local. Por exemplo, em um ponto a uma distância radial  $r$  do centro da Terra:

$$\vec{g} = -\frac{GM_{\oplus}}{r^2} \hat{e}_r. \quad (2)$$

Considere agora a transformação não linear:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \frac{1}{2}gt^2, \quad (3)$$

que descreve um observador não inercial que 'cai' com aceleração local  $\vec{g}(\vec{r})$ , e que deve ser aplicada à partícula teste e às demais partículas. Segue que:

$$m \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} = \sum_k \vec{F}(\vec{r}' - \vec{r}'_k, \vec{v}' - \vec{v}'_k, t) + (m_g - m)\vec{g}. \quad (4)$$

Se, como os experimentos indicam, a massa inercial e a massa gravitacional são numericamente iguais, isto é:  $m = m_g$ , a equação de movimento da partícula de prova se escreverá:

$$m \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} = \sum_k \vec{F}(\vec{r}' - \vec{r}'_k, \vec{v}' - \vec{v}'_k, t), \quad (5)$$

e se a partícula estiver isolada do resto,

$$m \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} = 0, \quad (6)$$

isto é: a partícula estará em queda livre!

## 1.2 O princípio de equivalência de Einstein

O papel do princípio da equivalência na formulação de Einstein é hoje em dia um tanto controverso. Entretanto, não há dúvidas de que ele teve grande importância na formulação da gravitação relativística. Nas palavras de Einstein:

Então ocorreu-me o pensamento mais feliz de minha vida, na forma seguinte: O campo gravitacional tem existência relativa ... pois para um observador em que cai livremente do telhado de uma casa não há – pelo menos nas suas vizinhanças imediatas – campo gravitacional. De fato, se o observador deixar cair alguns corpos então estes permanecerão em repouso ou de movimento uniforme relativamente a ele, independentemente da sua natureza química ou física particular. O observador tem o direito de interpretar o seu estado como o de repouso.



Figura 2: Queda livre!. (Foto Wikipédia)

Há mais de um modo de enunciar o princípio da equivalência na forma fraca, todas equivalentes, é claro. Uma dessas formas se lê:

Não há arranjo experimental que possa diferenciar uma aceleração uniforme de um campo gravitacional uniforme.

Outra forma, um pouco mais precisa é:

Todos os laboratórios em queda-livre, não girantes são equivalentes no que diz respeito às leis da física.

Evidentemente, os laboratórios em queda livre são os referenciais inerciais de Lorentz, e as leis da física são as leis formuladas relativisticamente. Por exemplo, em um laboratório em queda-livre, não-girante, mas no qual há campos eletromagnéticos, para uma partícula de massa inercial  $m$  e carga  $q$  que se move com trivelocidade  $\vec{v}$  em relação ao mesmo vale a equação de movimento:

$$m \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \mathbf{F},$$

onde  $F$  é o quadrimomento que atua sobre a partícula:

$$\mathbf{F} = \left( \gamma \frac{q\mathbf{E} \cdot \vec{v}}{c}, \gamma q\vec{E} + \gamma q\vec{v} \times \vec{B} \right).$$



A constatação de que um campo gravitacional uniforme pode ser eliminado se o observador passar para o referencial em queda-livre coloca, no contexto, a gravitação no mesmo nível das forças inerciais da mecânica newtoniana, a força centrífuga, a força de Coriolis e outras, pois tais forças só aparecem em referenciais inerciais acelerados e podem ser eliminadas se o observador passar para um referencial inercial galileano.

O princípio da equivalência enunciado acima é conhecido como *princípio da equivalência na forma fraca*. Ele é válido para campos gravitacionais uniformes. A formulação do princípio na sua forma forte é a que gera controvérsias. Na forma forte o princípio se lê:

Não há arranjo experimental que possa diferenciar um laboratório localmente acelerado de um campo gravitacional local.

O desenvolvimento teórico da teoria relativística da gravitação leva a um objeto matemático extremamente sensível à presença de campos gravitacionais locais arbitrários: o tensor de Riemann que coloca em cheque a validade do princípio da equivalência na forma forte.

### 1.3 A duração temporal em campos gravitacionais

Considere a Figura 3. Ela mostra dois relógios idênticos,  $A$  e  $B$ , acelerados em relação ao referencial inercial  $\mathcal{O}xy$ . A Figura 3 mostra também um terceiro relógio,  $C$ , não acelerado, em repouso em relação ao referencial inercial  $\mathcal{O}xy$ . A idéia é comparar a duração, ou intervalo de tempo, marcado pelos relógios acelerados com a duração marcada pelo relógio em repouso. Considere o instante em que o relógio  $A$  passa pelo relógio  $C$  em quase coincidência espacial com velocidade instantânea  $v_A$ . Nesse instante, considere um segundo referencial inercial em relação ao qual a velocidade instantânea do relógio  $A$  seja nula, *i.e.*:  $v'_A = 0$  e sua aceleração  $a'$  seja igual (em módulo) a  $g$ . De acordo com as transformações de Lorentz para a (tri)aceleração:

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3 \left(1 + \frac{V v'_x}{c^2}\right)^3}.$$

o observador inercial medirá uma (tri)aceleração:

$$a_x = \frac{g}{\gamma^3} = g \left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right)^{3/2} = g (1 - \beta_A^2)^{3/2}, \quad (7)$$

já que  $V = v_A$ ,  $v'_x = 0$ , e  $a' = g$ . Por outro lado, a (tri)aceleração em relação ao referencial  $\mathcal{O}xy$  é definida por:

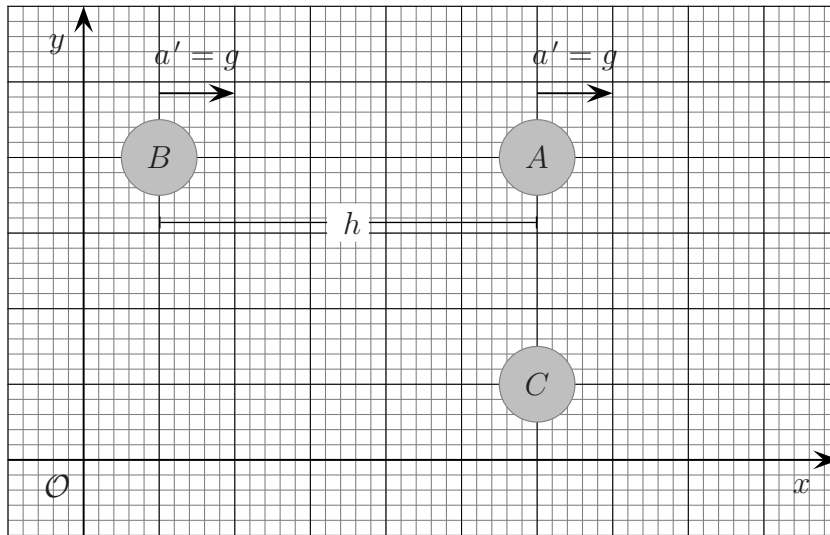


Figura 3: Relógios acelerados. No referencial  $\mathcal{O}xy$  a separação entre os relógios acelerados é  $h$ .

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = c \frac{d\beta_A}{dt}, \quad (8)$$

logo,

$$\frac{d\beta_A}{dt} = (g/c) (1 - \beta_A^2)^{3/2}, \quad (9)$$

ou ainda,

$$\frac{d\beta_A}{(1 - \beta_A^2)^{3/2}} = (g/c) dt. \quad (10)$$

Integrando os dois lados desta equação obtemos:

$$\frac{\beta_A}{(1 - \beta_A^2)^{1/2}} = (g/c) t + C, \quad (11)$$

onde  $C$  é uma constante de integração. Fazendo  $\beta_A(0) = 0$ , segue  $C = 0$ . Com um pouco de álgebra segue também que:

$$\beta_A(t) = \frac{(gt/c)}{\sqrt{1 - (gt/c)^2}}. \quad (12)$$

O fator cinemático  $\gamma$  se escreve:

$$\gamma_A(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_A^2}} = \sqrt{1 + (gt/c)^2}. \quad (13)$$

A relação entre a duração marcada pelo relógio acelerado, que mede tempo próprio, e a duração marcada pelo relógio em repouso  $C$ , que mede tempo coordenado, é dada por:

$$d\tau_A = \frac{dt_C}{\gamma_A(t)} = \frac{dt_C}{\sqrt{1 + (gt/c)^2}}. \quad (14)$$

Se  $gt \ll c$ , e  $t = t_A$  é o instante em que o relógio  $A$  passa pelo relógio  $C$ , podemos escrever:

$$d\tau_A \approx dt_C \left(1 - \frac{g^2 t_A^2}{2c^2}\right). \quad (15)$$

Da mesma forma, quando o relógio  $B$  passa pelo relógio  $C$ :

$$d\tau_B \approx dt_C \left(1 - \frac{g^2 t_B^2}{2c^2}\right). \quad (16)$$

A razão entre as durações é

$$\frac{d\tau_A}{d\tau_B} = \left(1 - \frac{g^2 t_A^2}{c^2}\right) / \left(1 - \frac{g^2 t_B^2}{c^2}\right) \approx \left(1 - \frac{g^2 t_A^2}{c^2}\right) \left(1 + \frac{g^2 t_B^2}{c^2}\right) \approx 1 - \frac{2gh}{c^2}, \quad (17)$$

onde usamos a relação  $v_A^2 = v_B^2 + 2gh$ .

