



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física

Vendo nas Entrelinhas: o uso de linhas de campo no ensino de eletromagnetismo

Douglas Ferreira de Souza

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientadores:
Reinaldo Faria de Melo e Souza
Rodrigo Miranda Pereira

Rio de Janeiro
Dezembro de 2024

Vendo nas Entrelinhas: o uso de linhas de campo no ensino de eletromagnetismo

Douglas Ferreira de Souza

Orientadores:
Reinaldo Faria de Melo e Souza
Rodrigo Miranda Pereira

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Aprovada por:

Prof. Dr. Reinaldo Faria de Melo e Souza - UFF (Presidente - interno)

Prof. Dr. Rodrigo Miranda Pereira - UFF (externo)

Prof. Dr. Sérgio Eduardo Silva Duarte - CEFET (externo)

Prof. Dr. Ribamar Rondon de Rezende dos Reis - UFRJ (externo)

Prof. Dr. Carlos Eduardo Aguiar - UFRJ (interno)

Rio de Janeiro
Dezembro de 2024

FICHA CATALOGRÁFICA

D278v de Souza, Douglas Ferreira

Vendo nas Entrelinhas: o uso de linhas de campo no ensino de eletromagnetismo / Douglas Ferreira de Souza. – Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2024.

x, 163 f. : il. ; 30 cm.

Orientadores: Reinaldo Faria de Melo e Souza; Rodrigo Miranda Pereira.

Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Física / Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2024.

Referências Bibliográficas: f. 160-163.

1. Ensino de Física. 2. Linhas de campo. 3. Lei de Gauss. I. Melo e Souza, Reinaldo de. II. Pereira, Rodrigo Miranda. III. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física. IV. Vendo nas Entrelinhas: o uso de linhas de campo no ensino de eletromagnetismo.

Cada palavra dessa dissertação é dedicada aos melhores pais do mundo,
Dona Rose e Seu Jorge.

Agradecimentos

Ao meu orientador Reinaldo, por abrir as portas deste trabalho e por toda consideração demonstrada ao longo deste percurso. Sua disposição, palavras de incentivo e ensinamentos, sempre acompanhados de bom humor, foram indispensáveis para a realização desta dissertação.

Ao meu orientador Rodrigo, pela generosidade ao aceitar embarcar neste trabalho e pelo suporte total e constante oferecido desde então. Obrigado por sua paciência e pelas reuniões dedicadas, mesmo quando significaram sacrificar preciosos minutos do seu almoço.

A todos os meus professores do MPEF, por fazerem parte de minha formação como mestre. Em especial, ao professor Farina, pelas questões e pelas ideias brilhantes que enriqueceram este trabalho; à professora Penha, pelos e-mails trocados; e à professora Daniela, pelas dicas e sugestões de leitura.

Ao professor Carlos Aguiar, pelo apoio decisivo e pelas palavras de sabedoria sempre quando precisei. Obrigado pelas conversas enriquecedoras e pelos chás.

Aos colegas de mestrado, pelas trocas de experiências e pelas noites em claro resolvendo listas de exercícios.

Aos meus pais, Rose e Jorge, pelo apoio incondicional e pelo incentivo constante aos meus estudos. Obrigado por me permitirem chegar até aqui; sem vocês, nada disso seria possível.

Ao meu irmão, Davi, meu melhor amigo e minha dupla nos jogos online.

E à minha companheira, Suyani, por todo amparo, paciência e carinho durante essa jornada.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

RESUMO

Vendo nas Entrelinhas: o uso de linhas de campo no ensino de eletromagnetismo

Douglas Ferreira de Souza

Orientadores:

Reinaldo Faria de Melo e Souza

Rodrigo Miranda Pereira

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Nessa dissertação defendemos um uso sistemático de linhas de campo para a introdução do conceito de campo elétrico. Desenvolvemos um material didático, contendo atividades, sequências didáticas e peças que fizemos a partir de impressão 3D. O material foi aplicado em uma turma de ensino médio com boa reposta por parte dos estudantes. Mostramos que o conceito de linhas de campo aliado com o uso de simetrias permite que façamos aplicações elementares no ensino médio de aspectos mais avançados que não costumam ser apresentados em sala de aula, como a lei de Gauss e o método das imagens para a interação entre uma carga e um plano infinito condutor. Apresentamos ainda uma demonstração de que um universo finito deve ser neutro. Fazemos uma discussão detalhada de argumentos de simetria, incluindo simetria por escala e inversão de Kelvin. Mostramos que linhas de campo aliadas à lei de Gauss permitem demonstrar que um campo de uma carga em movimento retilíneo uniforme aponta para a posição instantânea da carga, e discutimos porque isso não representa nenhuma violação de causalidade.

Palavras chave: Ensino de Física, Linhas de campo, Lei de Gauss.

Rio de Janeiro
Dezembro de 2024

ABSTRACT

Reading Between the Lines: Using Field Lines in Electromagnetism Teaching

Douglas Ferreira de Souza

Supervisors:

Reinaldo Faria de Melo e Souza

Rodrigo Miranda Pereira

Abstract of master's thesis submitted to Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, in partial fulfillment of the requirements for the degree Mestre em Ensino de Física.

In this dissertation we advocate the systematic use of field lines to introduce the concept of electric fields. We developed a varied mix of didactic materials containing activities, didactic sequences and pieces made from 3D printing. The material was applied in a high school class with a good response from students. We showed that the concept of field lines combined with the use of symmetries allows one to make elementary applications of more advanced aspects in high school education, including themes which are not usually discussed in classroom, such as Gauss's law and the method of images for the interaction between a charge and an infinite conducting plane. We also present a demonstration that a finite universe must be neutral. A detailed discussion of symmetry arguments is given, including scale symmetry and Kelvin inversion. It is shown that the concept of field lines coupled with Gauss's law lead to the conclusion that a field from an electric charge in uniform rectilinear motion points to the instantaneous position of the charge, and we discuss why this does not represent any violation of causality.

Keywords: Physics Teaching, Field lines, Gauss's law.

Rio de Janeiro
Dezembro de 2024

Sumário

1	Introdução	1
2	Linhas de Campo	11
2.1	Definição e Vantagens Pedagógicas	11
2.2	Construção de Linhas de Campo em 3D	21
3	Simetrias	25
3.1	Transformações e Operações de Simetria	25
3.1.1	Operação de translação	26
3.1.2	Operação de rotação	26
3.1.3	Operação de reflexão	27
3.1.4	Operação de simetria	27
3.1.5	Lei de transformação para campos vetoriais	28
3.1.6	Lei de transformação para pseudovetores	30
3.2	O que as simetrias nos permitem inferir sobre campos elétricos e magnéticos	32
3.2.1	Análise das Simetrias dos campos gerados por um Fio Infinito Uniformemente Carregado	32
3.2.2	Análise das Simetrias dos Campos Gerado por um Fio Infinito percorrido por uma Corrente Uniforme	38
3.2.3	Monopolos magnéticos	40
3.3	Transformações de simetria não usuais	42
3.3.1	Simetria de escala	42
3.3.2	Simetria de inversão de Kelvin	45
3.4	Método das Imagens sem Mágica	49
3.4.1	Plano metálico infinito	50
3.5	Método das Imagens para uma Esfera metálica	55
4	Aplicações mais avançadas da Lei de Gauss	58
4.1	Neutralidade do Universo Finito	58
4.1.1	O Universo Limitado	59

4.1.2	Universo Limitado	60
4.2	Relação entre os ângulo de criação e destruição de linhas de campo	61
4.2.1	Solução para fios infinitos	62
4.2.2	Solução para cargas puntiformes	66
4.3	Campo de uma carga em movimento retilíneo e uniforme	69
5	Proposta de ensino a partir das Linhas de Campo	75
5.1	Aula 1: Boas-vindas à Física do invisível	76
5.2	Atividade 1: Boas-vindas à Física do invisível	78
5.3	Aula 2: O que é Carga Elétrica?	79
5.4	Atividade 2: Mapeando as Linhas de Campo	82
5.5	Atividade 3: Campo pra todo lado	84
6	Aplicação em sala de aula e Análise das respostas	88
6.1	Aula 1	88
6.2	Atividade 1	90
6.3	Aula 2	94
6.4	Atividade 2	96
6.5	Aula pós atividade 2	101
6.6	Atividade 3	104
6.7	Linhas de Campo no ENEM 2024	111
6.8	Conclusões e versão final do produto	112
7	Considerações Finais	114
A	Material Instrucional	116
A.1	Descrição do Material Instrucional	118
A.1.1	Atividade 1: Boas Vindas à Física do Invisível	118
A.1.2	Aula 1: Boas Vindas à Física do Invisível	119
A.1.3	Aula 2: O que é Carga Elétrica? A evolução do conceito ao longo do tempo	120
A.1.4	Atividade 2: Mapeando as Linhas de Campo	120
A.1.5	Atividade 3: Lendo as linhas (de campo) na palma da sua mão	122
A.2	Cargas 3D	126
A.2.1	Modelagem das Cargas no Fusion 360	127
A.2.2	Construindo um Dodecaedro	127
A.2.3	Construindo as Esferas	130
A.2.4	Processo de Impressão	132
A.2.5	Montagem e demais cuidados com a peça	134

A.3	Material do professor	137
A.3.1	Links para as apresentações em slides (Powerpoint/Apresentações Google)	137
A.3.2	Links para Impressão 3D	137
A.4	Material do aluno	138
Referências bibliográficas		150

Capítulo 1

Introdução

O eletromagnetismo é um dos pilares da ciência moderna, sendo essencial para a formação de cidadãos aptos a interagir criticamente com novas tecnologias e a compreender fenômenos naturais. Em uma era marcada pela desinformação — como a crença de que sinais de Wi-Fi e 5G podem causar câncer [1] — o estudo desse tema torna-se ainda mais crucial. Compreender o eletromagnetismo é entender o tecido de interações que sustentam tanto a tecnologia quanto a natureza ao nosso redor. No entanto, é amplamente reconhecido que o ensino do eletromagnetismo, em todos os níveis, enfrenta um obstáculo intrínseco: o alto grau de abstração de conceitos, como os de carga e campo, que se distanciam da experiência cotidiana, dificultando a assimilação pelos estudantes.

