



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Instituto de Física

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física

Mestrado Profissional em Ensino de Física

Uso do resfriamento da água como um relógio natural

(Guia de orientação para o professor)

Vinicius Bandeira de Melo
Vitorvani Soares

Material instrucional associado à dissertação de mestrado de Vinicius Bandeira de Melo, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Rio de Janeiro
Julho de 2024

Ficha catalográfica

M5281u Melo, Vinicius Bandeira de
 Uso do resfriamento da água como um relógio natural
 (Guia de orientação para o professor) / Vinicius Bandeira de
 Melo

Vitorvani Soares. – Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2024.

v, 35 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Vitorvani Soares.

Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Física /
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2024.

Referências Bibliográficas: f. 30.

1. Ensino de Física. 2. Transferência de calor. 3. Ensino
médio. I. Soares, Vitorvani. II. Universidade Federal do Rio
de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação
em Ensino de Física. III. Título.

Sumário

1	Introdução	6
2	O experimento	7
2.1	Material utilizado	7
2.2	Resfriamento da água	8
2.2.1	Temperatura da água vs. instante de tempo para $V = 3,00(5)$ L	9
2.2.2	Resfriamento da água para diferentes volumes	21
3	Um modelo matemático para o resfriamento da água	25
4	Considerações finais	29
	Referências	30
A	Roteiro de aula	31
A.1	Tema	31
A.2	Conteúdo	31
A.3	Objetivo	31
A.4	Desenvolvimento	31
A.5	Recursos didáticos	32
A.6	Duração	32
A.7	Avaliação	32
A.8	Material auxiliar para o aluno	33

Lista de ilustrações

Figura 1	Béqueres de volumes distintos	8
Figura 2	Termômetro e jaleco de proteção	8
Figura 3	Temperatura vs. instante de tempo para $V = 3,00(5)$ L	10
Figura 4	Taxa de resfriamento vs. instante de tempo para $V = 3,00(5)$ L	11
Figura 5	Temperatura vs. instante de tempo (convectividade)	12
Figura 6	Temperatura vs. instante de tempo (Lockwood)	12
Figura 7	Taxa de variação de temperatura vs. instante de tempo (Lockwood)	13
Figura 8	Taxa de variação da temperatura vs. temperatura	14
Figura 9	Incerteza da taxa de variação de temperatura	14
Figura 10	O método de Lémery-Ford-Walford	17
Figura 11	Tempos característicos de resfriamento para $V = 3,00(5)$ L	20
Figura 12	Constante de resfriamento (λ) vs. comprimento característico (R)	22
Figura 13	Produto ($R\lambda$) vs. comprimento característico (R)	23

Lista de tabelas

Tabela 1	Temperatura vs. instante de tempo para $V = 3,00(5) \text{ L}$	9
Tabela 2	Temperatura vs. instante de tempo para diferentes volumes	21
Tabela 3	Constante de resfriamento vs. comprimento característico	21
Tabela 4	Área total de cada volume de água	27
Tabela 5	Constantes de resfriamento vs. coeficiente de transferência de calor . .	28

1 Introdução

Neste guia para o professor, apresentamos uma proposta didática para ser realizada pelos alunos que estabelece uma relação matemática entre a mudança de temperatura de um corpo e sua evolução temporal. A partir da construção de um experimento e da análise dos resultados obtidos construímos uma lei de resfriamento que um determinado volume de água obedece. Utilizamos os resultados desse experimento para construir um relógio natural: conhecendo-se o resfriamento realizado pelo volume de água podemos determinar o intervalo de tempo correspondente para que esse resfriamento ocorra.

Descrevemos uma atividade didática de maneira a representar, para os alunos, uma equação do resfriamento e demonstramos como transformá-la na equação do relógio natural. Determinamos também um parâmetro de comparação entre volumes de água diferentes e sua relação com as diferentes taxas de resfriamento observadas.

A atividade proposta consiste em estudar o resfriamento espontâneo de uma certa quantidade de água que se encontra em um meio de menor temperatura, ou seja, observamos o comportamento da água ao resfriar em relação ao tempo. Representamos graficamente a variação da temperatura desse volume de água e, em seguida, analisamos geometricamente e algebricamente o comportamento das grandezas físicas envolvidas no problema. Dos resultados obtidos, estabelecemos uma relação matemática que representa algebricamente a evolução temporal do resfriamento da água. Concluimos a atividade construindo um relógio natural a partir da relação matemática encontrada.

Esse material instrucional está associado à dissertação de mestrado apresentada por Vinícius Bandeira de Melo (2024) ao Programa de Pós- Graduação em Ensino de Física da UFRJ.

2 O experimento

Apresentamos nesse capítulo uma atividade em que o estudante do Ensino Médio, sob a orientação do professor, pode praticar em sala de aula regular. Estudamos, nessa atividade, o resfriamento espontâneo de uma certa quantidade de água que se encontra em um meio de menor temperatura, ou seja, observamos o comportamento da água ao resfriar em relação ao tempo. Representamos graficamente a variação de temperatura desse volume de água e, em seguida, analisamos geométrica e algebricamente o comportamento das grandezas físicas envolvidas no problema. Podemos, então, estabelecer uma relação matemática que represente a evolução temporal do resfriamento da água.

Por fim, repetimos o mesmo processo para vários volumes de água. Conhecendo-se o resfriamento realizado pelos volumes de água determinamos o intervalo de tempo correspondente para que esses resfriamentos ocorram. Desse modo, a partir dos resultados do experimento, construímos um relógio natural. Para concluir a atividade, empregamos esse resultado para estimar o tempo necessário para resfriar um volume de água contido em uma esfera de raio igual ao raio terrestre.

2.1 Material utilizado

Os materiais empregados na atividade foram os seguintes: dois béqueres de volumes distintos ($V = 0,60(5) \text{ L}$ e $V = 4,00(5) \text{ L}$)¹, como ilustrados na Figura 1; um aquecedor de água, de potência $P \approx 1000 \text{ W}$; um par de esquadros de lado maior $L \approx 30 \text{ cm}$; um termômetro de mercúrio apropriado para medir temperaturas de líquidos com escalas termométricas de $-10,0^\circ\text{C}$ à $150,0^\circ\text{C}$ e uma incerteza de $\pm 0,5^\circ\text{C}$; cronômetro de smartphone com uma incerteza estimada de $\pm 0,1 \text{ sec} \approx \pm 0,02 \text{ min}$ e diferentes volumes de água filtrada. O modelo do termômetro utilizado em nossas atividades está ilustrado na Figura 2a.

É de muita importância salientarmos a segurança no ambiente de trabalho. Por isso, para evitar eventual acidente, aconselhamos o uso de jalecos de proteção durante a realização do experimento, como ilustrado na Figura 2b. Também recomendamos que a prática seja feita no ambiente laboratorial e que todos, inclusive o professor, estejam utilizando luvas de acrílico, já que estariam lidando com vidros, líquidos à altas temperaturas e termômetros de mercúrio. A escolha da posição do material na bancada, durante a prática, deve ser feita de modo a manter a segurança adequada para todos os participantes da atividade.

¹ Ao longo deste trabalho indicamos as medidas com suas incertezas na representação $(10,00 \pm 0,02) \text{ min} = 10,00(2) \text{ min}$.



Figura 1. – Béqueres de volumes distintos. (a) Béquer de volume $V = 4,00(5)$ L. (b) Béquer de volume $V = 0,60(5)$ L.



Figura 2. – (a) Termômetro químico de mercúrio apropriado para medir temperaturas de líquidos com escala externa de $-10,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ à $150,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ e uma incerteza de $\pm 0,5\text{ }^{\circ}\text{C}$. (b) Recomendamos o uso de jalecos de proteção durante a realização do experimento.

2.2 Resfriamento da água

Inicialmente, medimos a temperatura ambiente T_{amb} e anotamos o seu valor para efeito de discussão em sala de aula. Em seguida, preenchamos o béquer escolhido com água até a marcação de volume desejada e registramos essa medida. Depois aquecemos a água até a sua ebulição ou até uma temperatura pré-definida. Retiramos o aquecedor da água aquecida e introduzimos o termômetro. Ligamos o cronômetro do celular e, em intervalos de tempos já pré-estabelecidos, anotamos a temperatura correspondente no caderno de laboratório.

Tendo construído o aparato experimental, dado início à prática e realizado a aquisição dos dados da evolução da temperatura da água em função do tempo, organizamos esses dados em uma tabela para posterior análise. Podemos sugerir, inclusive, que antes de realizar a primeira coleta de dados, o professor discuta com os alunos como fazer as

medidas experimentais, como anotá-las e qual aluno será incumbido de cada tarefa. Essa discussão é essencial para que os alunos aprendam como proceder em relação à organização das tarefas em uma aula experimental e ao trabalho em grupo. Pretendemos com esse procedimento desenvolver as habilidades experimentais dos estudantes.