**Exercício 2** Verifique estes resultados e justifique as aproximações feitas. ■

Se agora invocarmos o princípio da equivalência, podemos afirmar que dois relógios fixos,  $A$  e  $B$ , colocados em um campo gravitacional uniforme  $g$ , e separados por uma distância fixa  $h$  marcam durações diferentes. Portanto, a relação entre as durações depende da diferença de potencial gravitacional. Aqui, o potencial gravitacional é aquele que associamos com o campo uniforme. Do princípio de equivalência na forma forte segue que mesmo em campo gravitacional

não-uniforme os relógios comportar-se-ão da forma discutida acima: isto é: o ritmo do relógio dependerá da sua localização no campo gravitacional.

Os resultados acima sugerem a seguinte generalização: em um campo gravitacional fraco, mas não uniforme, a métrica do espaço tempo pode ser escrita na forma:

$$(ds)^2 = - \left( 1 + \frac{2\Phi(\vec{r})}{c^2} \right) (cdt)^2 + (d\ell)^2, \quad (18)$$

onde  $\Phi(\vec{r})$  é o potencial gravitacional e  $(d\ell)^2$  é a métrica (independente do tempo) do (tri)espaço convencional. Para uma distribuição localizada de massa esfericamente simétrica, como por exemplo, no modelo idealizado de uma estrela de raio (aproximado)  $R$ , (o nosso Sol, por exemplo):

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{GM}{r} \quad (19)$$

onde  $M$  é a massa total da distribuição e  $r > R$  é a distância de um ponto externo à origem da distribuição. É possível mostrar que para uma métrica estática, isto é, uma métrica que não depende do tempo coordenado, podemos escrever:

$$(ds)^2 = -e^{2\Phi(\vec{r})/c^2} (cdt)^2 + (d\ell)^2. \quad (20)$$

Na aproximação de campo fraco:

$$e^{2\Phi(\vec{r})/c^2} \approx 1 + \frac{2\Phi(\vec{r})}{c^2}. \quad (21)$$

## 1.4 O princípio de mínima ação e a gravitação newtoniana no espaçotempo

Considere dois eventos no espaçotempo, digamos,  $A$  e  $B$ . A distância tipo tempo entre esses dois eventos é dada por:

$$c\tau_{AB} = \int_A^B c d\tau, \quad (22)$$

onde,

$$cd\tau = \sqrt{-\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} = \sqrt{(cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2}. \quad (23)$$

Se a curva no espaçotempo for descrita em termos de um parâmetro invariante, digamos  $\sigma$ , definido em um intervalo apropriado, isto é:

$$x^\alpha = x^\alpha(\sigma), \quad \sigma \in [\sigma_A, \sigma_B], \quad (24)$$

a distância tipo tempo assume a forma:

$$c \tau_{AB} = \int_{\sigma_A}^{\sigma_B} d\sigma \sqrt{-\eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma}} = \int_{\sigma_A}^{\sigma_B} d\sigma \sqrt{\left(\frac{d(ct)}{d\sigma}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 - \left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2 - \left(\frac{dz}{d\sigma}\right)^2}. \quad (25)$$

O princípio de mínima ação no espaçotempo quadridimensional se escreve:

$$\delta \left( \int_{\sigma_A}^{\sigma_B} d\sigma \sqrt{-\eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma}} \right) = 0, \quad (26)$$

que nos conduz às equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \right)} \right) = 0, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3; \quad (27)$$

onde  $L$  é o lagrangiano que aqui assume a forma:

$$L = \sqrt{-\eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma}} = \sqrt{\left(\frac{d(ct)}{d\sigma}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 - \left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2 - \left(\frac{dz}{d\sigma}\right)^2}. \quad (28)$$

Se por exemplo, aplicarmos a Eq. (27) à coordenada  $x^0 = ct$ , obteremos, lembrando que  $L$  não depende explicitamente das coordenadas  $x^\alpha$ :

$$\frac{\partial L}{\partial x^0} - \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{dx^0}{d\sigma} \right)} \right) = 0 - \frac{1}{2} \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{2}{L} \frac{dx^0}{d\sigma} \right) = 0, \quad (29)$$

ou, simplificando:

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{L} \frac{dx^0}{d\sigma} \right) = 0. \quad (30)$$

Mas,

$$c d\tau = L d\sigma \rightarrow \frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{c}{L}. \quad (31)$$

Por outro lado,

$$\frac{d}{d\sigma} \rightarrow \frac{d\tau}{d\sigma} \frac{d}{d\tau} = \frac{L}{c} \frac{d}{d\tau}. \quad (32)$$

Portanto,

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{L} \frac{dx^0}{d\sigma} \right) = \frac{L}{c} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{L} \frac{L}{c} \frac{d}{d\tau} \right) = \frac{L}{c^2} \frac{d^2 x^0}{d\tau^2} = 0, \quad (33)$$

ou ainda:

$$\frac{d^2 x^0}{d\tau^2} = 0. \quad (34)$$

Procedendo da mesma forma com as coordenadas  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ , e  $x^3 = z$ , obtemos:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad (35)$$

que é a equação newtoniana para uma partícula livre no espaçotempo quadridimensional.

Consideremos agora o efeito de um campo gravitacional fraco, representado pelo potencial gravitacional estático  $\Phi(\vec{r})$ , sobre a métrica do espaçotempo:

$$c d\tau = \left( 1 + 2 \frac{\Phi(\vec{r})}{c^2} \right) (dx^0)^2 - ((dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2), \quad (36)$$

logo:

$$c \tau_{AB} = \int_A^B c d\tau = \int_{t_A}^{t_B} c dt \sqrt{\left( 1 + 2 \frac{\Phi(\vec{r})}{c^2} \right) - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (37)$$

onde usamos o tempo coordenado  $t$  como parâmetro invariante (lembre-se do caráter absoluto do tempo na mecânica newtoniana). Aqui  $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$  é módulo ao quadrado da trivelocity:

$$v^2 = \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2. \quad (38)$$

Se o campo gravitacional for fraco, podemos escrever:

$$\int_{t_A}^{t_B} c dt \sqrt{\left( 1 + 2 \frac{\Phi(\vec{r})}{c^2} \right) - \frac{v^2}{c^2}} \approx \int_A^B c dt \left( 1 + \frac{\Phi(x, y, z)}{c^2} - \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2c^2} \right).$$

As equações de Euler-Lagrange se escrevem:

$$\frac{\partial L}{\partial x^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = 0, \quad k = x, y, z, \quad (39)$$

onde:

$$L(x^k, \dot{x}^k, t) = c + \frac{\Phi(x, y, z)}{c^2} - \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{c^2}, \quad (40)$$

é o lagrangiano associado com a métrica. Aplicando as equações de Euler-Lagrange, obtemos a equação de movimento:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^k} + \ddot{x}^k = 0, \quad k = x, y, z, \quad (41)$$

ou ainda:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\nabla \Phi. \quad (42)$$

## 2 Geodésicas, curvatura e métrica

Nesta seção, estudaremos alguns aspectos da geometria das superfícies bidimensionais (e tridimensionais!) com curvatura, alguns exemplos das quais são mostradas na Figura 4. Ficamos restritos às superfícies suaves, i.e.. superfícies sem cantos ou arestas, como por exemplo a superfície dos poliedros. A idéia é ganhar familiaridade com algumas idéias e conceitos da geometria diferencial que se mostrarão importantes quando fizermos a transição da gravitação newtoniana para a gravitação relativística.

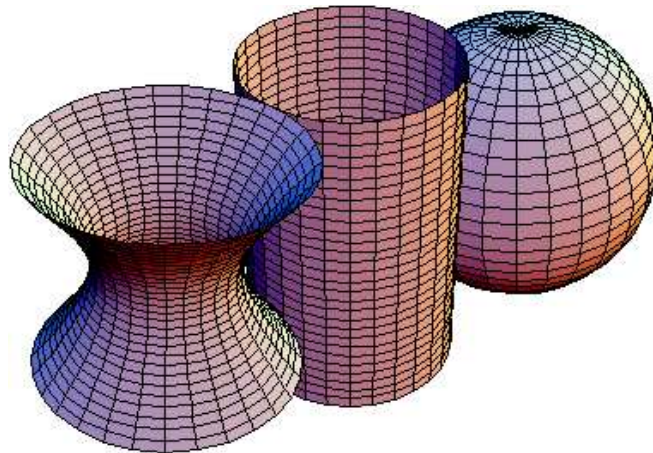


Figura 4: Superfícies hiperbólica, cilíndrica e esférica. A curvatura da superfície cilíndrica é nula. A superfície hiperbólica tem curvatura negativa e a esférica positiva.