Conforme apontam Chabay e Sherwood [2], o estudo do eletromagnetismo marca, para muitos alunos, o primeiro contato com partículas microscópicas, como elétrons, e com quantidades abstratas, como fluxo e potencial. Além disso, é também a primeira vez que lhes é exigida a habilidade de pensar e visualizar problemas em três dimensões, compreender o papel dos argumentos de simetria na Física e, em níveis mais avançados, aplicar recursos mais complexos de cálculo integral. Esse desafio contrasta com a experiência da mecânica, na qual as situações geralmente envolvem objetos macroscópicos e termos familiares, como velocidade e atrito, o que facilitava a recepção inicial a esses conceitos.

Nesse contexto, as linhas de campo emergem como uma ferramenta promissora, capaz de traduzir abstrações complexas em conceitos visuais acessíveis, proporcionando uma intuição quase imediata sobre o comportamento dos campos elétricos. Veremos que, mais do que meras representações ilustrativas, as linhas de campo abrem novas perspectivas para a análise e o ensino, até mesmo em problemas mais avançados. Assim, nesta dissertação, exploramos o seu potencial pedagógico com o objetivo de tornar o ensino do eletromagnetismo mais envolvente e significativo para os estudantes. Começaremos com aplicações introdutórias voltadas para o uso em ensino médio, mas parte desta dissertação é mostrar que linhas de campo permanecem um expediente conceitual útil mesmo em situações mais avançadas. Por meio dessa abordagem, demonstraremos de forma simplificada o método das imagens, a neutralidade do universo finito e mostraremos que o vetor campo elétrico sempre aponta para a posição instantânea de uma carga puntiforme em movimento retilíneo e uniforme, contrariando a expectativa advinda do retardamento da interação eletromagnética.

As linhas de campo, introduzidas por Michael Faraday em meados do século XIX, nasceram de sua insatisfação com a noção de ação à distância, considerada por ele inadequada para explicar as forças elétricas e magnéticas. Faraday foi pioneiro ao questionar essa explicação, propondo que as interações eletromagnéticas exigiam um meio físico para transmitir a influência entre corpos [3]. Com base em observações experimentais, como o comportamento de limalhas de ferro próximas a ímãs, ele concebeu as chamadas ‘linhas de força’. Faraday, por meio de seus desenhos de linhas emanando de ímãs e condutores carregados, estabeleceu as bases para teorias mais robustas que viriam posteriormente, além de inaugurar uma nova perspectiva acerca da “ação a distância”.

James Clerk Maxwell foi um dos principais defensores — senão o principal — da ideia de linhas de força proposta por Faraday, utilizando-a como base para a formalização matemática do eletromagnetismo. Em suas próprias palavras, Maxwell afirma que

Faraday, em sua mente, via linhas de força atravessando todo o

espaço onde os matemáticos viam centros de força atraindo-se à distância. Faraday via um meio onde eles viam apenas distância. (apud [3], p. 201)

A partir do conceito de linhas de campo, Maxwell especulou sobre as implicações mecânicas associadas a estados de tensão e movimento em um meio, tratando as linhas de força como “tubos de éter” que possibilitavam uma análise desse meio análoga à hidrodinâmica. J.J. Thomson, por sua vez, interpretou as linhas de força de forma distinta: para ele, elas representavam estruturas que poderiam auxiliar na formulação de átomos como anéis de éter, com as linhas formando “tubos” de força.

À medida que esses “tubos no éter” deixaram de ser necessários para descrever as leis do eletromagnetismo, esse conceito foi naturalmente perdendo relevância. No entanto, a partir de meados do século XX, as linhas de força — agora aparecendo como linhas de campo — passaram a integrar o currículo de cursos de Física Básica, provando-se ainda úteis, especialmente como ferramentas de ensino.

No primeiro capítulo de *Lições de Física, Vol. II* [4], Richard Feynman chega até a fazer uma análise crítica das linhas de campo como uma forma de representar campos, destacando suas limitações. Em uma de suas observações, ele afirma:

As linhas de campo, no entanto, são apenas uma forma grosseira de descrever um campo, e é muito difícil dar as leis quantitativas corretas diretamente em termos de linhas de campo. Além disso, as ideias das linhas de campo não contêm o princípio mais profundo da eletrodinâmica, que é o princípio da sobreposição.

Apesar da crítica, Feynman demonstra que conhece o valor pedagógico das linhas de campo ao utilizá-las extensivamente ao longo de suas lições. Na Figura 1.1, vemos algumas das diversas ocasiões em que ele recorre as linhas de campo, por vezes utilizando-as até como parte essencial de seus argumentos. Na Figura 1.1a, por exemplo, Feynman utiliza linhas de campo para ensinar o método das imagens, de maneira semelhante ao que fazemos no

capítulo 3, embora de forma menos rigorosa do que a abordagem apresentada aqui.

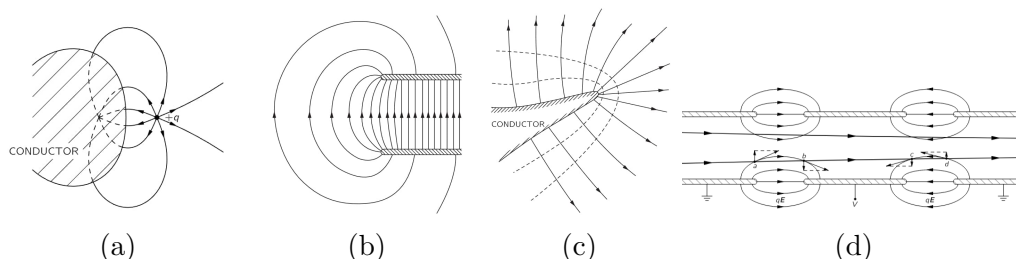


Figura 1.1: Figuras retiradas do *Lições de Física* [4] onde Feynman faz uso linhas de campo para ensinar ou ilustrar algum conceito.

Para abordar o comportamento do campo elétrico nas extremidades de um capacitor de placas paralelas ou o efeito das pontas, ele constrói as representações nas Figuras 1.1b e 1.1c, respectivamente. No último exemplo, Figura 1.1d, Feynman ilustra uma lente eletrostática — uma estrutura de focalização eletrônica que direciona elétrons por meio de campos elétricos. É interessante notar que, nesta figura, ele realmente representa as linhas de força, ou seja, $q\mathbf{E}$.

Outro exemplo em que as linhas de campo estão diretamente ligadas à didática do autor é o segundo livro da série Curso de Física de Berkeley, de Edward M. Purcell [5]. Nesse livro-texto, são discutidas diversas situações do eletromagnetismo onde as linhas de campo são representadas para facilitar a compreensão. Por exemplo, na Figura 1.2a, o livro (p. 55) ilustra as linhas de campo de um disco carregado uniformemente para mostrar que, próximo ao centro, o campo se comporta como o de um plano infinito, enquanto, a grandes distâncias do raio do disco, as linhas de campo e as equipotenciais se assemelham ao campo de uma carga puntiforme.

Na Figura 1.2b, o método das imagens é novamente introduzido no contexto de um curso introdutório de eletromagnetismo (p. 98), aproveitando o recurso das linhas de campo para isso. Uma ilustração singular do livro de Berkeley é apresentada na Figura 1.2c (p. 66), onde o fluxo de um campo que não obedece à lei do inverso do quadrado é demonstrado através de uma superfície fechada, mostrando um fluxo diferente de zero — algo de difícil

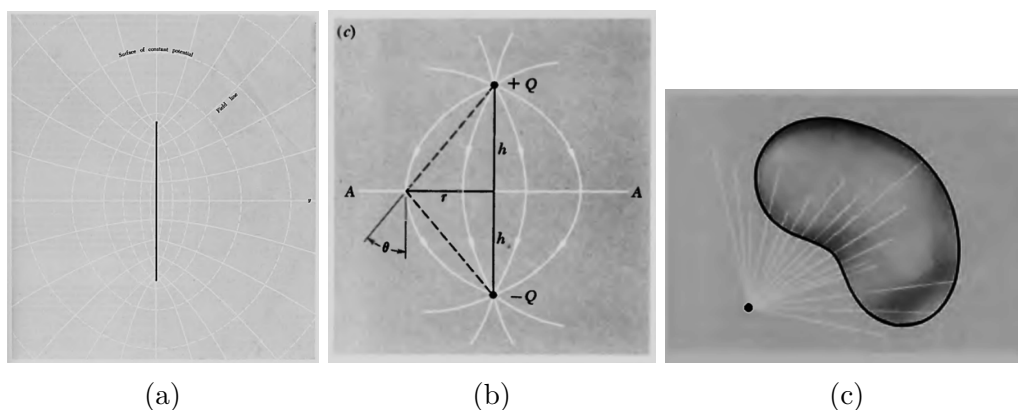


Figura 1.2: Figuras retiradas do *Electricity and Magnetism* [5] onde linhas de campo possuem participação direta no ensino de determinados conceitos.

explicação sem o auxílio das linhas de campo. No capítulo 2, oferecemos uma análise mais detalhada sobre como essa lei se conecta diretamente com a natureza das linhas de campo.