É importante lembrar que as medidas podem ser realizadas de várias maneiras. Sendo assim, os alunos devem ser encorajados a executá-las do modo que eles julguem o mais apropriado, desde que se organizem para tal desde o início da atividade. Ou seja, a temperatura pode ser marcada em relação a variações fixas de tempo a partir de um valor inicial ou que os estudantes podem aferir a temperatura em intervalos de tempo aleatórios. Cada maneira de se realizar a aquisição de dados pode ter seus pontos positivos e negativos dependendo do ponto de vista organizacional e isso deve ser discutido pelo professor com os alunos, em acordo com os objetivos do experimento.

Outra etapa importante da atividade é a construção e a análise dos gráficos. Esse processo é essencial do ponto de vista didático e deve ser explorado em todas as suas possibilidades. Por exemplo, na escolha das escalas, na marcação dos dados obtidos e na determinação da curva mais simples para a sua representação devem ser tratados como processos fundamentais para o aprendizado do aluno. Acreditamos que se trabalharmos da maneira mais apropriada possível, essas habilidades desenvolvidas pelos alunos podem representar uma valiosa ferramenta para a análise das diferentes informações que o cercam no seu cotidiano.

2.2.1 Temperatura da água vs. instante de tempo para $V = 3,00(5)$ L

A Tabela 1 apresenta a temperatura da água T vs. instante de tempo t para um volume de água $V = 3,00(5)$ L, para uma temperatura ambiente $T_{\text{amb}} = 39,0(5)$ °C. A correspondente taxa de variação de temperatura, $(\Delta T/\Delta t)$, também está indicada na mesma tabela.

Tabela 1. – Temperatura T da água vs. instante de tempo t para um volume de água $V = 3,00(5)$ L, para uma temperatura ambiente $T_{\text{amb}} = 39,0(5)$ °C.

n	instante de tempo t_n (min)	temperatura T_n (°C)	taxa de variação $(\Delta T/\Delta t)_n$ (°C min ⁻¹)
0	0,00(2)	91,0(5)	
1	10,00(2)	81,0(5)	-0,98(5)
2	20,00(2)	71,5(5)	-0,78(5)
3	30,00(2)	65,5(5)	-0,60(5)
4	40,00(2)	59,5(5)	-0,48(5)
5	50,00(2)	56,0(5)	-0,38(5)
6	60,00(2)	52,0(5)	-0,30(5)
7	70,00(2)	50,0(5)	-0,25(5)
8	80,00(2)	47,0(5)	-0,20(5)
9	90,00(2)	46,0(5)	

Os instantes de tempo $t(\text{min})$ correspondem aos instantes de tempo indicados pelo cronômetro. Consideramos como incerteza $\delta t = 0,02 \text{ min}$ e $\delta T = 0,5^\circ\text{C}$ para os instantes de tempo t e temperatura T , respectivamente.

Para cada instante de tempo t_n , determinamos a taxa de variação da temperatura $(\Delta T/\Delta t)_n$ correspondente da seguinte forma:

$$\left(\frac{\Delta T}{\Delta t}\right)_n = \frac{T_{n+1} - T_{n-1}}{t_{n+1} - t_{n-1}}, \quad (2.1)$$

onde $n = 1, 2, \dots, 8$. A expressão

$$\left(\frac{\Delta T}{\Delta t}\right)_n \left(\frac{2\delta T_n}{T_{n+1} - T_{n-1}} + \frac{2\delta t_n}{t_{n+1} - t_{n-1}}\right) \quad (2.2)$$

determina a incerteza da taxa de variação da temperatura.

A evolução da temperatura da água, para um volume $V = 3,00(5) \text{ L}$, representada na Tabela 1, pode ser melhor percebida com o auxílio do gráfico indicado na Figura 3. Cabe salientar também que a incerteza instrumental da temperatura é menor do que o raio do círculo utilizado no gráfico para representar as medidas de temperatura.

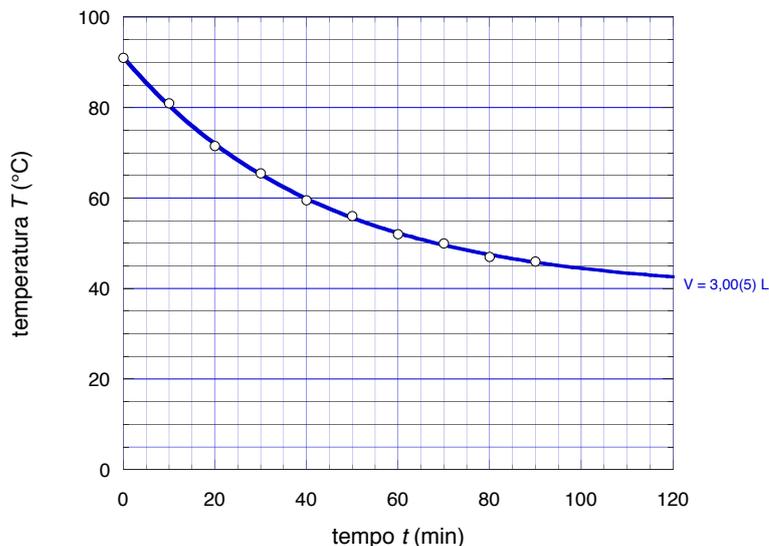


Figura 3. – Temperatura T da água vs. instante de tempo t para um volume de água $V = 3,00(5) \text{ L}$. A linha contínua corresponde a um guia para os olhos para representar o resfriamento da água desde a temperatura inicial T_0 até uma temperatura próxima à temperatura ambiente $T_{\text{amb}} = 39,0(5)^\circ\text{C}$, em cerca de duas horas.

De acordo com o gráfico da Figura 3 podemos notar que houve diminuição da temperatura ao longo do tempo. Notamos também da mesma figura que, em cerca de duas horas, a temperatura do volume de água varia de sua temperatura inicial T_0 até uma temperatura próxima à temperatura ambiente $T_{\text{amb}} = 39,0(5)^\circ\text{C}$.

A taxa de variação da temperatura da água, para um volume $V = 3,00(5) \text{ L}$, representada na Tabela 1, também pode ser melhor analisada com o auxílio do gráfico representado

na Figura 4. Notamos, a partir da Figura 4, algumas características do resfriamento da água: quanto mais perto a temperatura da água se aproxima da temperatura ambiente, maior é o intervalo de tempo que a água necessita para alterar a sua temperatura, ou seja, ocorre uma mudança da taxa de resfriamento da água ao longo do seu resfriamento.

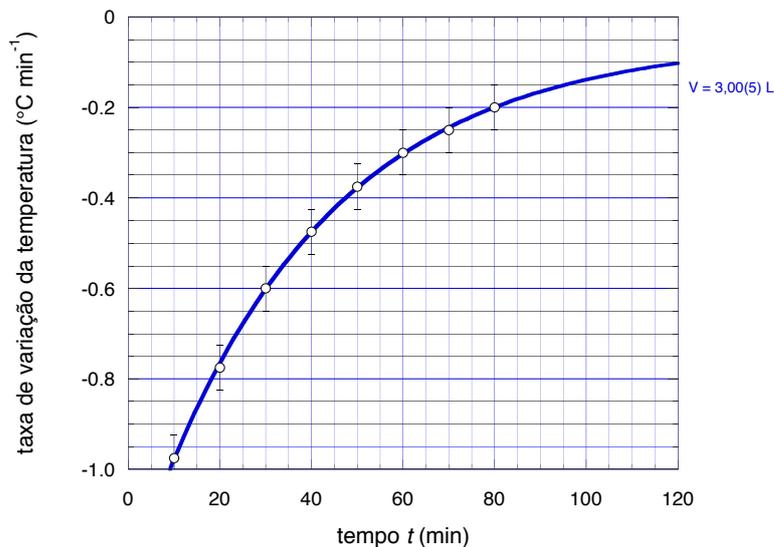


Figura 4. – Taxa de variação da temperatura $\Delta T/\Delta t$ da água vs. instante de tempo t para um volume de água $V = 3,00(5)$ L. A linha contínua corresponde a um guia para os olhos para representar a taxa de resfriamento da água desde o instante inicial até quando a água praticamente pára de resfriar.

Para determinar quais funções matemáticas descrevem os processos descritos geometricamente nas Figuras 3 e 4, procedemos por etapas. À princípio consideramos uma função linear, como mostrado na Figura 5.

Podemos descartar essa função porque ao ajustar geometricamente os dados experimentais a uma reta verificamos que o ajuste não contempla todos os pontos, como mostrado na Figura 5. Porém, ao traçarmos essa reta entre dois pontos concluímos que estamos diante de uma função convexa. De fato, ao observarmos a Figura 5 percebemos que

$$T\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) < \frac{1}{2}[T(t_1) + T(t_2)]. \quad (2.3)$$

Pelo fato de ser uma função convexa vamos investigar se a função procurada é um polinômio de ordem dois, como indicado na Figura 6.

Para determinar essa função recorreremos ao método geométrico, como descrito por Lockwood (1961). Conjecturamos sobre o valor da menor temperatura do sistema, como indicado na Figura 6. Localizamos o vértice da parábola procurada traçando uma linha horizontal que passa por essa temperatura. Traçamos também retas tangentes à curva procurada até a interseção com a horizontal definida anteriormente.