## 2.1 Superfícies bidimensionais

Uma boa parte da geometria que aprendemos na escola secundária diz respeito à geometria do plano euclidiano. O que queremos dizer quando afirmamos que a tampa de uma mesa de jantar ou de uma mesa de bilhar pode ser modelada por uma porção finita de um plano euclidiano? Ora, queremos dizer simplesmente que sobre a tampa da mesa vale o teorema de Pitágoras, ou que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale  $180^\circ$ . Esses teoremas, e todos os que decorrem dos postulados da geometria de Euclides, podem ser aplicados aos problemas práticos do mapeamento ou da agrimensura, desde que as medições envolvidas sejam tais que a curvatura da Terra possa ser desprezada. Mas, e se a curvatura da Terra não puder ser desprezada? A Figura 5 mostra-nos o que acontece com a soma dos ângulos internos de um triângulo se o desenharmos sobre a superfície de uma esfera ou de uma superfície em forma de sela. Evidentemente a **curvatura** da esfera e da sela têm um papel importante na geometria da sua superfície.

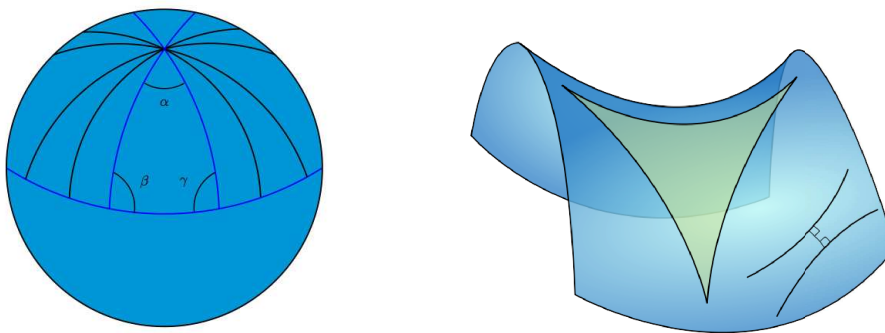


Figura 5: Sobre a superfície de uma esfera, a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico,  $\alpha + \beta + \gamma$ , é maior do que  $180^\circ$ . Sobre uma superfície em forma de sela, a soma dos ângulos internos é menor do que  $180^\circ$ .

Outro conceito importante que nos ajudará a entender a geometria das superfícies curvas é o de **geodésica** ou **curva geodésica**. Dados dois pontos sobre o plano, o caminho mais curto entre eles, sabemos todos, é o segmento de reta que os une. Dados dois pontos sobre a esfera qual o caminho mais curto entre eles? E sobre a superfície em forma de sela da Figura 5? No caso da esfera, será o menor dos arcos do grande círculo que que passa pelos dois pontos, no caso da sela, a curva geodésica é um pouco mais complexa. De qualquer modo, para os nossos propósitos aqui, convém pensar da seguinte forma: dada uma superfície arbitrária, suave, e dois pontos sobre essa superfície, uma geodésica é uma curva que contém o arco mais curto que une esses pontos. Há é claro, definições mais rigorosas de curva geodésica, mas por enquanto é

**Geodésicas**



suficiente ter uma idéia do conceito.

Para introduzir a idéia de curvatura de um modo mais preciso estudemos a circunferência  $C$  de um círculo geodésico de raio  $\ell$ . O primeiro passo para construção de um círculo de raio  $\ell$  sobre uma *superfície arbitrária* com centro em um ponto  $O$ , é traçar algumas curvas geodésicas representativas que partem do ponto  $O$ . A seguir marcamos sobre cada uma das geodésicas, o ponto cuja distância ao ponto  $O$  é  $\ell$ . O lugar geométrico de todos esses pontos, por definição, é o círculo que queremos. Apliquemos a construção acima à uma esfera de raio  $R$ , veja a Figura 15. A circunferência  $C$  vale:

**Curvatura**

$$C = 2\pi r = 2\pi R \sin \alpha, \quad (43)$$

mas, por definição:

$$\alpha = \frac{\ell}{R}, \quad (44)$$

logo

$$C = 2\pi R \sin \left( \frac{\ell}{R} \right). \quad (45)$$

Vamos supor que  $\ell \ll R$ . Então podemos fazer uso da expansão de Taylor do seno e escrever:

$$\sin \left( \frac{\ell}{R} \right) \approx \frac{\ell}{R} - \frac{1}{3!} \frac{\ell^3}{R^3}, \quad (46)$$

segue então que a circunferência se escreve:

$$C \approx 2\pi \ell \left( 1 - \frac{1}{6} \frac{\ell^2}{R^2} \right) = 2\pi r \left( 1 - \frac{1}{6} \ell^2 K \right), \quad (47)$$

onde

$$K := \frac{1}{R^2}, \quad (48)$$

é a **curvatura** da esfera. A Eq. (47) pode ser rescrita na forma:

$$K = \frac{3}{\pi} \lim_{\ell \rightarrow 0} \left( \frac{2\pi \ell - C}{\ell^3} \right), \quad (49)$$

que é uma forma mais útil para a identificação do tipo de curvatura que estamos com a qual estamos lidando, pois nessa forma, podemos estudar a curvatura local de superfícies arbitrárias, como por exemplo, uma superfície em forma de sela de cavalo, ou hiperbólica. **Em outras palavras, podemos considerar a Eq. (49) como a definição de curvatura local para uma**

**superfície bidimensional.** Se  $C < 2\pi\ell$ , então a curvatura local é positiva; se  $C = 2\pi\ell$ , a curvatura local é nula. Finalmente, se  $C > 2\pi\ell$ , então a curvatura é negativa.

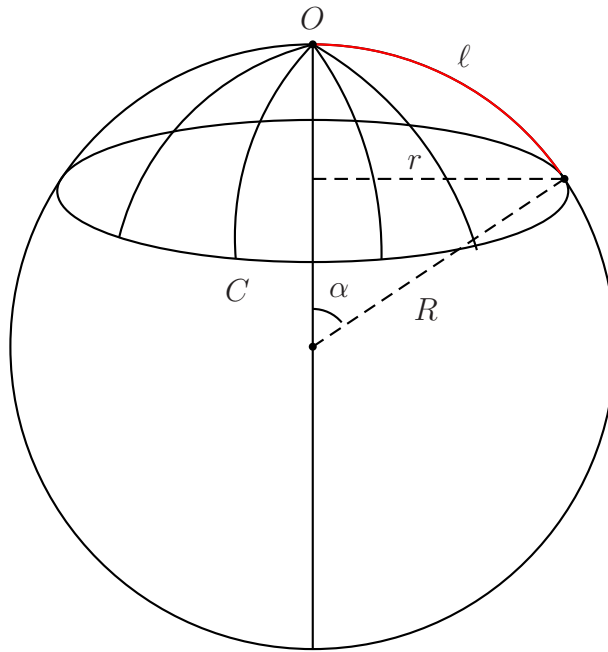


Figura 6: Círculo geodésico de raio  $\ell$  (em vermelho) sobre uma esfera de raio  $R$ .

**Exercício 3** A partir da definição de curvatura local de uma superfície bidimensional, calcule a curvatura local de uma esfera de raio  $R$ . **Sugestão:** refaça o caminho inverso ao que nos levou à Eq. (49). ■

Para finalizar o exemplo da superfície esférica, façamos um breve cálculo que será útil para entender as situações mais complexas que nos aguardam. Dado uma geodésica sobre a esfera, considere como anteriormente a circunferência geodésica de raio  $\ell$ , medido a partir do ponto  $O$ . Suponha que você queira calcular uma variação  $d\ell$  em função de  $r$ , veja a Figura 5. Note que  $r \geq 0$  é um raio extrínscio à superfície esférica ao contrário do raio geodésico  $\ell$  e de  $C$  que em princípio podem ser medidos com uma trena sem que tenhamos que abandonar a superfície.