O livro *Curso de Física Básica III - Eletromagnetismo*, de H. M. Nussenzveig [6] (p. 29), apresenta as ‘linhas de força’ e utiliza até mesmo alguns argumentos de simetria (desenvolvidos aqui no capítulo 3) para representar o campo gerado por um plano infinito e por um cilindro infinito, ambos carregados uniformemente. No entanto, após essa introdução, o autor faz um uso mais restrito das linhas de campo em comparação aos outros livros mencionados, embora elas não sejam completamente abandonadas. Em algumas ocasiões, Nussenzveig recorre a elas com fins didáticos, como na Figura 1.3a (p. 74), onde ele primeiro chega ao resultado do “poder das pontas” matematicamente e depois utiliza a imagem para reforçar e ilustrar o conceito.

Na Figura 1.3b (p. 149), Nussenzveig utiliza as linhas de campo a fim de comparar um dipolo elétrico com um dipolo magnético, além de mostrar uma observação experimental dessas linhas.

Em contrapartida, o livro *Matter and Interactions*, de Chabay e Sherwood [7], rejeita completamente o uso das linhas de campo, optando por uma representação alternativa: a visualização do campo por meio de vetores distribuídos pelo espaço. Na Figura 1.4, observa-se como os autores representam o campo de um dipolo elétrico (1.4a), de um fio finito uniformemente carregado

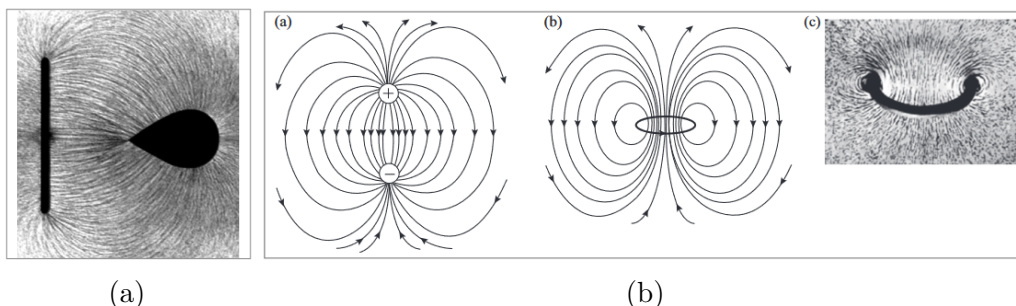


Figura 1.3: Figuras retiradas do livro de Nussenzveig [4] onde o autor opta por linha de campo para um fim didático.

(1.4b), de um anel uniformemente carregado (1.4c) e do campo \mathbf{B} ao redor de um fio com corrente estacionária (1.4d) — configurações que, na maioria dos livros didáticos de física, são tradicionalmente representadas com linhas de campo, até mesmo naqueles que utilizam esse recurso de forma limitada.

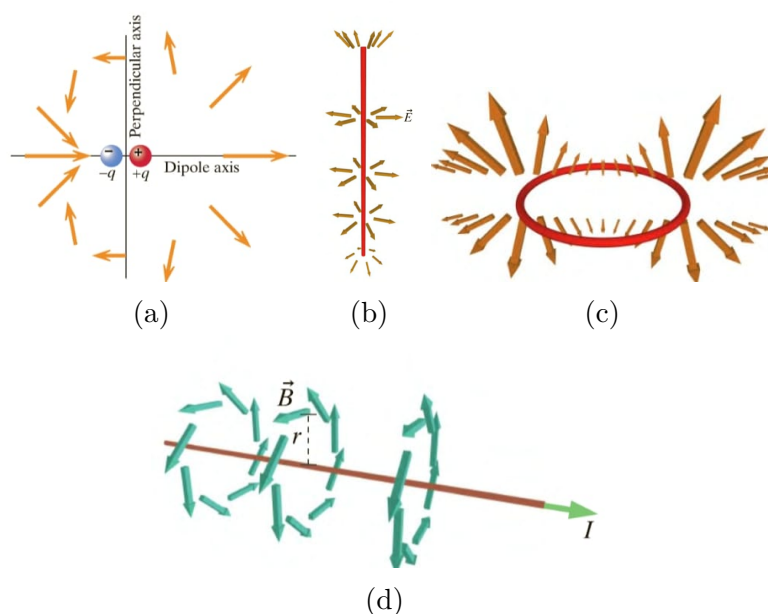


Figura 1.4: Figuras retiradas do *Matter and Interactions* de Chabay e Sherwood [7].

De acordo com Chabay e Sherwood [2], a decisão de não incluir as linhas de campo em seu curso introdutório de eletromagnetismo se baseia na ideia de que ensiná-las demanda um tempo significativo de aula, sem ofe-

recer benefícios práticos para estudantes iniciantes, que raramente utilizam essa representação para resolver problemas reais. Em contraste, vetores são usados com frequência na resolução de problemas, o que, para eles, justifica o foco nesta abordagem. Além disso, Chabay e Sherwood apontam que as linhas de campo podem gerar mal-entendidos, como a ideia equivocada de que partículas carregadas seguem essas linhas ou que estas são estruturas físicas capazes de influenciar diretamente o movimento dos objetos. Eles observam que, embora estudantes aprendam a contar linhas de campo para quantificar o fluxo na lei de Gauss, essa abordagem tem valor limitado, pois frequentemente não conseguem desenhar os diagramas corretamente.

Ainda segundo os autores, diagramas bidimensionais de linhas de campo apresentam falhas científicas, pois, em alguns casos, é impossível representá-los de forma correta. Essa crítica é semelhante à de Wolf [8], que defende que qualquer tentativa de representar um conceito essencialmente tridimensional em duas dimensões leva a efeitos de projeção problemáticos, como o surgimento de falsos monopolos e o aglutinamento de linhas de campo que discutiremos adiante. Para este autor, representações como as usadas em *Matter and Interactions* deveriam ganhar mais espaço em detrimento das linhas de campo.

Para Chabay e Sherwood, focar em vetores para representar campos é mais eficaz e suficiente para o entendimento básico de eletromagnetismo, no entanto os autores admitem que linhas de campo podem ser uma ferramenta útil em contextos avançados onde campos e plasmas estão fortemente acoplados ¹.

Campos et al. [11] também criticam o uso de linhas de campo no ensino introdutório de eletromagnetismo, apontando dificuldades significativas que elas geram na interpretação do princípio da superposição — o mesmo problema levantado por Feynman e que de maneira alguma deve ser ignorado.

¹De fato, linhas de campo são amplamente utilizadas na pesquisa para modelar e compreender fenômenos como a Reconexão Magnética. Processo no qual linhas de campo magnético com orientações opostas se rompem e se reconectam em plasmas, convertendo energia armazenada no campo magnético em energia térmica e cinética do plasma. Esse mecanismo é fundamental para explicar diversos eventos notáveis em nosso sistema solar [9, 10].

O estudo apresentado no texto também reforça o argumento de Chabay e Sherwood de que muitos alunos tratam as linhas de campo elétrico como reais, imaginando-as transportando cargas ou confundindo-as com trajetórias.

Neste trabalho, defenderemos que, desde que os estudantes consigam desenvolver uma intuição física correta sobre um fenômeno a partir de um diagrama de linhas de campo, não há problema em tratar essas linhas como entidades reais². Isso é particularmente válido em uma primeira abordagem do assunto, no contexto da educação básica. Sobre a materialidade das linhas de campo, o próprio Maxwell [12] afirma que

A bela ilustração da presença da força magnética proporcionada por esta experiência [das limalhas de ferro] tende naturalmente a fazer-nos pensar nas linhas de força como algo real, e como indicando algo mais do que a mera resultante de duas forças, cujo local de ação está à distância, e que não existem naquele ponto até que o ímã seja colocado no campo. (p. 451)

Se até mesmo a figura central no desenvolvimento do eletromagnetismo moderno considerou, em certa medida, as linhas de campo como reais e as utilizou para sua matematização, acreditamos ser igualmente viável empregá-las para construir um entendimento inicial de eletromagnetismo com uma turma de jovens, muitos dos quais nem mesmo pretendem seguir carreira nas ciências exatas.

Ainda que reconheçamos os nuances e limitações geométricas dessa representação, que serão discutidas no capítulo 2, demonstraremos que elas não nos impedem de abordar problemas reais e avançados de eletromagnetismo. Nos capítulos 3 e 4, exploramos alguns desses problemas, que acreditamos ser de grande relevância para o público de nível superior, tanto para estudantes do ciclo básico quanto para professores em formação continuada.