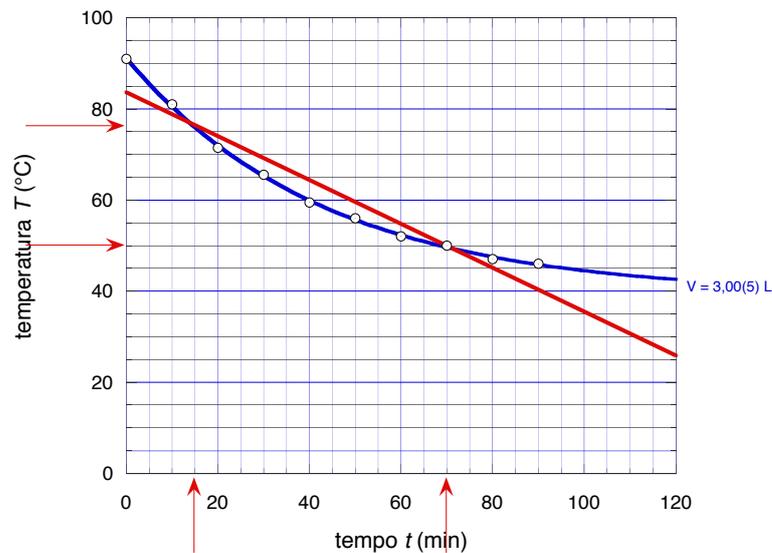


Figura 5. – A linha contínua azul representa o resfriamento da água para um volume $V = 3,00(5)$ L. A reta vermelha representa uma função que contempla o comportamento experimental somente em dois instantes, indicados pelas flechas.

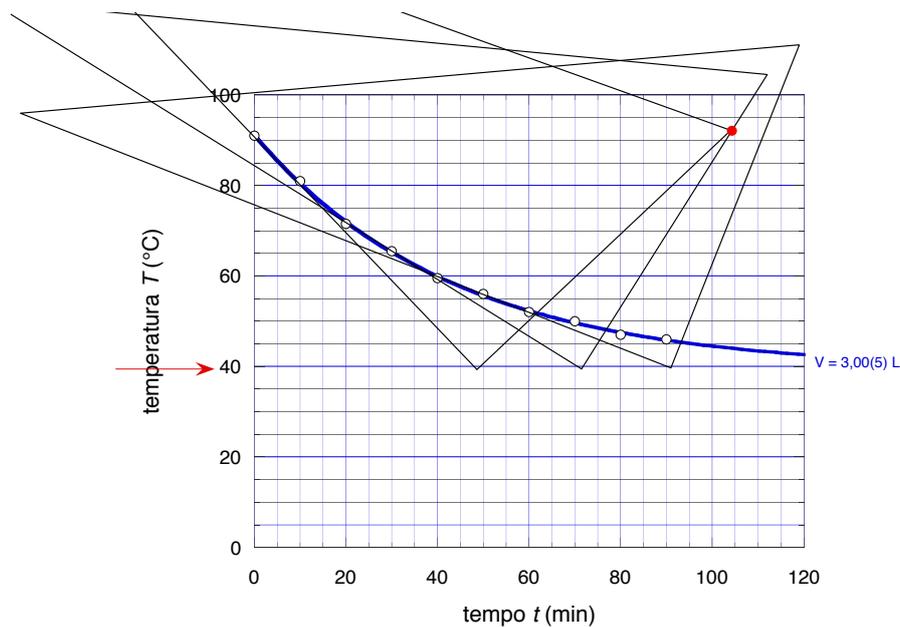


Figura 6. – A linha contínua azul representa uma guia para o olho do resfriamento da água para um volume $V = 3,00(5)$ L. A flecha representa uma conjectura sobre o valor da menor temperatura do sistema. Os triângulos representam as tangentes e as perpendiculares às tangentes utilizadas no método geométrico descrito por Lockwood (1961).

A partir dos pontos de interseção traçamos perpendiculares às retas tangentes. Se essas retas perpendiculares se interceptam em um mesmo ponto, esse ponto define o ponto focal da parábola procurada. A projeção desse ponto sobre a abscissa define o instante de tempo em que a temperatura do volume da água considerado atinge seu valor mínimo. A

função parabólica procurada é a curva envelope de todas as tangentes traçadas por esse método.

Notamos da Figura 6 que não ocorre a interseção das retas perpendiculares às tangentes traçadas. Portanto, o método mostra que a curva procurada não é um polinômio do segundo grau. Observamos também que a definição dessa temperatura limite é crucial para a representação matemática do resfriamento da água.

Podemos aplicar o mesmo método para determinar se a taxa de resfriamento varia de acordo com o polinômio do segundo grau. Esse método, representado na Figura 7 exige que localizemos o vértice da parábola traçando uma linha horizontal que passa pela taxa de resfriamento nula.

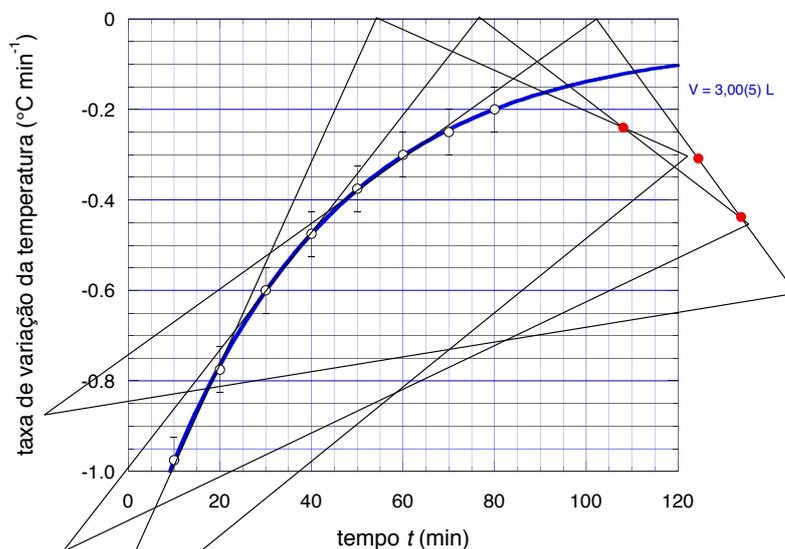


Figura 7. – Taxa de variação da temperatura $\Delta T/\Delta t$ da água vs. instante de tempo t para um volume de água $V = 3,00(5)$ L. A linha contínua corresponde a um guia para os olhos para representar a taxa de resfriamento da água desde o instante inicial até quando a água praticamente pára de resfriar. Os triângulos representam as tangentes e as perpendiculares às tangentes utilizadas no método geométrico descrito por Lockwood (1961).

Notamos da Figura 7 que as retas tangentes não envelopam a curva procurada. Portanto, também podemos concluir que a taxa de resfriamento não varia de acordo com um polinômio de segundo grau. Por esse motivo, usaremos outro método para determinar qual função algébrica descreve o resfriamento da água. Inicialmente, construímos o gráfico da variação de temperatura em função da temperatura, como ilustrado na Figura 8.

Podemos notar da Figura 8 que a variação da temperatura é linear e atinge um valor limite $T_L = 37(3)$ °C quando é nula a taxa de variação da temperatura. Concluimos que, dentro da margem de incerteza, a temperatura da água alcança a temperatura ambiente. A partir da Figura 9 podemos determinar os parâmetros dessa reta assim como suas incertezas.

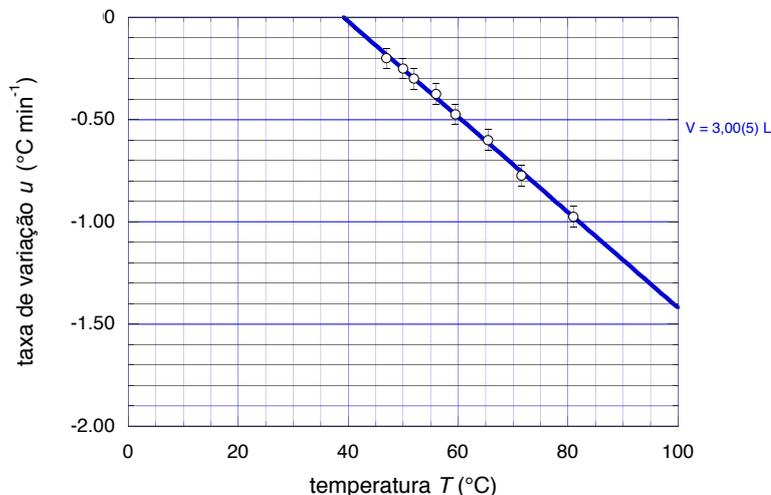


Figura 8. – Taxa de variação da temperatura $u = \Delta T/\Delta t$ da água vs. temperatura T para um volume de água $V = 3,00(5)$ L. A linha contínua corresponde a uma reta que passa pela maioria dos pontos.