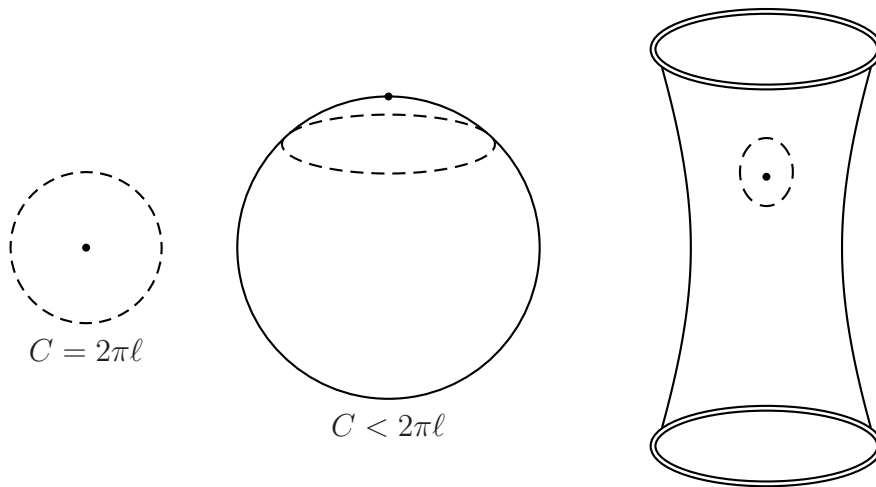


Figura 7: Ilustrando a definição geométrica de curvatura de Gauss.

Essas duas últimas quantidades são chamadas grandezas intrínsecas à superfície esférica. A curvatura gaussiana local, dada pela Eq. (49), pode ser determinada sem que precisemos visualizar a esfera imersa em um espaço de dimensão superior<sup>2</sup>. Voltemos ao cálculo. Examinando a geometria da Figura 15, não é muito difícil mostrar que:

$$d\ell = \frac{dr}{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{1/2}}, \quad 0 \leq r \leq R. \quad (50)$$

A Eq. (50) nos dá a separação entre duas circunferências infinitesimalmente próximas. No limite em que  $r/R \ll 1$ , a Eq. (50) nos diz que  $d\ell \rightarrow dr$ . Uma separação finita  $\ell$  pode ser calculada integrando a equação acima:

$$\ell(r) = \int_0^r \frac{dr'}{\left(1 - \frac{r'^2}{R^2}\right)^{1/2}} = R \arcsen\left(\frac{r}{R}\right). \quad (51)$$

Invertendo esta última equação:

<sup>2</sup>Medidas intrínsecas são cruciais para nós humanos que percebemos um mundo tridimensional!

$$r = R \operatorname{sen} \left( \frac{\ell}{R} \right). \quad (52)$$

Portanto, em função do raio geodésico  $\ell$  (ou raio próprio), a circunferência  $C$  se escreve:

$$C = 2\pi R \operatorname{sen} \left( \frac{\ell}{R} \right). \quad (53)$$

**Exercício 4** Obtenha as Eqs, (50), (51) e (53) . Calcule  $C$  para  $\ell$  igual a um múltiplo inteiro de  $2\pi R$ . Interprete geometricamente o resultado. ■

A abordagem à curvatura que desenvolvemos até aqui é chamada *geométrica*. Esta abordagem fundamenta-se na definição de Gauss, Eq. (49). Entretanto, dependendo da superfície bidimensional que estamos estudando a definição de Gauss pode ser de difícil aplicação prática. Há, felizmente, outra abordagem à curvatura das superfícies bidimensionais que baseia-se no estudo da distância entre dois pontos da superfície curva infinitesimalmente próximos. Essa distância pode ser estudada por meio de um objeto matemático chamado: **métrica**. Essa abordagem foi desenvolvida por Gauss por volta de 1827 e chama-se *geometria diferencial*. Para entendê-la (apenas o suficiente aos nossos propósitos!) precisamos fazer primeiro uma breve digressão sobre sistemas de coordenadas curvilíneas, em particular, as coordenadas curvilíneas ortogonais. Começemos com as coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$  que nos são tão familiares e que podem ser consideradas como um caso particularíssimo de coordenadas curvilíneas. Por conveniência futura escreveremos:  $x = x^1$ , e  $y = x^2$ . A distância entre dois pontos fixos do plano infinitesimalmente próximos um do outro em cartesianas é dada por (Pitágoras!):

$$(ds^2) = (dx)^2 + (dy)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2, \quad (54)$$

onde  $g_{11} = 1$  e  $g_{22} = 1$ , são componentes de um objeto com dois índices inferiorizados cristianizado como **tensor métrico** ou **métrica**. Tensores métricos podem ser representados por matrizes. No caso:

$$\llbracket g \rrbracket = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (55)$$

**Coordenadas  
ortogonais;  
tensor  
métrico**

A relação entre as coordenadas cartesianas e as plano-polares é:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta, \quad (56)$$

ou, fazendo  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $\bar{x}^1 = r$ , e  $\bar{x}^2 = \theta$ ,

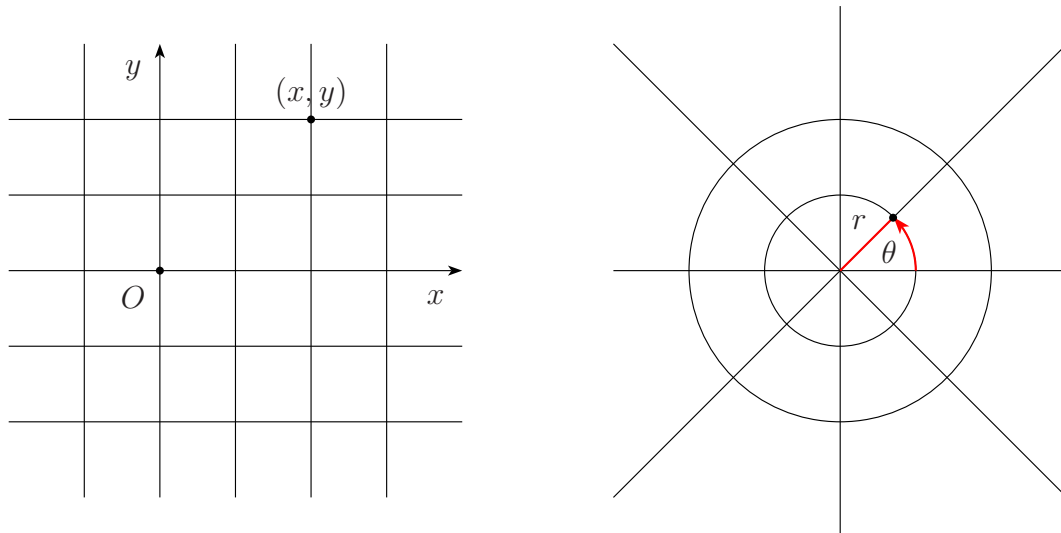


Figura 8: Coordenadas cartesianas e plano-polares.

$$x^1 = \bar{x}^1 \cos \bar{x}^2, \quad x^2 = \bar{x}^1 \operatorname{sen} \bar{x}^2. \quad (57)$$

A transformação inversa se escreve:

$$\bar{x}^1 = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} \quad \text{ou,} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad (58)$$

e:

$$\tan \bar{x}^2 = \frac{x^2}{x^1} \quad \text{ou,} \quad \tan \theta = \frac{y}{x}. \quad (59)$$

Para calcular a distância entre dois pontos infinitesimalmente próximos em coordenadas plano-polares escrevemos:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta = \cos \theta dr - r \operatorname{sen} \theta d\theta, \quad (60)$$

e:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta = \operatorname{sen} \theta dr + r \cos \theta d\theta \quad (61)$$

Segue que:

$$(dx)^2 + (dy)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2, \quad (62)$$

ou:

$$(dx^1)^2 + (dx^2)^2 = (d\bar{x}^1)^2 + (\bar{x}^1)^2 (d\bar{x}^2)^2, \quad (63)$$

É fácil escrever o tensor métrico associado com as coordenadas plano-polares:

$$\llbracket g \rrbracket = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\bar{x}^1)^2 \end{pmatrix}. \quad (64)$$

As coordenadas plano-polares são o exemplo mais simples de sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonais. Se você examinar a Figura 8 constatará facilmente que as curvas  $r = \text{constante}$ , círculos, interceptam perpendicularmente as curvas  $\theta = \text{constante}$ , retas, eis a razão do adjetivo *ortogonais*. Há muitos outros sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonais, em duas e três dimensões espaciais. A escolha de um sistema em particular envolve, em geral, considerações de simetria.