²Vale destacar que, em casos dinâmicos, não é possível tratar as linhas de campo como entidades físicas. A cada instante, uma escolha das linhas a serem traçadas deve ser feita, e não é trivial determinar como essas linhas deveriam se mover em uma animação. Para uma discussão mais aprofundada, remetemos o leitor às referências [13, 14]

Neste ponto, é fundamental destacar um aspecto central deste trabalho: consideramos um equívoco exigir que estudantes desenhem diagramas de linhas de campo mais complexos do que os de uma única carga pontual. Essa perspectiva é corroborada por análises de Chabay e Sherwood, e Campos et al. Mesmo professores com alta familiaridade com linhas de campo, ao desenharem sistemas com duas ou mais cargas manualmente, tendem a cometer imprecisões. Portanto, todas as representações de linhas de campo criadas para este trabalho foram geradas por software, utilizando bibliotecas Python [15, 16]. Nosso objetivo é desenvolver a capacidade de interpretação desses diagramas, estimulando um pensamento visual para compreensão de fenômenos.

No capítulo 5, apresentamos a proposta didática desta dissertação: uma sequência de aulas e atividades que visa ensinar os princípios da eletrostática, utilizando as linhas de campo como instrumento pedagógico que permeia toda a sequência. Em sintonia com essa abordagem, introduzimos a impressão 3D para produzir modelos táteis e mais precisos das linhas de campo, buscando aumentar o interesse e o engajamento dos estudantes no estudo do eletromagnetismo. Incorporar tecnologias como essa ao ensino, sem abrir mão das interações sociais, pode enriquecer o aprendizado ao possibilitar a negociação de significados, segundo Moreira [17]. Esse recurso, aliado à sequência proposta, pode representar um avanço na acessibilidade do conceito para estudantes com deficiência visual, embora materiais específicos não tenham sido desenvolvidos ou aplicados.

É importante salientar que nossa proposta não visa substituir o ensino tradicional de eletrostática no ensino médio. A importância de ensinar o princípio da superposição na educação básica é conhecida e precisa ser destacada. Propomos que o ensino desse princípio seja introduzido logo após os alunos terem uma compreensão sólida de campo e força elétrica uma vez que acreditamos que apenas após os estudantes terem alguma intuição sobre o conceito de campo é que se deve adentrar a questão de como efetivamente calculá-lo. Quanto à crítica de que as linhas de campo podem confundir os estudantes ao serem interpretadas como trajetórias de partículas, acreditamos que esse engano pode ser minimizado com uma ênfase cuidadosa e o uso

de contra-exemplos visuais.

Apesar de alguns estudos recentes investigarem o uso das linhas de campo no ensino [18], acreditamos que o tema ainda é pouco explorado no contexto da educação básica, especialmente no ensino médio. Ao analisar o livro *Física para o Ensino Médio, Volume 3 - Eletricidade/Física Moderna*, de Kazuhito e Fuke [19], observamos um diferencial interessante: o uso de fotos de experimentos que motivam a existência de “linhas de força”, enquanto a maioria dos livros didáticos limita-se a mostrar o fenômeno apenas com limalhas de ferro no caso do campo magnético. No entanto, ao longo do livro pouco se vê integração das linhas de campo de forma substancial às explicações dos fenômenos a elas associados.

O livro didático de Física para o ensino médio disponibilizado online pela Secretaria de Estado da Educação do Paraná [20] faz um trabalho muito interessante ao não apenas mencionar Maxwell e suas leis, mas também ao explicá-las de forma simples e resumida usando o conceito de linhas de campo, uma prática que merece ser destacada e replicada em mais materiais didáticos. No entanto, o mesmo livro omite qualquer explicação sobre linhas de campo, mencionando-as apenas brevemente como nas linhas associadas ao experimento com limalhas de ferro, sem ao menos ilustrá-lo com fotos.

Diante dessa lacuna, nossa proposta surge com o objetivo claro de reduzir o conhecido desafio da abstração no ensino do eletromagnetismo, buscando respeitar o desenvolvimento cognitivo dos jovens e os estágios de construção do conhecimento como os descritos por Piaget [21]. No ensino médio, onde predominam o pensamento concreto da natureza e a transição gradual para o abstrato, a introdução de modelos visuais e táteis, como as linhas de campo e o uso de recursos gráficos e experimentais, pode ser de grande valor para conectar o entendimento conceitual ao nível cognitivo do estudante, favorecendo uma aprendizagem significativa e intuitiva do eletromagnetismo.

Essa proposta foi implementada em uma escola da rede privada na cidade do Rio de Janeiro, e os detalhes dessa aplicação, assim como sua análise, estão descritos no Capítulo 6. No Apêndice A, encontra-se o material instrucional desenvolvido a partir desta dissertação.

Capítulo 2

Linhas de Campo

2.1 Definição e Vantagens Pedagógicas

As linhas de campo são uma ferramenta visual valiosa, que nos permite “ler” campos vetoriais, fornecendo uma noção quase imediata de seu comportamento, sem a necessidade de recorrer a equações diferenciais complexas para isso. De forma resumida, campos vetoriais são funções matemáticas que associam a cada ponto do espaço um vetor de n dimensões. Podemos obter uma representação gráfica de campos vetoriais em até três dimensões espaciais ao posicionarmos um número limitado de vetores em seus respectivos pontos no espaço, como mostrado na Figura 2.1a. Quanto mais pontos representamos, mais informações adquirimos sobre o campo. No entanto, ao aumentarmos o número de vetores, a visualização do campo se torna mais confusa, com setas sobrepondo-se umas às outras (ver Figura 2.1b). Uma solução para esse problema é desenhar linhas orientadas que são sempre tangentes aos vetores em cada ponto do espaço – essas são as chamadas linhas de campo (Figura 2.1c).

Desse modo, ao analisarmos uma linha de campo, podemos identificar facilmente tanto a direção quanto o sentido do campo em cada um de seus pontos, simplesmente traçando uma reta tangente que siga sua orientação.

No ensino de eletrostática, costuma-se inicialmente postular a lei de Coulomb em cursos introdutórios, ou então a lei de Gauss para a eletricidade

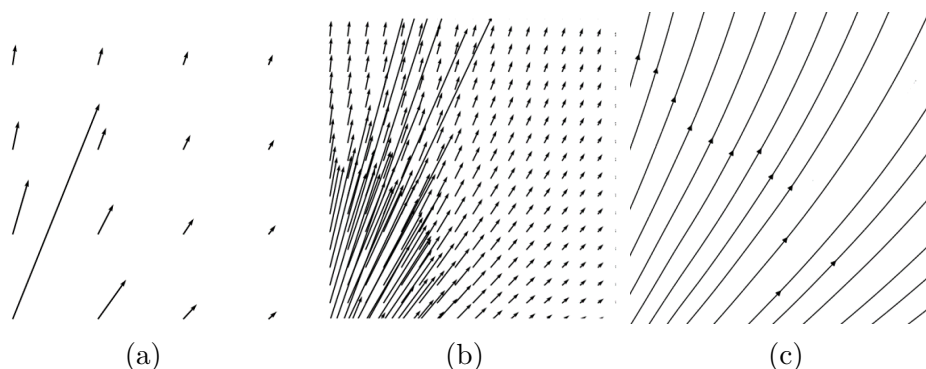


Figura 2.1: Representações de um campo vetorial qualquer por meio de (a) poucos vetores, (b) diversos vetores e (c) linhas de campo.

em cursos mais avançados. O ensino via linhas de campos pode substituir estes postulados pelo equivalente de que linhas de campos são apenas criadas ou destruídas por cargas elétricas, se conservando em regiões que não possuem cargas. Convencionamos que cargas positivas “criam” linhas de campo enquanto negativas as “destroem”.

O número de linhas que partem ou chegam a uma carga puntiforme é arbitrário, contudo, uma vez que é definido, deve ser proporcional ao valor das novas cargas representadas no mesmo diagrama. Na Figura 2.2, temos uma representação de diferentes cargas pontuais isoladas que ilustra essas regras. Entretanto, é importante lembrar que as linhas de campo são tridimensionais, e a figura mostra apenas uma projeção plana das cargas, cujas implicações discutiremos com mais detalhes adiante.

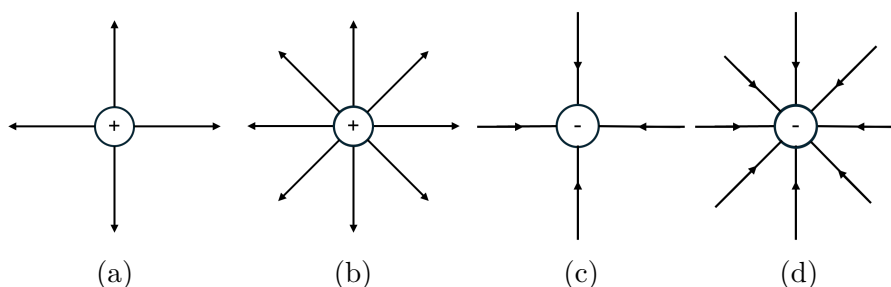


Figura 2.2: Linhas de campo para uma carga pontual (a) positiva de magnitude q ; (b) positiva de magnitude $2q$; (c) negativa de magnitude q ; (d) negativa de magnitude $2q$.