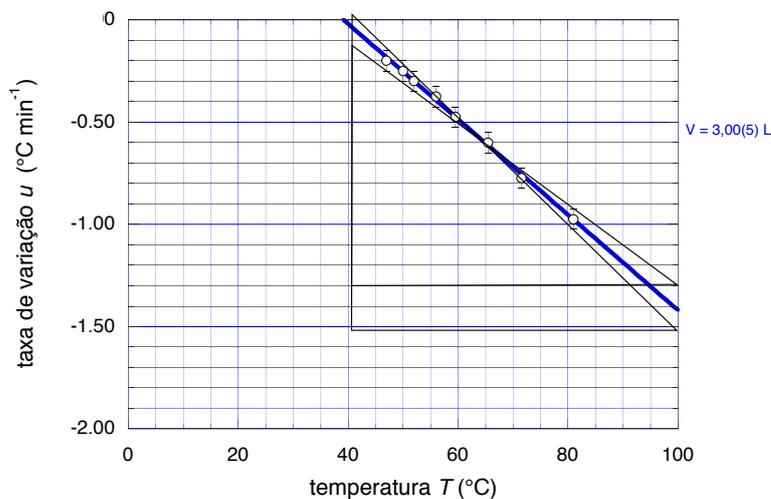


Figura 9. – Taxa de variação da temperatura $u = \Delta T/\Delta t$ da água vs. temperatura T para um volume de água $V = 3,00(5)$ L. Os dados experimentais mostram que a reta procurada pode ter uma menor e uma maior inclinação.

A partir da reta representada no gráfico da Figura 9 determinamos o seu coeficiente angular b e sua respectiva incerteza δb da seguinte maneira. Primeiro definimos $u = \Delta T/\Delta t$ e determinamos b_{\max} , o maior valor possível para b :

$$b_{\max} = \frac{\Delta u_{\max}}{\Delta T_{\min}} = -0,025 / \text{min}, \tag{2.4}$$

onde $\Delta u_{\max} = 1,50^\circ\text{C}/\text{min}$ e $\Delta T_{\min} = -60^\circ\text{C}$.

Em seguida determinamos b_{\min} , o menor valor possível para b :

$$b_{\min} = \frac{\Delta u_{\min}}{\Delta T_{\max}} = -0,020 / \text{min}, \quad (2.5)$$

onde $\Delta u_{\min} = 1,2^\circ\text{C} / \text{min}$ e $\Delta T_{\max} = -60^\circ\text{C}$.

Estabelecemos o valor de b como a média aritmética entre b_{\max} e b_{\min} :

$$b = \frac{b_{\max} + b_{\min}}{2} = -0,023 / \text{min}. \quad (2.6)$$

Para determinar a incerteza δb usamos o seguinte procedimento:

$$\delta b = \frac{b_{\max} - b_{\min}}{2} = -0,003 / \text{min}. \quad (2.7)$$

Logo, o valor de b para $V = 3,00(5)$ L corresponde a $b = -0,023(3) / \text{min}$.

A partir da mesma reta representada no gráfico da Figura 9 observamos que

$$b = \frac{0 - u}{T_L - T} \quad (2.8)$$

e, portanto, podemos concluir que

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = -|b|(T - T_L). \quad (2.9)$$

A taxa de variação da temperatura da água em um dado instante é linearmente proporcional à diferença entre sua temperatura, nesse mesmo instante, e a temperatura ambiente. Conforme o tempo evolui, a temperatura da água diminui e, ao atingir a temperatura limite, a temperatura do volume de água cessa de variar.

Para determinar a função polinomial

$$T(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \dots \quad (2.10)$$

que obedece à equação (2.9) procedemos da seguinte maneira. Observamos que

$$T(t + \Delta t) = a_0 + a_1(t + \Delta t) + a_2(t + \Delta t)^2 + a_3(t + \Delta t)^3 + \dots \quad (2.11)$$

Consideramos $\Delta t \ll t$ e, desse modo, usamos a expansão binomial e podemos escrever que

$$T(t + \Delta t) = a_0 + a_1t \left(1 + \frac{\Delta t}{t}\right) + a_2t^2 \left(1 + 2\frac{\Delta t}{t}\right) + a_3t^3 \left(1 + 3\frac{\Delta t}{t}\right) + \dots \quad (2.12)$$

A diferença entre (2.12) e (2.10) corresponde a

$$T(t + \Delta t) - T(t) = a_1\Delta t + 2a_2t\Delta t + 3a_3t^2\Delta t + \dots \quad (2.13)$$

Portanto, reescrevemos o lado esquerdo de (2.9) na forma

$$\frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t} = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + \dots \quad (2.14)$$

Substituímos (2.14) e (2.10) em (2.9) e obtemos a igualdade

$$a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + \dots = -|b|(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \dots - T_L) \quad (2.15)$$

que é satisfeita somente se

$$\begin{aligned} a_1 &= -|b|(a_0 - T_L), \\ 2a_2 &= -|b|a_1, \\ 3a_3 &= -|b|a_2, \\ &\vdots \\ na_n &= -|b|a_{n-1}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Por consequência, obtemos os coeficientes do polinômio procurado na forma

$$\begin{aligned} a_1 &= -|b|(a_0 - T_L), \\ a_2 &= \frac{|b|^2}{2}(a_0 - T_L), \\ a_3 &= -\frac{|b|^3}{3 \cdot 2}(a_0 - T_L), \\ &\vdots \\ a_n &= (-1)^n \frac{|b|^n}{n(n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} (a_0 - T_L). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Substituímos esses coeficientes em (2.10) e obtemos

$$T(t) = a_0 - |b|(a_0 - T_L)t + \frac{|b|^2}{2}(a_0 - T_L)t^2 - \frac{|b|^3}{6}(a_0 - T_L)t^3 + \dots \quad (2.18)$$

A evolução da temperatura está determinada a menos do coeficiente a_0 . Para resolver esse problema substituímos $t = 0$ em (2.18) e obtemos

$$T_0 = a_0. \quad (2.19)$$

Logo, podemos descrever a evolução da temperatura na forma

$$T(t) = T_0 - |b|(T_0 - T_L)t + \frac{|b|^2}{2}(T_0 - T_L)t^2 - \frac{|b|^3}{6}(T_0 - T_L)t^3 + \dots, \quad (2.20)$$

ou, ainda, na forma

$$T(t) - T_L = (T_0 - T_L) \left(1 - |b|t + \frac{|b|^2}{2}t^2 - \frac{|b|^3}{6}t^3 + \dots \right). \quad (2.21)$$

Notamos que a série alternada que aparece entre parênteses, no lado direito da equação (2.21), corresponde à expansão em séries da potência e^x , onde $x = -|b|t$. Concluimos, assim, que a evolução temporal da temperatura é descrita pela função exponencial:

$$T - T_L = (T_0 - T_L) e^{-|b|t}, \quad (2.22)$$

onde o parâmetro $|b|$ corresponde a uma constante de resfriamento do sistema.

De acordo com a equação (2.9), a taxa de variação da temperatura da água em um dado instante é linearmente proporcional à diferença entre sua temperatura, nesse mesmo instante, e a temperatura ambiente. Esta característica indica que a temperatura futura do volume de água considerado depende de sua temperatura presente. De fato, podemos definir $n = t/\Delta t$ e relacionar a temperatura no instante posterior, T_{n+1} , com a temperatura no instante atual, T_n , como mostrado no diagrama da Figura 10.

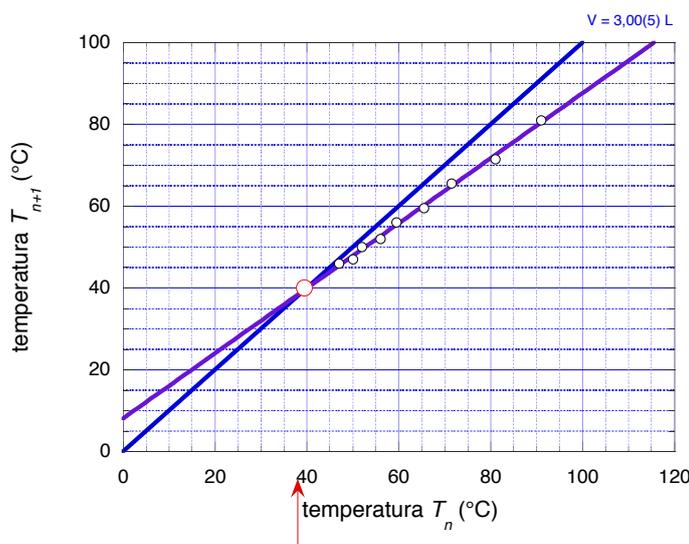


Figura 10. – Gráfico referente ao método de Lémery-Ford-Walford. Relação entre a temperatura no instante posterior (T_{n+1}) com a temperatura no instante atual (T_n), onde n é definido por $n = t/\Delta t$. Podemos descrever duas retas: uma com coeficiente angular igual a unidade e outra com coeficiente angular menor que a unidade, correspondente aos dados experimentais. O encontro das duas retas nos indica uma temperatura limite ($T_L = 39(1)^\circ\text{C}$).