O objeto mais importante no estudo analítico das superfícies bidimensionais imersas no espaço euclidiano tridimensional, como por exemplo as superfícies representadas na Figura 4, é sua métrica  $g_{ij}$ . Eis alguns resultados gerais sobre a métrica (sem demonstração!), tenha em mente que  $x^1$  e  $x^2$  representam coordenadas curvilíneas arbitrárias:

- (i) De modo geral, a distância entre os dois pontos sobre uma superfície curva ao quadrado se escreve:

$$(ds^2) = g_{11} (dx^1)^2 + g_{12} (dx^1)(dx^2) + g_{21} (dx^2) (dx^1) + g_{22} (dx^2)^2.$$

onde  $g_{ij}(x^1, x^2)$ , o tensor métrico, pode ser uma função do ponto sobre a superfície cujo endereço é dado pelas coordenadas  $x^1$  e  $x^2$ ;

- (ii) o tensor métrico é simétrico, isto é:  $g_{ij} = g_{ji}$ , logo, podemos escrever:

$$(ds)^2 = g_{11} (dx^1)^2 + 2g_{12} (dx^1)(dx^2) + g_{22} (dx^2)^2;$$

Esta expressão quadrática é conhecida em geometria diferencial como **primeira forma fundamental**;

- (iii) a primeira forma fundamental tem a importante propriedade:

$$(ds)^2 \geq 0;$$

- (iv) qualquer métrica pode ser posta na forma diagonal na qual as componentes  $g_{12} = g_{21}$  são nulas. Este tipo de métrica é chamada de *métrica ortogonal* pois as curvas que formam o ‘reticulado’ sobre a superfície interceptam-se em ângulos retos. Quando isto acontece, as coordenadas  $x^1, x^2$  sobre a superfície são ditas ortogonais. Os sistemas de coordenadas mais populares: plano-polares, cilíndricas e esféricas são ortogonais. Quase todas as métricas que discutiremos aqui serão ortogonais. O exercício a seguir é uma das poucas exceções.

**Exercício 5** Considere a superfície definida pela equação:

$$x^3 - \text{sen}(x^1 x^2) = 0. \quad x^1, x^2 \in (-\infty, +\infty).$$

- (i) Mostre que:

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= [1 + (x^2)^2 \cos^2(x^1 x^2)] (dx^1)^2 + 2 x^1 x^2 \cos^2(x^1 x^2) dx^1 dx^2 \\ &+ [1 + (x^1)^2 \cos^2(x^1 x^2)] (dx^2)^2. \end{aligned}$$

- (ii) Calcule as componentes do tensor métrico correspondente. As coordenadas  $x^1, x^2$ , são ortogonais?
- (iii) Faça um gráfico tridimensional desta superfície com o seu *software* favorito [MAPLE, Mathematica, ou Maxima (gratuito!!!)].



O fato de utilizarmos coordenadas plano-polares para localizar um ponto no plano não significa que este tenha curvatura. Da mesma forma, em três dimensões, usar coordenadas esféricas para localizar um ponto do espaço também não significa que este seja curvo. Dada uma métrica, como saber se não existe um truque, uma transformação mágica, que mostre que a superfície é na verdade intrinsecamente plana, em outras palavras: como saber se uma superfície é realmente curva do ponto de vista de um bípede implume bidimensional? A resposta foi dada pelo grande Gauss por meio do *Teorema Egregium*. A fórmula de Gauss nos dá a curvatura local intrínseca da superfície em termos das componentes da métrica e de suas derivadas de primeira e segunda ordem. Em coordenadas ortogonais ( $g_{12}(x^1, x^2) = g_{21}(x^1, x^2) = 0$ ), o teorema, resumido na equação que se segue, envolve apenas as componentes  $g_{11}(x^1, x^2)$  e  $g_{22}(x^1, x^2)$ . Ei-lo:

**Teorema Egregium**

$$K = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial x^2} \right) \right\}, \quad (65)$$

ou, desenvolvendo as derivadas:

$$K = \frac{1}{2g_{11}g_{22}} \left\{ -\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial (x^2)^2} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial (x^1)^2} + \frac{1}{2g_{11}} \left[ \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \left( \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right)^2 \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2g_{22}} \left[ \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right)^2 \right] \right\}. \quad (66)$$

Tenha em mente que aqui,  $x^1$  e  $x^2$  são coordenadas curvilíneas ortogonais arbitrárias. Se, por exemplo, aplicarmos o teorema ao caso do plano descrito pelas coordenadas plano-polares obteremos  $K = 0$ , como deveríamos esperar.



Figura 9: Karl Friedrich Gauss (1777–1858) em 1828. A obra de Gauss é vastíssima e abrange muitos ramos da matemática. Boa parte dessa obra foi recuperada e publicada postumamente. Em vida, Gauss publicou relativamente pouco, *pauca sed matura* era seu lema. A contribuição de Gauss à teoria das superfícies está em dois trabalhos de 1825 e 1826. (Ilustração Wikipédia)

Quando as coordenadas que descrevem a superfície não são ortogonais, o *Teorema Egregium* assume uma forma mais complexa.



**Exercício 6** Use o *Teorema Egregium* e calcule a curvatura de uma esfera de raio  $R$ . Você já sabe a resposta:

$$1/R^2! \quad \blacksquare$$

**Exemplo 1** Eis um exemplo de uma superfície cuja curvatura varia de ponto para ponto. Considere a superfície bidimensional definida por:

$$z - e^{-(x^2+y^2)} = 0, \quad x, y \in (-\infty, +\infty),$$

que também pode ser escrita na forma:

$$z - e^{-r^2} = 0, \quad r \in [0, \infty),$$

onde  $r^2 = x^2 + y^2$ . Obviamente estamos usando coordenadas cilíndricas e a notação usual. Observe também que  $r$  desempenha aqui o mesmo papel que desempenhou no caso da esfera. Esta variável não diretamente é acessível aos bípodes implumes bidimensionais que habitam a superfície dada. Para medir  $r$  temos que medir uma circunferência  $C$  tal que  $r = C/(2\pi)$ . A distância ao quadrado entre dois pontos sobre essa superfície infinitesimalmente próximos obedece à relação:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + (dz)^2.$$

Como:

$$dz = -2e^{-2r} dr,$$

segue que:

$$(ds)^2 = (1 + 4r^2 e^{-2r^2}) (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2.$$

Fazendo as identificações:  $x^1 = r$  e  $x^2 = \theta$ , vemos que o tensor métrico correspondente se escreve:

$$[[g]] = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4r^2 e^{-2r^2} & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Observe que quando  $r \rightarrow \infty$ , temos  $(ds)^2 \rightarrow (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2$ , que corresponde a uma métrica plana. Como a métrica não depende do ângulo  $\theta$ , o *Teorema Egregium* assume a forma particular:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial x^1} \right) = -\frac{1}{\sqrt{(1+4r^2 e^{-r^2})r^2}} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\sqrt{1+4r^2 e^{-r^2}}} \frac{\partial \sqrt{r^2}}{\partial r} \right).$$

Efetuada as derivadas e simplificando obtemos:

$$K = -\frac{4e^{-2r^2}(-1+2r^2)}{(1+4r^2 e^{-2r^2})^2}.$$

O gráfico da Figura 10 mostra o comportamento da curvatura em função de  $r$ . Se a partir do ponto  $(x = 0, y = 0, z = 1/e)$  construirmos com as geodésicas dessa superfície círculos geodésicos de raio  $\ell$  e circunferência  $2\pi\ell$ , como no caso da esfera, a distância entre duas circunferências geodésicas infinitesimalmente próximas será dada por:

$$d\ell = \left(1 + 4r^2 e^{-r^2}\right)^{1/2} dr,$$

onde, não custa insistir,  $r$  é definido por  $r = C/(2\pi)$ , com  $C$  medido sobre a superfície com uma trena, (lembre-se: você é um bípede implume bidimensional!).

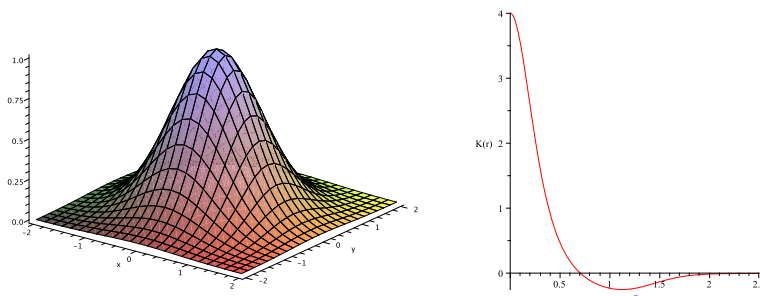


Figura 10: A superfície  $z - e^{-(x^2+y^2)} = z - e^{-r^2} = 0$ , e sua curvatura gaussiana. Observe que a curvatura muda de sinal e que para  $r \rightarrow \infty$ ,  $K \rightarrow 0$ , e a superfície torna-se plana.