Note que, ao traçarmos as linhas, ganhamos intuição da direção e sentido dos vetores em cada ponto do espaço, mas perdemos a informação de sua magnitude, diferentemente do que ocorre em representações como as ilustradas na figura 1.4. No entanto, podemos recuperar essa informação admitindo que a intensidade em um ponto é diretamente proporcional à densidade das linhas em sua vizinhança. Mais precisamente, como destacou Richard Feynman, “o número de linhas por unidade de área, em ângulos retos às linhas, é proporcional à intensidade do campo” [4] – conforme ilustrado na Figura 2.3.

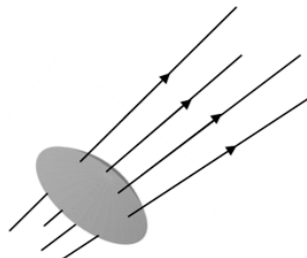


Figura 2.3: A densidade de linhas de campo sobre uma superfície aberta perpendicular às linhas é uma medida da intensidade do campo elétrico.

Como primeira aplicação, consideremos o campo elétrico produzido por uma carga elétrica puntiforme q . Neste caso, a superfície perpendicular às linhas de campo pode ser escolhida como uma esfera de raio r , de modo que

$$E \propto \frac{N_{\text{linhas}}}{\text{Área}} \propto \frac{q}{r^2}.$$

Relação essa que remonta diretamente à lei de Coulomb, indicando que é possível tratar as linhas de campo como entidades físicas, tal como defendiam Faraday e Maxwell [12]. E isso não é por acaso. A lei do inverso do quadrado surge como uma consequência direta e inevitável do conceito de linhas de campo.

Para demonstrar isso, são necessários apenas dois conceitos: o que podemos chamar de princípio da conservação das linhas — linhas de campo não podem surgir ou desaparecer espontaneamente; apenas cargas têm o poder de criá-las ou destruí-las — e o conceito de fluxo de um campo vetorial.

O fluxo de um campo vetorial \mathbf{F} através de uma superfície S é definido como o valor médio do componente normal do vetor multiplicado pela área da superfície. À medida que a área da superfície se torna infinitamente pequena, o fluxo de F é dado por

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}.$$

Embora precisa, essa definição de fluxo requer elementos de cálculo vetorial e integração em superfícies. No entanto, no contexto das linhas de campo, podemos entender o fluxo do campo como sendo uma grandeza proporcional ao número de linhas que atravessam uma superfície.

Tomemos então uma carga putiforme q , isolada no espaço, a fim de analisar diferentes leis de força e verificar a sua compatibilidade com o modelo das linhas de campo que propusemos.

Primeiro, vamos supor que o módulo do campo elétrico gerado por q seja proporcional ao inverso da distância, $E = \frac{C}{r}$. O fluxo do campo através de uma esfera de raio R , centrada na carga, é dado por

$$\oint_S E \cdot dA = \oint_S \frac{C}{r} \cdot r^2 dr = 4\pi C \cdot R,$$

o que indica que o fluxo aumenta proporcionalmente ao raio da esfera escolhida. Em termos de linhas de campo, esse resultado sugere que novas linhas surgem conforme nos afastamos da carga, violando o princípio preestabelecido da conservação das linhas. O diagrama da Figura 2.4a ilustra a situação descrita.

Agora, considere o campo de uma carga cuja a lei de força é inversamente proporcional ao cubo da distância, $E = \frac{C}{r^3}$. O fluxo através da esfera de raio R seria

$$\oint_S E \cdot dA = \oint_S \frac{C}{r^3} \cdot r^2 dr = \frac{4\pi C}{R},$$

o que mostra que o fluxo diminui à medida que R aumenta. Em outras palavras, algumas linhas de campo começam a sumir à medida que nos afastamos da carga, o que novamente violaria o princípio de conservação das linhas (ver Figura 2.4b).

Por fim, para um campo que obedece exatamente à lei do inverso do

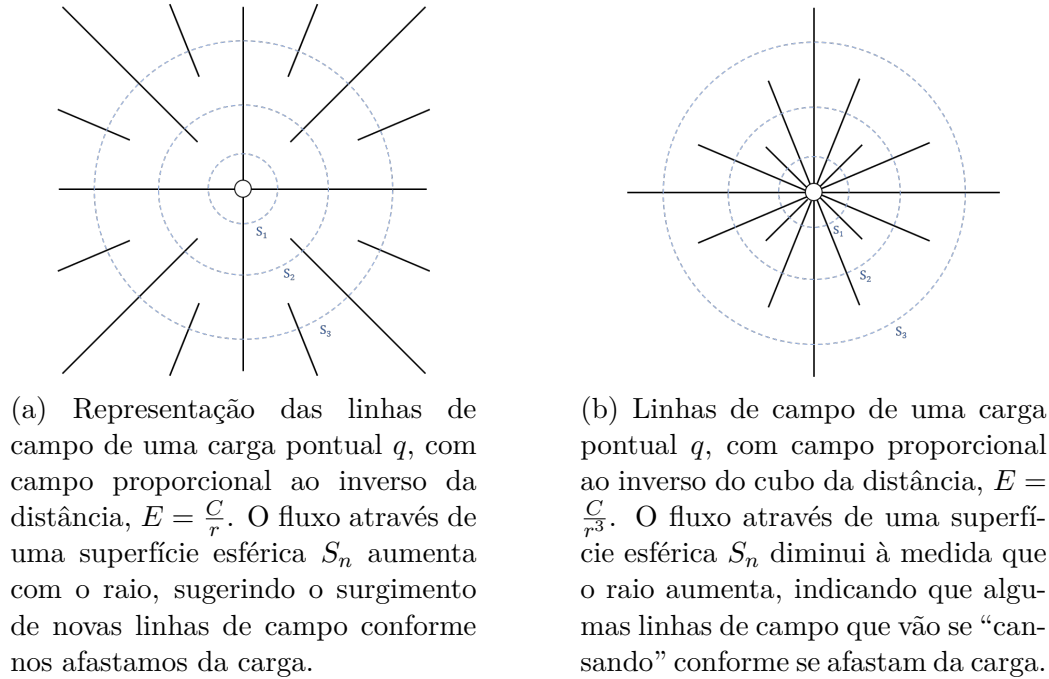


Figura 2.4

quadrado, $E = \frac{C}{r^2}$, o resultado da integral é uma constante:

$$\oint_S E \cdot dA = 4\pi C.$$

Esse resultado é uma expressão direta da Lei de Gauss — as linhas de campo nada mais são do que uma representação visual dessa lei fundamental.

Portanto, uma vantagem das linhas de campo é que, mesmo sem mencionar explicitamente a Lei de Gauss, podemos usá-la de maneira pictórica para explorar problemas que, tradicionalmente, só seriam abordados no ensino superior. Esses problemas tornam-se acessíveis em níveis mais básicos não porque o conceito se torna menos complexo, mas porque as ferramentas matemáticas mais sofisticadas, como integrais de superfície, ficam “escondidas” no conceito de linhas de campo. Na prática, ao representarmos apenas uma quantidade enumerável de linhas estamos mapeando uma integração contínua em apenas um problema de contagem. Assim, as únicas habilidades necessárias passam a ser contar o número de linhas e calcular a área de sólidos. Claro que tal contagem não traduz precisamente o valor do fluxo.

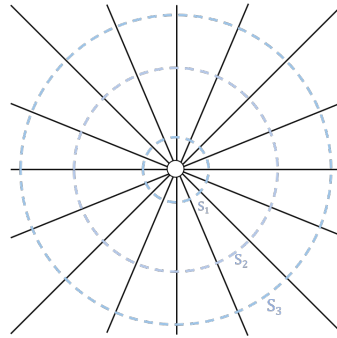


Figura 2.5: Linhas de campo de um carga pontual cuja a lei de força obedece o inverso do quadro da distância. Fica evidente que o fluxo de linhas independe do raio da superfície S_n .

No entanto, este expediente permite encontrar resultados exatos em alguns casos, como o supracitado exemplo da carga puntiforme, mas também alguns outros.

Um caso interessante é o do plano infinito com densidade superficial de carga constante, σ . Sabe-se que, devido à simetria planar do problema, as linhas de campo são todas paralelas, perpendiculares ao plano e igualmente espaçadas, com sentidos opostos nos dois semi-espacos. A Figura 2.6 ilustra as linhas de campo desse plano, evidenciando que a intensidade do campo é constante em todo o espaço, independentemente da distância ao plano.

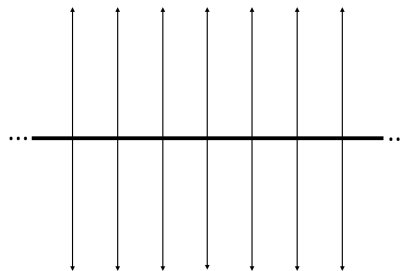


Figura 2.6: Perfil de um plano infinito uniformemente carregado com $\sigma > 0$.

Note que ainda falta definir com precisão o que significa e o que implica um argumento de simetria. Isso será discutido em maior detalhe no capítulo 3. Por ora, podemos motivar o que precisamos apenas mencionando para os estudantes que pela simetria do plano não faria sentido as linhas de campo na figura 2.6 serem horizontais. Afinal, por que o campo apontaria para a direita

e não para a esquerda, por exemplo? O uso de linhas de campo possui seu alcance muito estendido ao combinarmos este conceito com o de simetrias. Destacamos que implicitamente já havíamos usado consideração de simetria ao tratarmos da carga puntiforme, em nossa representação equiespaçada para as linhas de campo, que tiveram como consequência o fato do módulo do campo depender apenas da distância à carga e não da direção em que estamos calculando o campo.