Para determinar a função $T(t)$ que descreve a evolução da temperatura da água no seu processo de resfriamento, aplicamos o método de Lémery-Ford-Walford (LÉMERAY, 1897; FORD, 1933; WALFORD, 1946). Do diagrama representado na Figura 10, construímos duas retas: uma com coeficiente angular igual a um e a outra com coeficiente angular q menor que um, correspondente aos dados experimentais. Podemos notar que o cruzamento das retas indica que a evolução temporal da temperatura no instante futuro fica cada vez mais próxima da temperatura no instante atual. Podemos assim afirmar que a temperatura do sistema alcança uma temperatura limite $T_L = 39(1)^\circ\text{C}$ definida pelo cruzamento das duas retas.

Da reta correspondente aos dados experimentais, ilustrada no diagrama representado na Figura 10, podemos calcular seu coeficiente angular q e a sua incerteza δq de maneira similar ao procedimento empregado na página 14 para a determinação do parâmetro b

(equação (2.7)). Primeiro determinamos q_{\max} , o maior valor possível para q :

$$q_{\max} = \frac{88 - 38}{99 - 38} = 0,81. \quad (2.23)$$

Em seguida, determinamos q_{\min} , o menor valor possível para q :

$$q_{\min} = \frac{86 - 40}{101 - 40} = 0,75. \quad (2.24)$$

Estabelecemos o valor de q como a média aritmética entre q_{\max} e q_{\min} :

$$q = \frac{q_{\max} + q_{\min}}{2} = 0,78 \quad (2.25)$$

Para determinar a incerteza δq usamos o seguinte cálculo:

$$\delta q = \frac{q_{\max} - q_{\min}}{2} = 0,03. \quad (2.26)$$

Logo, o valor de q corresponde a $q = 0,78(3)$.

Para relacionar algebricamente a temperatura no instante futuro (T_{n+1}) com a temperatura no instante presente (T_n) podemos escrever a equação da reta de coeficiente angular q na seguinte forma:

$$q = \frac{T_{n+1} - T_L}{T_n - T_L}. \quad (2.27)$$

Fazemos a mudança de variável $T_n - T_L = \theta_n$ em (2.27) e obtemos a expressão

$$\theta_{n+1} = q\theta_n. \quad (2.28)$$

A partir da equação (2.28) podemos também relacionar a temperatura θ_n no instante de tempo n com a temperatura inicial θ_0 . Notamos que, para $n = 0$, temos

$$\theta_1 = q\theta_0. \quad (2.29)$$

Para $n = 1$, temos

$$\theta_2 = q\theta_1 = q^2\theta_0. \quad (2.30)$$

Para $n = 2$, temos

$$\theta_3 = q\theta_2 = q^3\theta_0. \quad (2.31)$$

Para $n = 3$, temos

$$\theta_4 = q\theta_3 = q^4\theta_0. \quad (2.32)$$

Podemos concluir que

$$\theta_n = \theta_0 q^n. \quad (2.33)$$

Podemos escrever q^n na forma

$$q^n = e^{\ln q^n} = e^{n \ln q}. \quad (2.34)$$

Lembramos também que $n = t/\Delta t$. Desse modo, (2.34) assume a forma

$$q^n = e^{-|\ln q(t/\Delta t)|}, \quad (2.35)$$

onde $\ln q < 0$. Definimos a constante λ pela expressão

$$\lambda = \left| \frac{\ln q}{\Delta t} \right| \quad (2.36)$$

e, ao substituir (2.36) na (2.35), e o resultado obtido em (2.33), concluímos que

$$\theta_n = \theta_0 e^{-\lambda t}. \quad (2.37)$$

Portanto, ao substituir (2.37) em (2.28), concluímos que

$$T - T_L = (T_0 - T_L) e^{-\lambda t}. \quad (2.38)$$

Observamos que o sistema se resfria de forma exponencial e o parâmetro λ corresponde a uma constante de resfriamento do sistema, resultado similar a (2.22).

A partir do valor de q determinado em (2.25) e sabendo que $\Delta t = 10,00(2)$ min, calculamos com o auxílio da equação (2.36) o valor λ para o volume $V = 3,00(5)$ L.

Dos valores experimentais determinamos λ e sua incerteza $\delta\lambda$ da seguinte maneira. Primeiro determinamos λ_{\max} , o maior valor possível para λ :

$$\lambda_{\max} = \left| \frac{\ln(q_{\max})}{\Delta t_{\min}} \right| = 0,028 / \text{min}, \quad (2.39)$$

onde $\Delta t_{\min} = 9,98$ min. Em seguida determinamos λ_{\min} , o menor valor possível para λ :

$$\lambda_{\min} = \left| \frac{\ln(q_{\min})}{\Delta t_{\max}} \right| = 0,021 / \text{min}, \quad (2.40)$$

onde $\Delta t_{\max} = 10,02$ min. Estabelecemos o valor de λ como a média aritmética entre λ_{\max} e λ_{\min} :

$$\lambda = \frac{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}{2} = 0,025 / \text{min}. \quad (2.41)$$

Para determinar a incerteza $\delta\lambda$ usamos o seguinte cálculo:

$$\delta\lambda = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{2} = 0,004 / \text{min}. \quad (2.42)$$

Logo o valor de λ para $V = 3,00(5)$ L corresponde a $\lambda = 0,025(4) / \text{min}$. Esse resultado é menos preciso que o encontrado para o valor de $|b| = 0,023(3) / \text{min}$ determinado anteriormente.

Observamos de (2.38) alguns instantes de tempo característicos. Para o instante de $t = \tau = 1/\lambda$ a variação de temperatura corresponde a $T - T_L = (T_0 - T_L) / e$. Portanto, nesse instante, a variação de temperatura corresponde a cerca de um terço do seu valor total.

Do valor experimental de λ determinamos o valor de τ e sua incerteza $\delta\tau$ da seguinte maneira. Primeiro determinamos τ_{\max} , o maior valor possível para τ :

$$\tau_{\max} = \frac{1}{\lambda_{\min}} = 48 \text{ min}, \quad (2.43)$$

Em seguida determinamos τ_{\min} , o menor valor possível para τ :

$$\tau_{\min} = \frac{1}{\lambda_{\max}} = 36 \text{ min}, \quad (2.44)$$

Estabelecemos o valor de τ como a média aritmética entre τ_{\max} e τ_{\min} :

$$\tau = \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2} = 42 \text{ min}. \quad (2.45)$$

Para determinar a incerteza $\delta\tau$ usamos o seguinte calculo:

$$\delta\tau = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2} = 6 \text{ min}. \quad (2.46)$$

Logo, o valor de τ para $V = 3,00(5) \text{ L}$ corresponde a $\tau = 42(6) \text{ min}$.

Observamos ainda de (2.38) que para $t = T_{1/2}$ a variação da temperatura corresponde a $T - T_L = (T_0 - T_L) / 2$. Desse modo, $T_{1/2} = \tau \ln(2)$ e o valor de $T_{1/2}$, para $V = 3,00(5) \text{ L}$, corresponde a $T_{1/2} = 28(4) \text{ min}$. Indicamos na Figura 11 esses dois instantes de tempo característicos.

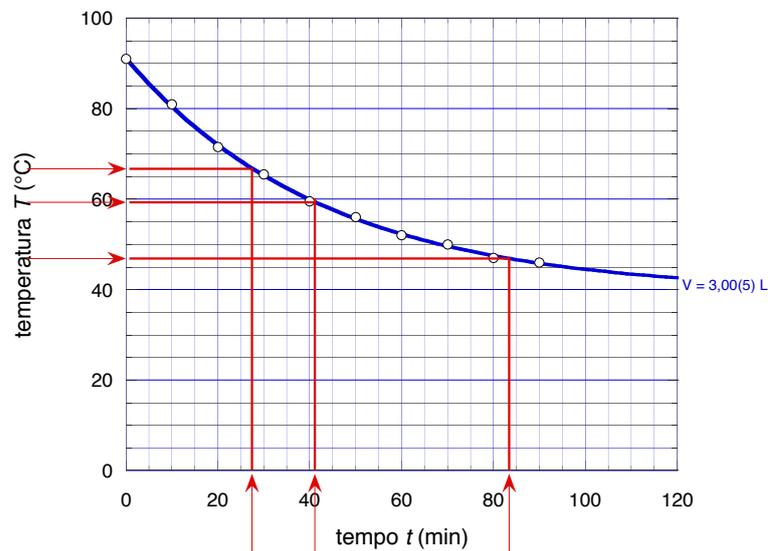


Figura 11. – Gráfico referente a expressão do resfriamento da água determinada por (2.38). Observamos que para $t = T_{1/2} = 28(4) \text{ min}$ temos $T - T_L = (T_0 - T_L) / 2$. Para $t = \tau = 1/\lambda = 42(6) \text{ min}$ a variação da temperatura corresponde $T - T_L \approx (T_0 - T_L) / 3$. E para $t = 2\tau = 2/\lambda = 84(12) \text{ min}$ temos $T - T_L \approx (T_0 - T_L) / 9$.

Indicamos ainda na Figura 11 que para $t = 2\tau = 2/\lambda = 84(12) \text{ min}$ temos $T - T_L \approx (T_0 - T_L) / 9$. Desse modo, nesse instante, a variação de temperatura corresponde a cerca de um nono do seu valor total.

A partir da equação (2.38), podemos descrever o tempo em função da temperatura do volume considerado:

$$t = -\frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{T - T_L}{T_0 - T_L} \right). \quad (2.47)$$

Podemos então denominar a equação (2.47) como equação do relógio natural.