A curvatura gaussiana é uma propriedade intrínseca das superfícies. Ela não depende de uma escolha particular de sistemas de coordenadas, isto é: ela é invariante frente a uma troca coordenadas. Por exemplo, em coordenadas esféricas, a distância entre dois pontos sobre a esfera infinitesimalmente próximos ao quadrado é dada por:

$$(ds)^2 = R^2 (d\theta)^2 + R^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2, \quad (67)$$

onde  $R$  é o raio da esfera,  $\theta$  é o ângulo polar e  $\phi$  é o ângulo azimutal. Se no lugar dos ângulos  $\theta$  e  $\phi$ , utilizarmos a coordenada  $r$  definida por  $r = C/(2\pi)$ , veja a Figura 13 e a Figura 15, a mesma quantidade será dada por:

$$(ds)^2 = (d\ell)^2 + r^2 (d\phi)^2 = \frac{(dr)^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} + r^2 (d\phi)^2, \quad (68)$$

onde  $d\ell$  é dado pela Eq. (50). Quaisquer que sejam as coordenadas, desde que localizem corretamente um ponto da superfície da esfera, o *Teorema Egregium* nos dirá que a curvatura gaussiana da esfera vale  $1/R^2$ !

**Exercício 7** Calcule a curvatura gaussiana da esfera com as duas métricas dadas acima. Faça o cálculo com um *software* que permita economizar tempo, como por exemplo o MAPLE, Mathematica, ou Maxima. ■

Outro modo de perceber a curvatura de uma superfície bidimensional é estudar como duas geodésicas próximas afastam-se ou aproximam-se uma da outra. Isto nos leva à idéia do **desvio geodésico**. Consideremos, *ad arguendum*, dois arcos de grande círculo de comprimento  $\ell$ , isto é duas geodésicas, sobre a superfície de uma esfera de raio  $R$  que partem de um ponto comum, veja a Figura 11. Da figura, vemos que o comprimento de arco  $\xi$  subtendido pelo ângulo  $d\phi$  se escreve:

**desvio geodésico**

$$\xi = r d\phi = R \sin \theta = R \sin \left( \frac{\ell}{R} \right). \quad (69)$$

Derivando em relação a  $\ell$  duas vezes obtemos:

$$\frac{d^2 \xi}{d\ell^2} = -\frac{d\phi}{R} \sin \left( \frac{\ell}{R} \right). \quad (70)$$

Multiplicando e dividindo por  $R$  e lembrando que a curvatura gaussiana da esfera é  $1/R^2$ :

$$\frac{d^2 \xi}{d\ell^2} = -K \xi, \quad (71)$$

que é a equação da separação ou desvio geodésico.

Embora deduzida para a esfera, a Eq. (71) pode ser aplicada às superfícies bidimensionais de modo geral. A solução dessa equação será uma função de  $\ell$  e terá a curvatura gaussiana  $K$  como parâmetro. Sendo assim, em princípio, podemos medir  $\ell$  e  $\xi$  sobre a superfície, comparar os resultados com os previstos pela solução e com isso determinar  $K$ . Observe que  $K$  pode ser um parâmetro positivo, negativa, ou nulo. Veja o exemplo e faça o exercício que vem a seguir.

**Exemplo 2** Considere  $K > 0$ . A solução geral da equação do desvio geodésico se escreve:

$$\xi(\ell) = \xi_0 \cos(\sqrt{K} \ell + \alpha),$$

onde  $\xi_0$  e  $\alpha$  são constantes que devem ser determinadas com as condições de contorno do problema. Por exemplo, se supusermos que as geodésicas partem de um ponto comum, como na Figura 11, então uma solução (falta determinar  $\xi_0$ !) será:

$$\xi(\ell) = \xi_0 \sin(\sqrt{K} \ell).$$

Tente interpretar geometricamente esta solução. A curvatura é dada por:

$$K = \frac{1}{\ell^2} \arcsen^2\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right).$$

Considere duas geodésicas que partem do pólo norte da Terra. Acompanhe essas geodésicas até que interceptem a linha do Equador quando então a separação entre elas vale  $\xi_0$ . Sobre a linha do Equador,  $\xi = \xi_0$  e  $\ell = (\pi/2)R$ . Segue então que:

$$K = \frac{1}{R_{\text{Terra}}^2} \approx \frac{1}{(6 \times 10^6 \text{ m})^2} = 1 \times 10^{-12} / \text{m}^2.$$

Como a curvatura da Terra se compara com a curvatura de uma bola de futebol? ■

**Exercício 8** Resolva a equação do desvio geodésico para  $K = 0$  e  $K < 0$ . Interprete geometricamente as soluções. ■

## 2.2 Curvatura em dimensões superiores

O fato de termos sido até agora obrigados a pensar como bípedes implumes bidimensionais não nos impedirá de estendermos as idéias da subsecção anterior para três ou mais dimensões.

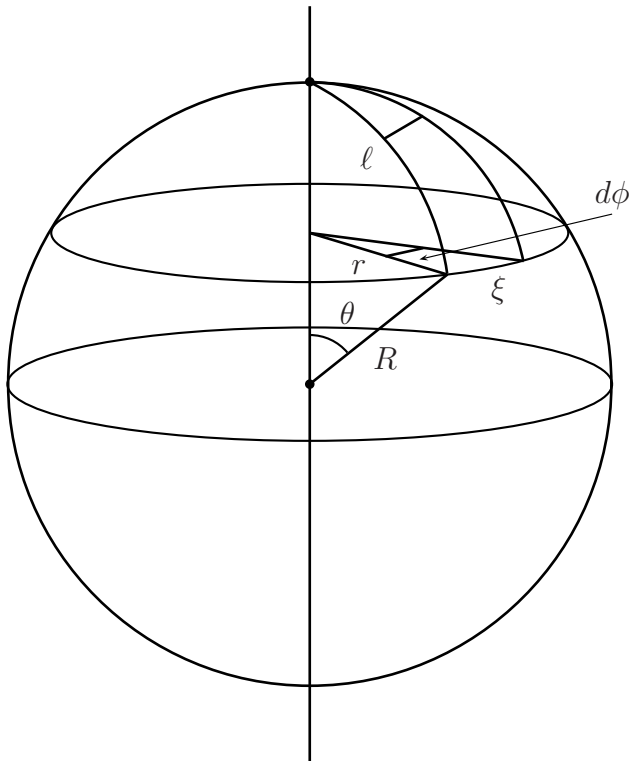


Figura 11: Desvio geodésico sobre uma esfera de raio  $R$ .

Eis algumas idéias preparatórias para suavizar a transição. Do ponto de vista matemático, a extensão do teorema de Pitágoras para  $n$  dimensões,  $n \geq 3$ , é imediata:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2 = R^2,$$

onde  $R$  é a diagonal principal de um paralelepípedo de  $n$  lados. Se  $R$  for o raio de uma esfera **imersa** em um espaço euclidiano  $n$ -dimensional ( $\mathbf{E}^n$ ) então é possível mostrar sem muitas dificuldades que seu volume e sua área são dados por:

$$V_n(R) = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!} R^n; \quad A_n(R) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} R^{n-1},$$

onde  $\Gamma(n/2)$  é uma função gama de Euler que no caso é calculada com as fórmulas:

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}; \quad \Gamma(m + 1/2) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m - 1)}{2^m} \sqrt{\pi}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

A esfera imersa no espaço euclidiano é denotada por  $S^{n-1}$ , que significa:

$$S^{n-1} = \{P(x^1, x^2, \dots, x^{n-1}) \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^{n-1})^2 = R^2\},$$

isto é: o conjunto dos pontos  $P$  do espaço euclidiano  $E^n$  que satisfazem a condição dada. Assim, por exemplo, um círculo de raio  $R$  pode ser considerado como uma esfera unidimensional imersa no plano euclidiano  $E^2$ , ou  $S^1$ , isto é:

$$S^1 = \{P(x^1, x^2) \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 = R^2\}.$$

Nesse caso, as fórmulas para o volume e a área nos dão:

$$V_2(R) = \pi R^2; \quad A_2(R) = 2\pi R.$$

No caso  $n = 3$  obtemos as fórmulas usuais:

$$V_3(R) = \frac{4}{3} \pi R^3; \quad A_3(R) = 4\pi R^2.$$

**Exercício 9** Calcule o volume e a área de uma esfera imersa em espaço euclidiano de 4 dimensões. Repita o cálculo para  $n = 4$ . ■