Adicionalmente, podemos considerar o campo gerado por um fio retilíneo infinito uniformemente carregado, com densidade λ . Devido à simetria cilíndrica do sistema — invariante a rotações e translações sobre o eixo do fio — as linhas de campo devem ser radiais em planos perpendiculares ao fio e equidistantes entre si, como ilustrado na Figura 2.7.

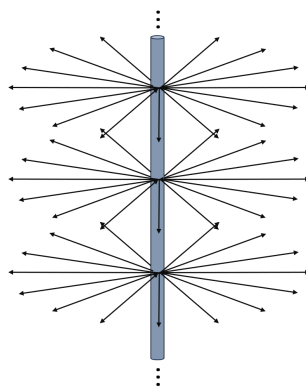


Figura 2.7: Fio retilíneo infinito uniformemente carregado com $\lambda > 0$

Lembre-se de que todas as representações até aqui de cargas puntiformes são apenas projeções bidimensionais de um mundo tridimensional. Como qualquer projeção que tenta descrever esferas em planos, ela possui suas limitações. Se esquecermos por um momento que as circunferências, como as da imagem 2.5, representam esferas, podemos erroneamente interpretar que a densidade superficial (na verdade, linear) de linhas é inversamente proporcional ao comprimento da circunferência, isto é, $E \propto \frac{1}{r}$.

Contudo, a mesma figura representa adequadamente um corte da seção transversal de um fio infinito, com suas linhas de campo. Nenhuma informação é perdida por projeção quando um diagrama bidimensional de linhas

de campo é utilizado para visualizar a seção transversal de uma configuração em que uma componente espacial é uniforme, como no caso de fios e prismas infinitos. Assim, no caso do fio infinito, o campo elétrico realmente diminui com $\frac{1}{r}$ à medida que nos afastamos dele.

Mesmo sem uma discussão profunda sobre simetria, é possível discutir as propriedades de uma determinada configuração, entregando pronto ao estudante o diagrama de linhas de campo. Lembremos que o nosso objetivo não é ensinar como se desenham linhas de campo, e sim como ler os diagramas e usá-los para ganhar intuição da física de problemas eletrostáticos.

Um exemplo final é o do canudo uniformemente carregado, que foi aplicado com sucesso em uma turma do ensino médio, gerando discussões pedagógicas valiosas, como descrito no capítulo 6. A Figura 2.8 ilustra a configuração de cargas, que se assemelha ao exemplo do fio, porém com um canudo de comprimento finito. Embora a lei de força que descreve esse campo deixe de ser trivial, ainda é fácil perceber que o campo é mais intenso próximo ao canudo e diminui com o afastamento. Para grandes distâncias, onde o módulo de \mathbf{r} é muito maior que o comprimento do canudo, o campo se comporta semelhante ao de uma carga puntiforme. Claro, não com essas palavras, mas os alunos conseguiram fazer toda essa interpretação física, resultado que foi além das expectativas.

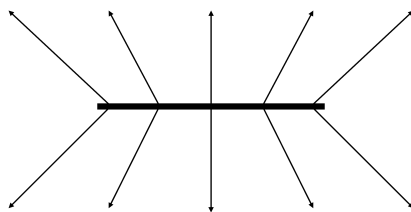


Figura 2.8: Canudo uniformemente carregado com densidade linear de carga $\lambda > 0$

Uma vez que aceitamos a materialidade das linhas de campo, ensinar a lei de Gauss torna-se mais simples — até mesmo para o nível básico — já que ela agora ganha um significado concreto e visível. Um exemplo disso é apresentado na seção 6.5, onde, sem mencionar explicitamente o nome da lei, sua aplicação é utilizada para discutir a carga total em um universo finito

com uma turma de ensino médio.

Contudo, como visto no capítulo 1, linhas de campo não são uma unanimidade no ensino de Física, e todos os argumentos contrários ao seu uso ainda precisam ser colocados na balança. Defenderemos aqui que prós valem mais do que os contras.

Uma crítica que poderia ser levantada contra o valor pedagógico das linhas de campo refere-se ao argumento de que a relação entre a intensidade do campo e a densidade das linhas aplica-se apenas a campos que decaem com $\frac{1}{r^2}$, como os campos eletromagnéticos e gravitacionais – o que não deixa de ser verdade (ver Figura 2.9). No entanto, é importante lembrar que o principal objetivo das linhas de campo é justamente auxiliar no estudo de campos que realmente existem, os quais, na maioria das vezes, obedecem à lei do quadrado inverso da distância. Portanto, esta é uma abordagem perfeitamente honesta.

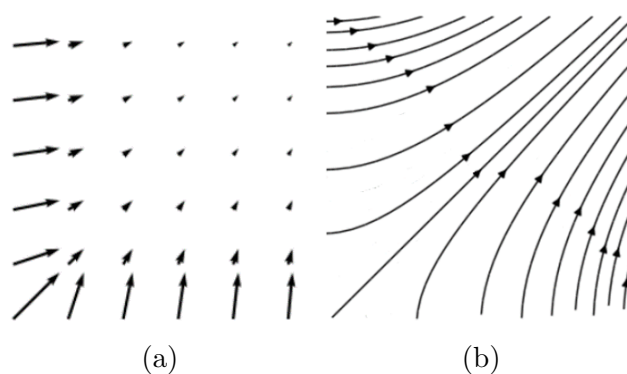


Figura 2.9: Representação do campo vetorial $F = (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ no primeiro quadrante por meio de (a) poucos vetores. (b) linhas de campo. Perceba que a densidade de linhas agora é inversamente proporcional a magnitude dos vetores, mostrando que essa regra não é universal para todo campo.

Outra possível objeção que poderia ser levantada é que, ao entrarmos no domínio da eletrodinâmica, o campo elétrico decai proporcionalmente a $\frac{1}{r}$. Destacamos que, mesmo na eletrodinâmica, a lei de Gauss ainda é satisfeita. O campo elétrico na eletrodinâmica possui mais de uma parcela, sendo que a parcela que cai com $1/r$, conhecida como campo de radiação, é transversa e não contribui para o fluxo. O argumento que colocamos aqui é somente para

a parte que cai com $1/r^2$. Contudo, mesmo no termo de radiação, nossa análise traz *insights* interessantes, desde que agora consideremos como grandeza conservada não as linhas, mas sim a energia. Pelo nosso argumento, vemos que a energia deve decair com $1/r^2$, donde sendo ela quadrática no campo, isso implica que este último cai com $1/r$. Esse ponto foge aos nossos propósitos; entretanto, é interessante mencionar que esse quadro ainda admite o emprego de linhas de campo, porém linhas de campo para a corrente de energia, conhecida como vetor de Poynting.

No que tange a erros comumente observados no uso de linhas de campo, é crucial lembrar que as linhas nunca devem se cruzar, pois isso implicaria em uma direção indefinida do campo, e não em uma simples soma vetorial das direções definidas pelas linhas naquele ponto, como alguns poderiam pensar.

Outro equívoco comum é supor que as linhas de campo definem a trajetória de partículas carregadas. Como \mathbf{E} é sempre tangente à uma linha de campo, e $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, as linhas apenas indicam a direção da aceleração instantânea de cargas livres sobre elas — e não a direção da velocidade. Uma maneira simples de perceber isso é imaginar o movimento de uma partícula de carga negativa viajando sobre um plano infinito igual ao da Figura 2.6, com velocidade inicial paralela ao plano. Em vez de seguir uma trajetória vertical, definida pelas linhas de campo, a partícula descreverá uma curva parabólica em direção ao plano, com um comportamento análogo ao de um projétil lançado horizontalmente na superfície da Terra.

De fato, as linhas de campo são uma ferramenta pedagógica valiosíssima, permitindo aos estudantes estabelecer conexões imediatas entre a teoria matemática e as implicações físicas dos campos elétricos. No entanto, vimos que sua representação bidimensional traz consigo limitações inerentes, como evidenciado no caso em que a mesma figura (2.5) pode ser usada para representar tanto uma projeção planar do campo de uma carga puntiforme, que obedece à lei $\frac{1}{r^2}$, quanto um campo que obedece à lei $\frac{1}{r}$, de um fio infinito uniformemente carregado. Há casos ainda mais extremos, por exemplo o chamado aglutinamento equatorial. A ideia é que projeções tendem a concentrar linhas de campo no plano das cargas (chamado de plano equatorial), fazendo parecer que há maior uma densidade de linhas (e, portanto, uma intensidade

maior de campo) do que de fato presente. Foge aos nossos propósitos adentrar este tópico e remetemos o leitor à referência [8]. Tais limitações levantam a necessidade de representações verdadeiramente tridimensionais de linhas de campo, que permitam explorar a real natureza de campos elétricos. É nesse contexto que a tecnologia de impressão 3D se destaca como uma ferramenta promissora.

2.2 Construção de Linhas de Campo em 3D

Com o avanço e a democratização do acesso a impressoras 3D, surge uma nova forma de visualizar e explorar as linhas de campo, permitindo a criação de representações físicas que preservam suas propriedades essenciais, eliminando efeitos indesejados de projeção.