2.2.2 Resfriamento da água para diferentes volumes

Repetimos o procedimento descrito na Seção 2.2.1 para volumes de água distintos $V = 1,50(5) \text{ L}$, $0,75(5) \text{ L}$, $0,40(5) \text{ L}$, $0,30(5) \text{ L}$ e $0,20(5) \text{ L}$, e organizamos os resultados obtidos na Tabela 2.

Tabela 2. – Temperatura T da água vs. instante de tempo t para volumes de água $V = 1,50(5) \text{ L}$, $0,75(5) \text{ L}$, $0,40(5) \text{ L}$, $0,30(5) \text{ L}$ e $0,20(5) \text{ L}$.

		$V = 1,50(5) \text{ L}$	$V = 0,75(5) \text{ L}$	$V = 0,40(5) \text{ L}$	$V = 0,30(5) \text{ L}$	$V = 0,20(5) \text{ L}$
n	$t_n(\text{min})$	$T_n(^{\circ}\text{C})$	$T_n(^{\circ}\text{C})$	$T_n(^{\circ}\text{C})$	$T_n(^{\circ}\text{C})$	$T_n(^{\circ}\text{C})$
0	0,00(2)	97,0(5)	91,0(5)	90,0(5)	90,0(5)	90,0(5)
1	10,00(2)	78,0(5)	72,0(5)	67,0(5)	62,0(5)	60,0(5)
2	20,00(2)	67,0(5)	59,0(5)	51,5(5)	50,0(5)	45,5(5)
3	30,00(2)	59,0(5)	50,5(5)	43,5(5)	41,0(5)	39,0(5)
4	40,00(2)	52,0(5)	44,5(5)	39,5(5)	38,0(5)	36,5(5)
5	50,00(2)	47,0(5)	40,0(5)	38,0(5)	35,5(5)	35,0(5)
6	60,00(2)	43,5(5)	37,0(5)	35,5(5)	35,0(5)	34,5(5)
7	70,00(2)	41,0(5)	35,0(5)	35,0(5)	34,5(5)	34,0(5)
8	80,00(2)	39,5(5)	34,0(5)	34,5(5)	34,0(5)	33,5(5)
9	90,00(2)	38,5(5)	32,5(5)	34,0(5)	33,5(5)	33,0(5)

Analisamos os dados da Tabela 2 com o auxílio do método de Lémeray-Ford-Walford e notamos que todos os volumes considerados obedecem o mesmo padrão de resfriamento descrito na Seção 2.2.1, mas com constante de resfriamento diferentes, como indicado na Tabela 3.

Tabela 3. – Constante de resfriamento λ para diferentes comprimentos característicos $R(\text{cm})$ dos volumes de água usados na atividade.

volume de água $V(\text{L})$	constante de resfriamento $\lambda(\text{min}^{-1})$	comprimento característico $R(\text{cm})$
3,00(5)	0,025(4)	8,94(1)
1,50(5)	0,033(4)	7,10(1)
0,75(5)	0,037(8)	5,63(1)
0,40(5)	0,056(5)	4,57(1)
0,30(5)	0,065(4)	4,15(1)
0,20(5)	0,076(4)	3,63(1)

Observamos da Tabela 3 que quanto maior o volume de água, menor é o valor da constante de resfriamento λ . Para investigar esse comportamento, definimos um comprimento característico (R) considerando que cada volume corresponde a uma esfera de raio R . Esse comportamento está ilustrado no gráfico da Figura 12.

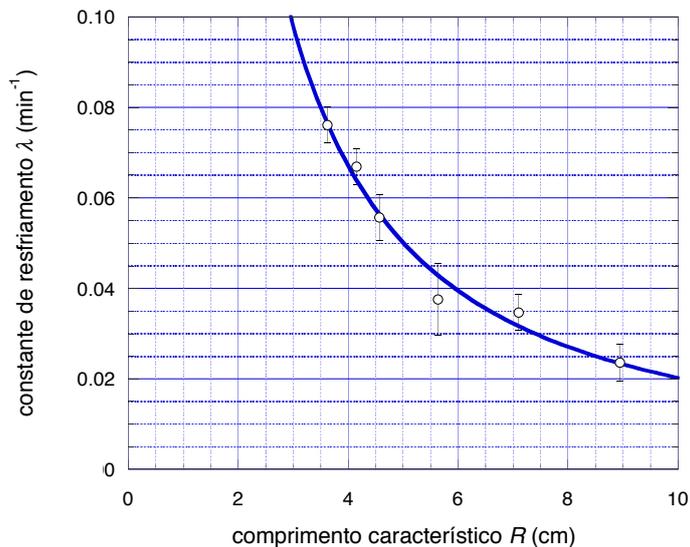


Figura 12. – Comparação entre a constante de resfriamento (λ) e o comprimento característico (R). A linha contínua representa uma função que relaciona a constante de resfriamento com o comprimento característico. Quanto maior o comprimento característico R , mais lentamente ocorre o resfriamento.

A linha contínua do gráfico da Figura 12 representa uma função que relaciona a constante λ de resfriamento com o comprimento característico R . Quanto maior o comprimento característico, mais lentamente ocorre o resfriamento. Para determinar essa função construímos o gráfico da Figura 13 que representa o produto do comprimento característico pela constante de resfriamento ($R\lambda$) em função do comprimento característico R .

Notamos do gráfico da Figura 13 que o produto do comprimento característico pela constante de resfriamento ($R\lambda$) é uma constante dentro da margem de incerteza. Se multiplicarmos o comprimento característico R pela constante de resfriamento λ geramos um valor que independe do volume de água V usado no experimento:

$$R\lambda = a, \quad (2.48)$$

onde $a = 0,25 \text{ cm min}^{-1}$. Esse resultado nos indica que o comprimento característico R é inversamente proporcional à constante de resfriamento λ . Desse modo, conhecendo-se o comprimento característico de um dado volume de água podemos, a partir da (2.48), estimar a constante de resfriamento λ correspondente para esse mesmo volume.

Como um exemplo, discutimos o resfriamento de um volume de água esférico e com o raio da esfera igual ao raio da Terra (R_{Terra}). Usamos a equação (2.47) para determinar

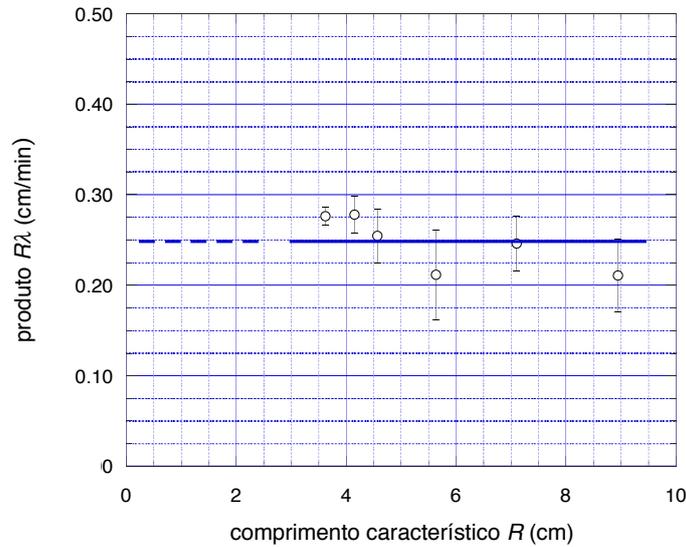


Figura 13. – Gráfico que representa o produto do comprimento característico pela constante de resfriamento ($R\lambda$) em função do comprimento característico (R). A reta paralela ao eixo da abscissa representa um valor médio dos diferentes produtos para cada comprimento característico considerado.

o intervalo de tempo para essa esfera resfriar de $T_0 = 100^\circ\text{C}$ para $T = 25^\circ\text{C}$ com a temperatura limite de $T_L = 0^\circ\text{C}$. Essa esfera teria o volume da Terra e seria apenas composta por água no estado líquido.

Consideramos o raio da Terra

$$R_{\text{Terra}} \approx 6,5 \cdot 10^8 \text{ cm.} \quad (2.49)$$

Da (2.48) sabemos que

$$(R\lambda)_{\text{Terra}} = 0,25 \text{ cm min}^{-1}. \quad (2.50)$$

Portanto, a constante de resfriamento λ_{Terra} para esse volume corresponde a

$$\lambda_{\text{Terra}} = 3,84 \cdot 10^{-10} \text{ min}^{-1}. \quad (2.51)$$

Substituímos na (2.47) os valores de T , T_0 , T_L e λ_{Terra} e obtemos

$$\begin{aligned} t &= -\frac{1}{\lambda_{\text{Terra}}} \ln\left(\frac{T - T_L}{T_0 - T_L}\right) \\ &= -\frac{1}{3,84 \cdot 10^{-10} \text{ min}^{-1}} \ln\left(\frac{25^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C}}{100^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C}}\right) \\ &= -\frac{1}{3,84 \cdot 10^{-10} \text{ min}^{-1}} \ln\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= 3,64 \cdot 10^9 \text{ min.} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Concluimos então que o tempo necessário para resfriar uma quantidade de água de volume igual ao da Terra, de 100 °C até 25 °C, corresponde a um intervalo de tempo $t \approx 7000$ anos.