As superfícies imersas em espaços de dimensões maiores do que três – o que significa que essas superfícies têm dimensões maiores do que dois –, também podem ser estudadas com métodos analíticos, isto é, com a geometria diferencial. Entretanto, este é um problema muito mais complexo do que o das superfícies estudadas por Gauss. Em superfícies com dimensões superiores a dois não é possível descrever a curvatura com apenas uma função, a curvatura gaussiana  $K$  computada com o *Teorema Egregium*. Há necessidade de inventar outras ferramentas. Bernhard Riemann (1826–1866), Elwin Bruno Christoffel (1829-1900), Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925), Tulio Levi-Civita (1873-1941), Élie Cartan (1869-1951) e muitos outros são alguns dos grandes matemáticos que inventaram as ferramentas que utilizamos para investigar a curvatura dessas superfícies. Entre essas ferramentas encontramos o tensor de Riemann. Para os nossos propósitos, é suficiente saber que a curvatura dessas superfícies é descrita por uma ferramenta matemática que precisa de quatro índices para ser caracterizada. Tal ferramenta é conhecida como **tensor de Riemann**,  $R_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ . Cada índice varia de 1 até  $n$ . Portanto, o número de componentes do tensor de Riemann é, em princípio,  $n^4$ . Você consegue imaginar uma representação matricial desse objeto com  $n \times n \times n \times n = n^4$  elementos? Felizmente, relações entre essas componentes reduzem bastante esse número, embora o número

**O tensor de Riemann**

das que sobram possa ser mesmo assim desanimador<sup>3</sup>. Por exemplo, quando  $n = 4$ , um caso brevemente que nos dirá respeito, o número de componentes é 256, mas simetrias envolvendo as componentes do tensor diminuem para 20 as que devemos calcular. Quando  $n = 3$ , e portanto as superfícies imersas têm dimensão dois, que são os casos que estudamos até agora, as relações entre as componentes do tensor de Riemann reduzem as 16 componentes para apenas uma, que se relaciona com a curvatura gaussiana. De fato, pode-se então mostrar que o *Teorema Egregium* se escreve:

$$K = \frac{R_{1212}}{g}$$

onde  $g$  é discriminante do determinante da representação matricial do tensor métrico. Em outras palavras, a curvatura gaussiana é um caso particular da curvatura mais geral descrita pelo tensor de Riemann. As componentes do tensor de Riemann são funções do tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$  e de suas derivadas de primeira e segunda ordem em relação às coordenadas empregadas para descrever a superfície. Um exemplo concreto do que estamos falando é o *Teorema Egregium*, que, agora o sabemos, é um caso particular do tensor de Riemann. Se a superfície que você está estudando for intrinsecamente curva, o tensor de Riemann detectará infalivelmente sua curvatura.

### 2.3 A superfície esférica tridimensional $S^3$

Sejamos nós bípedes implumes bi ou tridimensionais, visualizar estruturas geométricas em dimensões superiores a três nos é vedado. Nossos cérebros não foram projetados para tal tarefa. Em quatro ou mais dimensões somos cegos. Cegos, mas capazes de abstrações. Prosseguiamos formalmente generalizando fórmulas de geometrias que podemos visualizar e descobrindo outras. Foi o que fizeram os grandes geômetras que estenderam a geometria diferencial das superfícies bidimensionais às superfícies de dimensões superiores. Muitas vezes também podemos construir analogias que podem ser de alguma ajuda nesses espaços de dimensões superiores. Nesta subseção, a analogia nos guiará.

Considere a esfera de raio  $R$  imersa no  $E^3$ . O quadrado da distância entre dois pontos infinitesimalmente próximos se escreve:

---

<sup>3</sup>Hoje em dia, os cálculos extensos que envolvem o estudo da curvatura em dimensões superiores são facilitados pelo uso de pacotes *softwares* especializados, como por exemplo, o *differential geometry* ou o *tensorGR* do MAPLE.



Figura 12: Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–66). O texto de sua palestra inaugural de 1854 apresentada na Universidade de Göttingen: *Sobre as hipóteses subjacentes à geometria* é um clássico da matemática. Riemann estendeu os conceitos de distância e curvatura aos espaços  $n$  dimensionais generalizando o trabalho de Gauss de 1827. (Ilustração Wikipédia)

$$(ds)^2 = R^2 (d\theta)^2 + R^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2.$$

Em termos da coordenada  $r$  definida por  $r = C/(2\pi)$ , a mesma quantidade se escreve (veja a Figura 13):

$$(ds)^2 = \frac{(dr)^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} + r^2 \sin^2 \theta (d\theta)^2 + r^2 (d\phi)^2 = \frac{(dr)^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} + r^2 [\sin^2 \theta (d\theta)^2 + (d\phi)^2].$$

De qualquer modo, como comprovamos antes, a curvatura da superfície esférica  $S^2$  imersa no  $E^3$  vale  $1/R^2$ . Em particular, ela não depende  $r$ . Nosso problema será generalizar esta última expressão é calcular o quadrado da distância entre dois pontos infinitesimalmente próximos sobre a superfície de uma esfera imersa em um espaço de quatro dimensões, isto é: queremos determinar a métrica sobre a superfície  $S^3$ .

Começemos introduzindo o equivalente à coordenada  $r$  do caso  $S^2$ . Para a superfície  $S^3$  definiremos  $r$  por:

$$r^2 = \frac{A}{4\pi}, \quad (72)$$



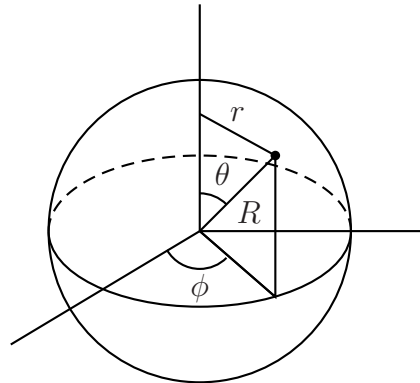


Figura 13: Figura.

onde  $A$  é o valor da área da esfera ordinária. A área  $A$  desempenha o mesmo papel que a circunferência  $C$  no caso  $S^2$ , isto é: o valor  $A$  é obtido medindo-se a área da esfera ordinária. O quadrado da distância entre dois pontos infinitesimalmente próximos sobre a superfície se escreve:

$$(ds)^2 = F(r) (dr)^2 + r^2 [(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\phi)^2], \quad (73)$$

onde  $F(r)$  é uma função que devemos determinar. Para determinar essa função devemos relacioná-la com o tensor de Riemann, em particular com sua forma bidimensional, o *Teorema Egregium*. O espaço que estamos considerando é tal que a curvatura todas as superfícies geodésicas devem ter a mesma curvatura gaussiana  $K$ . Isto significa que podemos escolher  $\theta = \pi/2$ , isto é, a superfície equatorial, para simplificar os cálculos. Sobre essa superfície:

$$(ds)^2 = F(r) (dr)^2 + r^2 (d\phi)^2. \quad (74)$$

Fazendo as identificações  $x^1 = r$  e  $x^2 = \phi$ ,  $g_{11} = F(x^1)$ ,  $g_{22} = (x^1)^2$ , podemos fazer uso do *Teorema Egregium*, que aqui assumirá a forma:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial x^1} \right), \quad (75)$$

ou, efetuando:

$$K = \frac{1}{2rF^2(r)} \frac{dF(r)}{dr}. \quad (76)$$

Em analogia com o caso  $S^2$ , fazemos a suposição que  $K$  não depende de  $r$ . Lembre-se:  $r$  não é o raio da superfície esférica  $S^3$ . Tratando  $K$  como uma constante, a equação diferencial pode

ser facilmente integrada, o resultado é:

$$F(r) = \frac{1}{a - K r^2}, \quad (77)$$

onde  $a$  é uma constante de integração. O quadrado da distância entre dois pontos infinitesimalmente próximos então se escreve:

$$(ds)^2 = \frac{(dr)^2}{a - K r^2} + r^2 [(d\theta)^2 + \text{sen}^2 \theta (d\phi)^2], \quad (78)$$

Para determina  $a$ , fazemos a suposição (razoável) que quando  $K = 0$ , a métrica deve tornar-se euclidiana:

$$\frac{(dr)^2}{a - K r^2} + r^2 [(d\theta)^2 + \text{sen}^2 \theta (d\phi)^2] \rightarrow (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta (d\phi)^2,$$

logo,  $a = 1$ .

**Exercício 10** Resolva a Eq. (76) e obtenha a solução dada pela Eq. (77). ■

A distância infinitesimal entre duas superfícies geodésicas esféricas e concêntricas é:

$$ds = \frac{dr}{\sqrt{1 - K r^2}}. \quad (79)$$

Portanto, uma distância  $s$  arbitrária medida a partir de  $r = 0$ , é dada por:

$$s(r) = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - K r'^2}} = \frac{1}{\sqrt{K}} \arcsen \left( r \sqrt{K} \right) \quad (80)$$

A distância  $s$  é chamada de *raio próprio* da superfície esférica. Segue que:

$$r = \frac{1}{\sqrt{K}} \text{sen} \left( s \sqrt{K} \right). \quad (81)$$

Logo, a área dessa hipóresfera pode ser escrita como:

$$A = 4\pi r^2 = \frac{4\pi}{K} \text{sen}^2 \left( s \sqrt{K} \right). \quad (82)$$

Se  $s \ll 1/\sqrt{K}$ , (curvatura gaussiana  $\rightarrow 0$ ), então  $A = 4\pi s^2$ , isto é  $s$  torna-se um raio geométrico comum.