Quando aplicada às linhas de campo, essa tecnologia desponta como uma solução promissora para os desafios pedagógicos na visualização e compreensão da eletrostática, embora ainda seja pouco explorada no contexto educacional. A impressão dessas representações não apenas facilita o entendimento de conceitos fundamentais do eletromagnetismo, como a lei do inverso do quadrado para cargas puntiformes, mas também acrescenta um elemento motivacional relevante e notável para os estudantes. A possibilidade de manipular uma carga elétrica em sala de aula — quase como um brinquedo — desperta curiosidade nos alunos, especialmente por saberem que foi criada com uma tecnologia inovadora. Esse tipo de interação contrasta com o método tradicional de “quadro e giz”, ao qual estão acostumados, proporcionando uma experiência empírica que agrega um fator imensurável ao processo de aprendizagem: o interesse e a atenção dos alunos — moedas valiosas e difíceis de se obter na atualidade, especialmente de jovens e adolescentes.

Contudo, o desdobramento mais relevante desse recurso, sem dúvidas, reside na acessibilidade do ensino para estudantes com deficiência visual. A eletrostática, por sua natureza abstrata, representa um desafio para estudantes em todos os níveis de ensino. Esse desafio é ainda maior para estudantes com deficiência visual, que dependem de métodos alternativos não visuais para compreender conceitos tradicionalmente apresentados por meio de figu-

ras e equações. A falta de materiais didáticos adequados no ensino de Física para alunos cegos, especialmente no campo do eletromagnetismo, é um problema amplamente reconhecido [22]. Nesse contexto, o uso de modelos 3D das linhas de campo surge como uma solução inclusiva de grande potencial, permitindo a todos estudantes “enxergar” campos invisíveis através do tato.

Infelizmente, a adaptação da sequência didática desenvolvida neste trabalho para atender às especificidades do público com deficiência visual, assim como sua aplicação, não foram realizadas. Apesar de uma importante instituição da rede federal no Rio de Janeiro ter oferecido suporte e aberto suas portas ao projeto, a greve dos servidores públicos durante as etapas de aplicação impediu a execução de nossos planos.

No entanto, durante a escrita desta dissertação, encontramos o livro de Camargo et al. [23], que aborda estratégias e conhecimentos voltados para a inclusão de alunos com deficiência visual. No capítulo 5, o livro analisa um trabalho já aplicado tanto para alunos videntes quanto em alunos com deficiência visual, utilizando modelos de cargas puntiformes confeccionados com esferas de isopor, palitos de madeira e papel machê (Figura 2.10a), muito semelhantes aos que desenvolvemos neste trabalho (Figura 2.10b). A principal diferença entre o modelo descrito no livro e o apresentado nesta dissertação está na metodologia, já que aqui o foco está nas linhas de campo como ferramenta pedagógica principal.

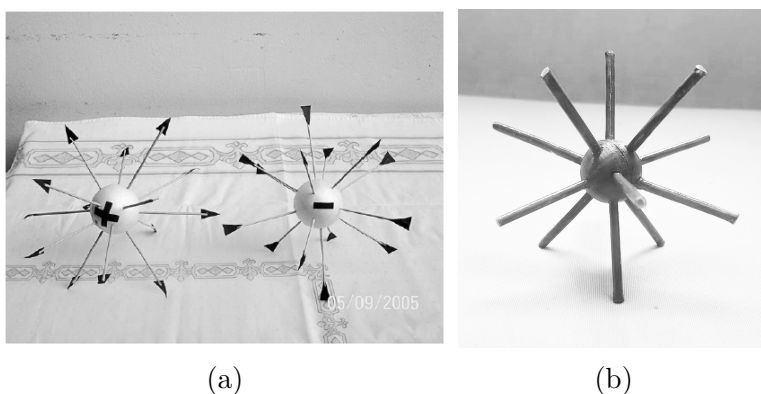


Figura 2.10: (a) Maquete tátil-visual de cargas pontuais com suas respectivas linhas de campo registrada em Camargo et. al [23] (b) Carga pontual impressa desenvolvida para a sequência didática deste trabalho.

A impressão 3D permite representar cargas com maior precisão geométrica em comparação às maquetes da Figura 2.10a, o que é importante para demonstrar a lei do inverso do quadrado. Além disso, ela abre caminho para representações físicas de linhas de campo curvas, como dipolos e quadrupolos. Ainda assim, Camargo et al. apontam que um modelo mais simples e de menor custo pode ser uma alternativa igualmente eficaz ao modelo apresentado neste trabalho, além de reforçar que este é, de fato, o caminho para um ensino verdadeiramente inclusivo. Para facilitar a reprodução dos modelos utilizados neste trabalho, o material instrucional associado a esta dissertação (Apêndice A) inclui instruções detalhadas para o download dos modelos 3D, bem como um passo a passo para a criação de novas peças. Além disso, fornecemos orientações práticas sobre cuidados durante a impressão e o manuseio das peças.

Durante a finalização desta dissertação, fomos apresentados a uma nova perspectiva sobre a acessibilidade proporcionada pelos modelos 3D de linhas de campo: seu potencial benefício para alunos surdos e/ou com deficiência auditiva (DA).

Além dos desafios já documentados no ensino de Ciências para estudantes surdos, como a delegação da responsabilidade de ensino aos intérpretes em detrimento da mediação direta pelo professor [24], observa-se uma carência de materiais específicos para o ensino de Física voltados a esse público, especialmente no campo do Eletromagnetismo. Como destacado por Vargas [25], alunos surdos enfrentam dificuldades significativas na aprendizagem de conceitos físicos, principalmente porque os intérpretes de Libras frequentemente recorrem a sinais do cotidiano para explicar termos científicos, o que pode comprometer a apropriação adequada desses conceitos.

Diante da escassez de sinais específicos em Libras para a Física, levanta-se a hipótese de que materiais impressos em 3D possam atuar como suporte didático na mediação entre professores, intérpretes e estudantes com DA, auxiliando na compreensão de conceitos como campo elétrico e a lei do inverso do quadrado da distância. Embora essa possibilidade ainda demande investigação aprofundada e validação por especialistas na área, trata-se de uma perspectiva promissora que merece ser explorada em pesquisas futuras.

Apesar das vantagens supracitadas, a modelagem precisa das linhas de campo em 3D revela-se uma tarefa bastante desafiadora, mesmo com o uso das principais ferramentas disponíveis. Esses obstáculos decorrem principalmente de feições inerentes à geometria espacial tridimensional. Primeiramente, enquanto em duas dimensões podemos criar um polígono regular de quantos lados quisermos, não há análogo em três dimensões. De fato, poucos são os poliedros regulares no caso tridimensional. Com isso, se desejarmos representar linhas de campo equiespaçadas saindo de uma carga puntiforme, apenas para pouquíssimos valores do número de linhas conseguiremos uma solução exata. Os poucos casos exatos correspondem a situações em que as linhas passam pelos centros das faces de poliedros regulares³. Quando desejamos representar as linhas de duas ou mais cargas, a situação é ainda pior. Idealmente gostaríamos de que o número de linhas chegando ou saindo de uma dada carga fosse proporcional à sua magnitude. Mesmo no caso 2D isso em geral é impossível, a menos que as cargas sejam comensuráveis. Estes problemas ficam menores quanto maior o número de linhas que usamos.

Apesar de não traduzirem fenômenos físicos com absoluta precisão, as linhas de campo permanecem como um método eficaz capaz de fornecer *insights* importantes na resolução e no ensino de problemas em eletromagnetismo, como demonstrado nos capítulos seguintes.

³Uma forma possível de contornar essa limitação pode ser estar no campo da Cosmologia, por meio do algoritmo HEALPix (Pixelização Hierárquica de Área Igual isoLatitude) [26]. Desenvolvido originalmente para a análise de dados em experimentos de radiação cósmica de fundo, esse algoritmo permite dividir uma superfície esférica em áreas iguais e identificar os centros dessas divisões, fornecendo pontos praticamente equidistantes. Essa característica sugere uma aplicação potencial na modelagem de cargas puntiformes, como as usadas neste trabalho. Embora o HEALPix seja de código aberto e disponível em diversas linguagens de programação, sua implementação na impressão de peças em 3D não foi explorada devido às limitações de tempo. No entanto, a viabilidade dessa abordagem representa um tópico promissor para investigações futuras.

Capítulo 3

Simetrias

3.1 Transformações e Operações de Simetria

Uma ferramenta muito rica conceitualmente e conveniente para estudar o eletromagnetismo é o estudo das simetrias. Desde os cursos iniciais da formação acadêmica, argumentos de simetria são usados extensivamente, ainda que poucas vezes uma discussão adequada seja apresentada para motivar mais cuidadosamente o assunto.

Um exemplo disso está no livro de eletromagnetismo básico de Nussenzveig [6] onde se afirma que

Para um fio *cilíndrico infinito uniformemente carregado* (Figura 3.7), temos *simetria axial* (cilíndrica), e as linhas de força são radiais em planos perpendiculares ao fio, ou seja, têm a direção do vetor unitário $\hat{\rho}$ em coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) . (p. 30)

Entretanto, a simetria cilíndrica, por si só, garante que o campo seja radial? Como será discutido adiante, a resposta é negativa, embora o trecho citado possa levar a essa interpretação equivocada. A ausência dessa explicação em livros de física básica, como o de Nussenzveig, é compreensível, pois uma discussão detalhada sobre operações de simetria ampliaria significativamente o conteúdo. Neste capítulo, essa questão será abordada de forma mais aprofundada, com foco em aplicações nos cursos de física do ensino superior, especialmente nos de física básica.