3 Um modelo matemático para o resfriamento da água

Neste capítulo construímos um modelo matemático que descreve o comportamento da constante de resfriamento λ em relação aos parâmetros físicos da água e do ambiente que a circunda, como discutido no livro de Ozisik (1985, p. 17).

Consideramos o volume que contém o líquido na forma cilíndrica, já que o bécquer apresenta essa geometria. e está inicialmente a uma temperatura uniforme e igual à T_0 . Para os instantes $t \geq 0$, o calor começa a ser transferido da água para o meio ambiente em um processo natural de resfriamento. Esse calor dissipado através da superfície da água para o meio com temperatura uniforme T_L apresenta um coeficiente de transferência de calor h e a superfície de contato em que ocorre a transferência de calor tem área total A_T .

A aplicação da equação do balanço de energia, para este problema particular, corresponde a:

$$mc_p \frac{\Delta T}{\Delta t} = -A_T h (T - T_L), \quad (3.1)$$

onde m corresponde a massa de água, c_p corresponde ao calor específico da água a pressão constante, ΔT corresponde a variação de temperatura da água entre os instantes t e $t + \Delta t$, e Δt corresponde a variação temporal entre esses dois instantes.

Realizamos a mudança de variável $\theta = T - T_L$ e definimos

$$\lambda = \frac{A_T h}{mc_p}. \quad (3.2)$$

Desse modo, a equação (3.1) pode ser reescrita na forma

$$\frac{\Delta \theta}{\Delta t} + \lambda \theta = 0, \quad (3.3)$$

com a condição inicial $\theta(0) = T_0 - T_L = \theta_0$.

Podemos procurar a solução de (3.3) dividindo o intervalo de tempo t em N partes tais que $\Delta t = t/N$. Desse modo, podemos reescrever (3.3) na forma

$$\frac{\theta_{n+1} - \theta_n}{\Delta t} = -\frac{\lambda}{2} (\theta_{n+1} + \theta_n), \quad (3.4)$$

onde $n = 0, 1, 2, 3, \dots, (N - 1)$. Solucionamos (3.4) para os diferentes valores de n . Para $n = 0$ temos

$$\theta_1 = \theta_0 \frac{1 - \lambda \Delta t / 2}{1 + \lambda \Delta t / 2}. \quad (3.5)$$

Para $n = 1$, e usando (3.5), obtemos

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \theta_1 \frac{1 - \lambda \Delta t / 2}{1 + \lambda \Delta t / 2} \\ &= \theta_0 \left(\frac{1 - \lambda \Delta t / 2}{1 + \lambda \Delta t / 2} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Para $n = 2$, e usando (3.6), obtemos

$$\begin{aligned}\theta_3 &= \theta_2 \frac{1 - \lambda\Delta t/2}{1 + \lambda\Delta t/2} \\ &= \theta_0 \left(\frac{1 - \lambda\Delta t/2}{1 + \lambda\Delta t/2} \right)^3.\end{aligned}\tag{3.7}$$

E, para $n = N - 1$, concluímos que

$$\begin{aligned}\theta_N &= \theta_{N-1} \frac{1 - \lambda\Delta t/2}{1 + \lambda\Delta t/2} \\ &= \theta_0 \left(\frac{1 - \lambda\Delta t/2}{1 + \lambda\Delta t/2} \right)^N.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Observamos que se o número de partes N é muito elevado, o valor de Δt é muito pequeno e podemos escrever que

$$\frac{\theta_N}{\theta_0} = \left(\frac{1}{1 + \lambda\Delta t/2} \right)^{2N}\tag{3.9}$$

ou, ainda, que

$$\begin{aligned}\left(\frac{\theta_N}{\theta_0} \right)^{1/\lambda t} &= \left(\frac{1}{1 + \lambda t/2N} \right)^{2N/\lambda t} \\ &= \frac{1}{(1 + 1/y)^y}\end{aligned}\tag{3.10}$$

onde $y = 2N/\lambda t$. No limite em que N vai para infinito, $y \rightarrow \infty$, e a expressão do lado direito de (3.10) corresponde a

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^y = e,\tag{3.11}$$

o número de Napier (MAOR, 2009). Seu valor corresponde a $e = 2,7182\dots$. Desse modo, a solução de (3.3) é da forma

$$\theta = \theta_0 e^{-\lambda t}.\tag{3.12}$$

Fazemos a mudança de variável $\theta = T - T_L$ em (3.12) e obtemos a função que descreve evolução temporal da temperatura T do líquido:

$$T - T_L = (T_0 - T_L) e^{-\lambda t}.\tag{3.13}$$

Concluímos que a temperatura decresce da maneira exponencial com uma constante de resfriamento λ .

Com o auxílio da equação (3.2), calculamos o coeficiente de transferência de calor h para cada volume empregado no Capítulo 2. Para realizar essa tarefa, precisamos determinar a área total A_T correspondente para cada volume de água considerado, como indicado na Tabela 4.

Tabela 4. – Área total A_T para cada volume de água V empregados na atividade.

volume de água V (L)	raio da base R_B (cm)	altura L (cm)	área A_T (m ²)
3,00(5)	8,00(5)	16,90(5)	0,125(2)
1,50(5)	8,00(5)	8,60(5)	0,083(2)
0,75(5)	8,00(5)	4,40(5)	0,062(2)
0,40(5)	4,25(5)	8,20(5)	0,033(1)
0,30(5)	4,25(5)	6,10(5)	0,028(2)
0,20(5)	4,25(5)	4,00(5)	0,022(1)

Do valor de $\lambda = 0,025(4) \text{ min}^{-1}$ encontrado no Capítulo 2, sabendo $A_T = 0,125(2) \text{ m}^2$, $m = 3,00(5) \text{ kg}$ para o volume $V = 3,00(5) \text{ L}$ e utilizando $c_p \approx 4200 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$, encontrado no livro Ozisik (1985), calculamos o valor de h .

Primeiro determinamos h_{\max} , o maior valor possível para h :

$$h_{\max} = \frac{\lambda_{\max} m_{\max} c_p}{A_{T\min}} = 52,0 \text{ W/m}^2\text{C}; \quad (3.14)$$

onde $A_{T\min} = 0,119 \text{ m}^2$ e $m_{\max} = 3,05 \text{ kg}$. Em seguida determinamos h_{\min} , o menor valor possível para h :

$$h_{\min} = \frac{\lambda_{\min} m_{\min} c_p}{A_{T\max}} = 33,1 \text{ W/m}^2\text{C}; \quad (3.15)$$

onde $A_{T\max} = 0,131 \text{ m}^2$ e $m_{\min} = 2,95 \text{ kg}$. Estabelecemos o valor de h como a média aritmética entre h_{\max} e h_{\min} :

$$h = \frac{h_{\max} + h_{\min}}{2} = 42,7 \text{ W/m}^2\text{C}. \quad (3.16)$$

Para determinar a incerteza δh usamos o seguinte calculo:

$$\delta h = \frac{h_{\max} - h_{\min}}{2} = 9 \text{ W/m}^2\text{C}; \quad (3.17)$$

Logo o valor de h para $V = 3,00(5) \text{ L}$ corresponde a $h = 43(9) \text{ W/m}^2\text{C}$.

Utilizamos o mesmo método para calcular o coeficiente de transferência de calor h para cada volume empregado no Capítulo 2. Organizamos os dados obtidos na Tabela 5.

Podemos observar que o coeficiente de transferência de calor h não variou dentro da margem de incerteza calculada. Sendo assim, podemos estimar um valor médio para h denominado de coeficiente de transferência de calor médio $h_{\text{médio}} \approx 43 \text{ W/m}^2\text{C}$. Esse valor encontrado para o coeficiente de transferência de calor h é compatível com o valor tabelado $h = 50 \text{ W/m}^2\text{C}$ (BIRD; STEWART; LIGHTFOOT, 2002, p. 425).

Porém, conforme discutido por Poirier (2017) o modelo por nós adotado para descrever o resfriamento dos volume de água considerados só é adequado se a temperatura do volume de água for assumida como uniforme, ou seja, se a diferença de temperatura entre o centro do volume e a sua superfície for inferior a cinco por cento.

Tabela 5. – Constantes de resfriamento previstas pelo método L meray-Ford-Walford e coeficiente de transferência de calor, para os volumes de  gua V empregados na atividade.

volume de �gua V (L)	constante do experimento $\lambda(\text{min}^{-1})$	coeficiente de transferência $h(\text{W}/\text{m}^2\text{�C})$
3,00(5)	0,025(4)	42(9)
1,50(5)	0,033(4)	42(8)
0,75(5)	0,037(8)	32(9)
0,40(5)	0,056(5)	47(8)
0,30(5)	0,065(4)	49(8)
0,20(5)	0,076(4)	48(9)

Para nosso experimento essa característica do sistema pode ser revelada calculando-se o número de Biot (Bi) (BIRD; STEWART; LIGHTFOOT, 2002, p. 307). Esse número, adimensional, é dado por $\text{Bi} = hR/k$, onde k é o coeficiente de condutividade térmica da água, h   o coeficiente de transferência de calor entre o ar e a água e R   o comprimento característico do volume de água considerado. O número de Biot $\text{Bi} < 0,1$   a condi o para que o nosso modelo seja adequado. Ou seja, se $\text{Bi} < 0,1$ podemos concluir que a temperatura da água em nosso experimento é em boa aproxima o uniforme em todo o volume.