**Exercício 11**

- (i) Observe que o valor mínimo que a Eq. (82) fornece para a área é zero e o máximo  $4\pi/K$ . Interprete geometricamente estes resultados.
- (ii) Obtenha uma equação equivalente à Eq. (82) no caso em que  $K = -|K|$ , isto é: quando a curvatura é constante e negativa.

■

**2.4 Espaços de Riemann**

Para concluir nossa breve excursão através da geometria das superfícies suaves, uma palavra sobre os espaços de Riemann. Espaços de Riemann podem ser definidos como aqueles cuja distância ao quadrado entre dois pontos infinitesimalmente próximos é dada por:

$$(ds)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} (dx^i) (dx^j) \equiv g_{ij} (dx^i) (dx^j), \quad (83)$$

onde introduzimos a convenção de Einstein: um índice repetido indica soma sobre esse índice. As coordenadas  $x^i$  são coordenadas curvilíneas arbitrárias. Em princípio,  $(ds)^2$  é uma quantidade definida positiva, mas na teoria relativística da gravitação essa condição será posta de lado. Dada uma métrica  $g_{ij}$ , podemos obter calcular várias quantidades importantes para o estudo dessas superfícies ou espaços de Riemann, por exemplo: os símbolos de Christoffel, a equação da geodésica, o tensor de Riemann, o tensor de Ricci e o escalar de curvatura. Mas é importante frisar que o métrica deve ser dada. Como veremos mais adiante, na teoria relativística da gravitação a métrica fica determinada pela distribuição de matéria e energia. Os espaços de Riemann deixam de ser de interesse puramente matemático e adquirem uma forte conotação física.

**Exemplo 3** *A equação geodésica: os símbolos de Christoffel* Considere uma superfície plana bidimensional cuja métrica é dada por:

$$(d\ell)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\varphi)^2.$$

A distância entre dois pontos  $A$  e  $B$  se escreve:

$$\ell_{AB} = \int_A^B [(dr)^2 + r^2 (d\varphi)^2]^{1/2}.$$

Suponha que uma curva nesse espaço seja parametrizada de tal forma que:

$$r = r(\sigma), \quad \varphi = \varphi(\sigma), \quad \sigma \in [\sigma_A, \sigma_B].$$

Segue que:

$$\ell_{AB} = \int_A^B d\sigma \left[ \left( \frac{dr}{d\sigma} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

O lagrangiano é dado por:

$$L(r, \varphi, \frac{dr}{d\sigma}, \frac{d\varphi}{d\sigma}, \sigma) = \left[ \left( \frac{dr}{d\sigma} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right]^{1/2},$$

e as equações de Euler-Lagrange são:

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{d\sigma} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{dr}{d\sigma} \right)} = 0,$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{d\sigma} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)} = 0.$$

Definindo uma nova parametrização por:

$$\ell = \sigma L,$$

segue que:

$$\frac{d^2 r}{d\ell^2} = r \left( \frac{d\varphi}{d\ell} \right)^2,$$

e

$$\frac{d}{d\ell} \left( r^2 \frac{d\varphi}{d\ell} \right) = 0,$$

ou,

$$\frac{d^2 \varphi}{d\ell^2} = -\frac{2}{r} \frac{dr}{d\ell} \frac{d\varphi}{d\ell}.$$

As duas equações acima são as equações da geodésica para o espaço que estamos considerando.

De modo geral, a equação da geodésica é dada por:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0, \quad (84)$$

onde  $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ , são os símbolos de Christoffel definidos por:

$$g_{\alpha\delta}\Gamma_{\beta\gamma}^{\delta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} \right). \quad (85)$$

Os símbolos de Christoffel têm a propriedade:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha}. \quad (86)$$

No nosso exemplo:

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r, \Gamma_{r\varphi}^{\varphi} = \Gamma_{\varphi r}^{\varphi} = \frac{2}{r}.$$

■

**Exemplo 4** *Um exemplo de espaço de Riemann: o espaço de Schwarzschild* Uma métrica esféricamente simétrica geral se escreve:

$$(c d\tau)^2 = g_{00}(ct, r) (d(ct))^2 - g_{11}(ct, r) (dr)^2 - r^2 ((d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\varphi)^2);$$

Para determinar as componentes relevantes do tensor métrico devemos utilizar as nas equações de campo de Einstein que relacionam a estrutura do espaçotempo com a distribuição de matéria e energia. Para determinar completamente as funções  $g_{00}(ct, r)$  e  $g_{11}(ct, r)$ , devemos especificar as condições de contorno. A resolução das equações de Einstein está longe de ser uma tarefa trivial, mas algumas soluções analíticas são conhecidas. Entre elas, a mais simples é a solução obtida pelo físico alemão Karl Schwarzschild (1873-1916). A métrica de Schwarzschild foi a primeira solução conhecida das equações de Einstein e descreve o espaçotempo vazio em torno de um corpo esférico de massa  $M$ , não-girante, isto é: seu momento angular é nulo. Schwarzschild obteve as soluções:

$$g_{00}(ct, r) \rightarrow g_{00}(r) = \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right),$$

e

$$g_{11}(ct, r) \rightarrow g_{11}(r) = \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1}.$$

Métrica de Schwarzschild se escreve:

$$(c d\tau)^2 = \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) (d(ct))^2 - \frac{(dr)^2}{\left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)} - r^2 ((d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\varphi)^2).$$

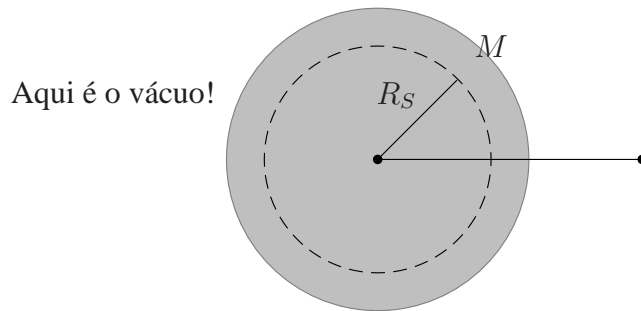


Figura 14: Massa esférica.

A quantidade:

$$r^* = \frac{2GM}{c^2},$$

é denominada **raio de Schwarzschild** e influi sobre a validade da solução. Se o raio de Schwarzschild for menor do que o raio físico  $R$  da massa  $M$ , a solução só vale para  $r > R$ , pois para  $r^* < r < R$  há matéria e a solução só vale no vácuo. Se raio de Schwarzschild for maior do que o raio físico  $R$ , a solução só vale para  $r > r^*$ , pois para  $r = r^*$  encontramos uma singularidade, e para  $r < r^*$  há uma inversão no sinal da métrica. Na Parte III destas notas discutiremos com mais detalhes a solução de Schwarzschild e sua aplicação aos buracos negros estelares que são objetos capazes de distorcer o espaçotempo de forma significativa. ■

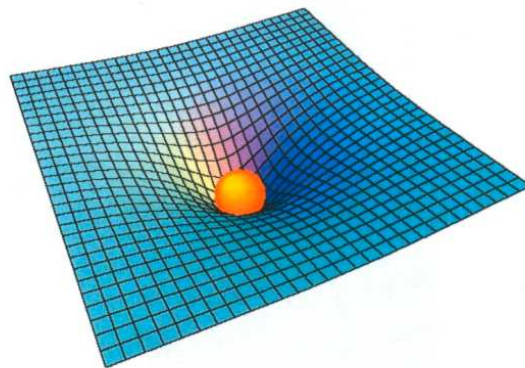


Figura 15: Espaçotempo de Schwarzschild. (Ilustração Wikipédia)

## Referências

- [1] J. B. Hartle *Gravity: An Introduction to Einstein's Relativity* 2003 (Addison-Wesley: New York)
- [2] C. Will *The renaissance of general relativity*, in P. Davies, (ed.) *The new physics*, 1996 (CUP: Cambridge)
- [3] W. Rindler *Essential Relativity: Special, General, Cosmological* 2nd ed. 2006 (OUP, Oxford)
- [4] E. Kreyzig *Differential Geometry* 1991 (Dover: Mineola)
- [5] A. Einstein *Sobre la teoria de la relatividad especial y general* 1984 (Alianza: Madrid)
- [6] K. S. Thorne *Black Holes & Time Warps* 1994 (W. W. Norton: New York)
- [7] J. A. Wheeler *Introduction to General Relativity: Exploring Black Holes* 2000 (Addison-Wesley Longman: New York)
- [8] D. Raine and E. Thomas *Black Holes: An Introduction* 2005 (Imperial College Press: London)