Sabemos que o coeficiente de condutividade térmica da água no estado líquido   $k = 0,7 \text{ W m}^{-1} \text{  C}^{-1}$ (BIRD; STEWART; LIGHTFOOT, 2002, p. 270); o coeficiente de transferência de calor médio   $h_{\text{médio}} \approx 43 \text{ W}/\text{m}^2\text{ C}$; e o valor de comprimento característico está entre 0,09 m e 0,05 m para o nosso experimento. Podemos assim, estabelecer o número de Biot para o nosso sistema entre 5,4 e 2,7.

Esses valores calculados do número de Biot nos mostra que apesar dos volumes de água não terem uma distribui o uniforme, as previsões do modelo foram compatíveis com o experimento. Entretanto, a estimativa para o resfriamento do volume de água com raio igual ao raio terrestre deve considerar um volume de água com uma distribui o de temperatura não uniforme.

4 Considerações finais

Esse trabalho tem por objetivo apresentar uma alternativa à aula tradicional para ensinar o estudo dos fenômenos de transporte no ensino básico, realizando um estudo do processo de resfriamento de um volume de água. A atividade proposta envolve a aquisição dos dados referentes à temperatura da água em função do instante de tempo durante seu resfriamento, a sua representação gráfica e, a partir desses gráficos, a análise geométrica e algébrica dos resultados obtidos.

Acreditamos que a utilização das ferramentas gráficas e algébricas na atividade discutida nesse trabalho é de extrema importância para a formação do aluno. Ela oferece condições para que os alunos desenvolvam suas habilidades e competências para representar relações algébricas entre os parâmetros físicos considerados no problema proposto.

Durante a atividade feita em aula procuramos oferecer aos alunos as condições para que eles participem do experimento, medindo a temperatura nos instantes de tempo, procurando estabelecer relações algébricas entre essas grandezas com auxílio de diferentes representações gráficas, e cheguem a uma conclusão. Sugerimos que o planejamento da aula considere que os alunos já tenham trabalhado previamente alguns conceitos termodinâmicos e também as propriedades da função exponencial e logarítmica.

Apresentamos também, nesse trabalho, um modelo matemático do resfriamento da água para auxiliar o professor na condução das atividades com os alunos. Com o auxílio do modelo apresentado, discutimos também os limites de uma representação matemática de um fenômeno físico. Esse modelo nos mostrou que o experimento proposto pode ser utilizado como um relógio natural desde de que o volume de água considerado seja inferior a $V \approx 3,5$ L.

Com as sequências apresentadas em nosso trabalho, podemos realizar a construção do relógio natural a partir do resfriamento da água: conhecendo-se o resfriamento realizado pelo volume de água podemos determinar o intervalo de tempo correspondente para que esse resfriamento ocorra.

Ao realizar a atividade proposta nesse trabalho esperamos oferecer ao aluno uma oportunidade para ele notar que a medida do fluir do tempo não se limita a observar o movimento dos ponteiros de um relógio. Esperamos que o aluno compreenda que essas medidas exigiram a observação e o desenvolvimento, ao longo de nossa História, de procedimentos físicos e matemáticos para a sua caracterização.

Ao trabalhar o conceito de relógio natural, também procuramos oferecer ao aluno uma oportunidade para ele aprender como se portar diante de um novo problema: saber observar o fenômeno, representá-lo, analisá-lo e chegar de maneira objetiva em uma conclusão.

Referências

- BIRD, R. B.; STEWART, W. E.; LIGHTFOOT, E. N. *Transport Phenomena*. 2. ed. New York: Wiley, 2002.
- FORD, E. An account of the herring investigations conducted at plymouth during the years from 1924 to 1933. *Journal of the Marine Biological Association of the United Kingdom*, v. 19, n. 1, p. 305–384, 1933.
- LÉMERAY, E.-M. Sur la convergence des substitutions uniformes. *Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale*, v. 16, p. 306–319, 1897.
- LOCKWOOD, E. H. *A book of curves*. Cambridge: Cambridge University Press, 1961.
- MAOR, E. *"e": The story of a number*. Princeton: Princeton University Press, 2009.
- MELO, V. B. de. *Uso do resfriamento da água como um relógio natural*. Tese (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, julho 2024.
- OZISIK, M. N. *Heat transfer: a basic approach*. New York: McGraw-Hill, 1985.
- POIRIER, J.-P. About the age of the earth. *Comptes Rendus. Géoscience*, v. 349, n. 5, p. 223–225, 2017.
- WALFORD, L. A. A new graphic method of describing the growth of animals. *The Biological Bulletin*, v. 90, n. 2, p. 141–147, 1946.

A Roteiro de aula

Este apêndice consiste em um material de apoio para a aplicação da atividade e é direcionado ao professor. Esse roteiro descreve o conteúdo a ser trabalhado, os objetivos, as estratégias, os materiais utilizados, a duração das aulas e a avaliação dos alunos.

A.1 Tema

O resfriamento da água como instrumento de construção de um relógio natural.

A.2 Conteúdo

Noções básicas de termodinâmica:

- Conceito de temperatura;
- Conceito de transporte de energia térmica (calor).

Noções básicas de cinemática (tempo).

A.3 Objetivo

Esperamos que os alunos sejam capazes de:

- Compreender os conceitos de temperatura, calor e tempo;
- Compreender o processo de modelagem matemática de fenômeno físico.

A.4 Desenvolvimento

A proposta da aula é encontrar uma função matemática que seja compatível com os dados experimentais da temperatura em função do tempo e construir um relógio natural a partir da mesma função. O ponto de partida dessa proposta é discutir conceitos termodinâmicos e relacioná-los com a evolução temporal do resfriamento da água para que possamos chegar em uma função que consiga descrever esse fenômeno. Por fim, construir um relógio natural a partir da função encontrada. Os conceitos termodinâmicos devem ter sido discutidos previamente. Antes de realizar o experimento o professor, deve mostrar o material que será utilizado e ressaltar os cuidados que se deve ser observados dentro do ambiente de laboratório. Então, inicia-se a experimentação e a coleta de dados. Em seguida, os alunos devem começar a responder o relatório.

A.5 Recursos didáticos

Para a realização da atividade é necessário apenas o roteiro disponibilizado para o aluno. O material utilizado na experimentação foi citado no Capítulo 2 desse trabalho. Esta atividade deve ser realizada presencialmente. Utilizamos para a construção dos gráficos papel milimetrado.

A.6 Duração

A atividade foi planejada para possuir duração mínima de três tempos de aula (120 minutos), mas pode ser facilmente adaptada para ser realizada em diversas aulas, dependendo dos recursos e tempo disponível do professor.

A.7 Avaliação

A avaliação deve ser realizada a partir da observação do envolvimento de cada aluno nas atividades desenvolvidas e a partir da análise do questionário citado no item A.8 de cada grupo, disponibilizado ao final da atividade.

A.8 Material auxiliar para o aluno

ALUNO (A): _____ nº _____	AVALIAÇÃO
TURMA: _____ DATA: __/__/2023	
	Prof. _____ <small>RUBRICA</small>

EXPERIÊNCIA: O resfriamento da água em condições ambientes

Objetivo:

Interpretar matematicamente o fenômeno do resfriamento da água.

Material:

Béquer, volume de água, aquecedor, termômetro, cronômetro, garras e pegadores.

Procedimento experimental:

- 1- Anote a temperatura ambiente e o volume de água pré-definido
- 2- Observe o equipamento experimental montado pelo professor/técnico
- 3- Observe o aumento da temperatura da água durante o aquecimento
- 4- Após a retirada do aquecedor anote a temperatura e ligue o cronômetro no celular
- 5- Complete a tabela abaixo de acordo com orientações do professor/técnico:

Temperatura ambiente: _____

Volume de água: _____

Tempo (min) ± 0,02min	Temperatura (°C) ± 0,5°C
0,00	
10,00	
20,00	
30,00	
40,00	
50,00	
60,00	

Análise:

1) Na folha de papel milimetrado construa um gráfico que descreva a temperatura em função do tempo de resfriamento.

Responda:

Qual seria a função matemática para descrever o fenômeno do resfriamento da água escolhida por você? Justifique.

2) Agora vamos construir um diagrama que relaciona T_{n+1} com T_n na outra folha de papel milimetrado.

3) Vamos calcular o coeficiente angular da reta no diagrama.

4) Escreva matematicamente a função que relaciona a temperatura com o instante de tempo encontrada pelo método do diagrama do item 2.

5) Como você pode representar o tempo em função da temperatura a partir do resultado encontrado no item 4?

6) Apresente oralmente na sala de aula seus resultados utilizando como cronômetro para apresentação o resfriamento da água.