Nas subseções seguintes, serão apresentadas definições detalhadas desses conceitos. Em particular, veremos a importância de distinguir entre a transformação de simetria para pontos do espaço e para as leis de transformação dos campos.

3.1.1 Operação de translação

A operação de translação é uma transformação que desloca todos os pontos de um espaço euclidiano (x, y, z) para novas coordenadas $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Aqui, $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ representam as componentes do vetor de translação \mathbf{T} . De maneira sucinta, podemos escrever a transformação na forma

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{T} + \mathbf{r},$$

conforme a Figura 3.1 representa.

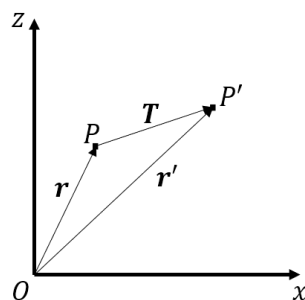


Figura 3.1: Operação de translação em \mathbf{T} levando um ponto P , localizado por \mathbf{r} , ao ponto P' em \mathbf{r}'

3.1.2 Operação de rotação

Uma rotação no \mathbb{R}^3 é uma transformação linear das coordenadas, realizada em torno de um ponto fixo e de modo que cada ponto do espaço é mapeado para um outro ponto, preservando as distâncias entre os pontos. Para representar essa transformação, utiliza-se a matriz de rotação R . Assim, podemos descrever a transformação por

$$\mathbf{r} \rightarrow R\mathbf{r},$$

onde \mathbf{r} é um vetor que indica a posição de um ponto qualquer do espaço, P , antes de sofrer a operação.

Toda transformação de rotação é essencialmente dada em duas dimensões e um único ângulo θ em torno de um eixo arbitrário perpendicular ao plano da rotação. No caso particular onde este eixo é o eixo z , a matriz R é dada por

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Note que, diferentemente da translação, a rotação mistura diferentes componentes vetoriais entre si. No caso mais geral em que a rotação não se dá em torno de um dos eixos, precisamos escrever a matriz 3×3 que descreve a rotação, já que neste caso as 3 componentes do vetor misturam entre si. De qualquer forma, para esta dissertação não necessitaremos da forma explícita da matriz de rotação.

3.1.3 Operação de reflexão

A operação de reflexão é uma transformação geométrica definida a partir de um plano α . Essa transformação mapeia os pontos (x, y, z) para os pontos (x', y', z') de modo que a distância d entre eles seja cortada ao meio perpendicularmente pelo plano α . Por exemplo, uma reflexão no plano $z = 0$ leva todos os pontos

$$(x, y, z) \rightarrow (x, y, -z),$$

conforme ilustrado na Figura 3.2a. Já, se o plano de simetria for transladado para $z = z_0$, a transformação de reflexão será da forma $(x, y, z) \rightarrow (x, y, 2z_0 - z)$, como mostrado na Figura 3.2b.

3.1.4 Operação de simetria

Quando uma operação de transformação faz com que o sistema coincida consigo mesmo, ela é chamada de operação de simetria do problema. Em outras palavras, se as configurações do sistema antes e depois da transformação forem indistinguíveis, então essa é uma operação de simetria do problema.

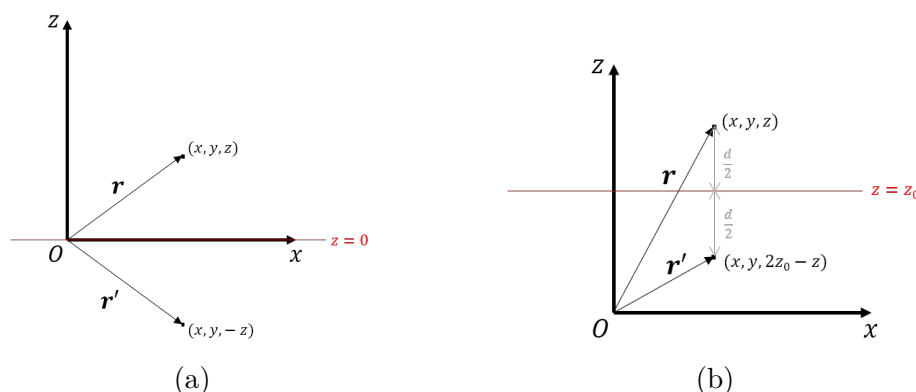


Figura 3.2: Operação de reflexão em diferentes planos. (a) Reflexão no plano $z = 0$, onde os pontos (x, y, z) são mapeados para $(x, y, -z)$. (b) Reflexão no plano $z = z_0$, onde os pontos (x, y, z) são mapeados para $(x, y, 2z_0 - z)$.

Para nosso estudo de eletromagnetismo, uma operação é dita de simetria quando a distribuição de cargas ρ e a densidade de corrente \mathbf{J} ficam invariantes sob a operação. Para avaliarmos isso, devemos saber como essas grandezas se transformam, visto que até o momento vimos apenas como cada operação relaciona pontos do espaço. Ao realizarmos uma operação de translação, rotação ou reflexão, a carga que originalmente estava na posição \mathbf{r} é transportada para a nova posição \mathbf{r}' definida nas subseções anteriores. Note que todas as operações acima preservam o volume (diferentemente de outras simetrias que estudaremos posteriormente). Dessa forma, obtemos a nova densidade de carga fazendo $\rho'(\mathbf{r}', t) = \rho(\mathbf{r}, t)$, que significa que a densidade de cargas em um ponto \mathbf{r}' após uma translação, rotação ou reflexão é dada pela densidade de cargas no ponto que correspondia ao ponto \mathbf{r} antes da operação. Se a operação realizada corresponder a uma simetria do sistema, então teremos $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}', t)$. Para campos vetoriais, como a corrente elétrica, por exemplo, devemos analisar a lei de transformação mais cuidadosamente, como faremos na próxima seção.

3.1.5 Lei de transformação para campos vetoriais

Desejamos nesta seção estabelecer a lei de transformações para corrente elétrica, que será válida também para outros campos vetoriais, em espe-

cial para o campo elétrico. Podemos ganhar intuição pensando em um caso particular de corrente elétrica: uma carga puntiforme se deslocando com velocidade \mathbf{v} . Imaginemos que originalmente a carga estava em um posição \mathbf{r} . Realizar uma translação por um vetor \mathbf{T} faz com que a carga agora passe a ocupar uma nova posição \mathbf{r}' , porém não afeta a velocidade com a qual a carga está se deslocando. Dessa forma, após a translação teremos o mesmo vetor \mathbf{v} , porém agora em um ponto deslocado, como ilustra a figura 3.3a. Generalizando, teremos que a corrente após uma translação sofre a transformação $\mathbf{J}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{J}'(\mathbf{r}') = \mathbf{J}(\mathbf{r})$, que é análoga ao que ocorre para a densidade de cargas. É conveniente expressar a lei de transformação da seguinte forma equivalente: $\mathbf{J}'(\mathbf{r}') = \mathbf{J}(\mathbf{r}' - \mathbf{T})$, que a deixa escrita inteiramente em termos do argumento \mathbf{r}' onde desejamos calcular o campo após a transformação.

No caso da rotação a situação é um pouco distinta, uma vez que a rotação mistura as direções. Assim, se originalmente a carga está viajando com uma velocidade \mathbf{v} na posição \mathbf{r} , após a rotação a carga estará viajando em uma direção $\mathbf{v}' = R\mathbf{v}$ na posição $\mathbf{r}' = R\mathbf{r}$, conforme ilustrado na figura 3.3b. A lei de transformação para a corrente será agora $\mathbf{J}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{J}'(\mathbf{r}') = R\mathbf{J}(\mathbf{r}) = R\mathbf{J}(R^{-1}\mathbf{r}')$, na qual R^{-1} denota o inverso da matriz R .

As transformações por reflexão em campos vetoriais apresentam uma distinção importante em relação às demais, podendo ser categorizadas em dois casos distintos: vetores polares e pseudovetores. No primeiro caso, exemplificado por vetores como velocidade, corrente elétrica, força e campo elétrico, a reflexão do campo em um plano implica na inversão do sinal da coordenada normal ao plano para cada vetor do campo, enquanto mantém as outras coordenadas inalteradas. Podemos pensar nessa transformação diretamente imaginando como é a imagem de uma seta por reflexão em um espelho. Por exemplo, uma reflexão no plano XY resulta na transformação de cada vetor do campo

$$v_x(x, y, z) \rightarrow v'_x(x', y', z') = v_x(x', y', -z') \quad (3.1)$$

$$v_y(x, y, z) \rightarrow v'_y(x', y', z') = v_y(x', y', -z') \quad (3.2)$$

$$v_z(x, y, z) \rightarrow v'_z(x', y', z') = -v_z(x', y', -z'). \quad (3.3)$$

3.1.6 Lei de transformação para pseudovetores

Diversas grandezas se transformam por rotações como vetores, como por exemplo velocidade, momento angular, campo elétrico e campo magnético. Contudo, nem todas essas grandezas se transformam da mesma forma por reflexão. Isso pode ser motivado de maneira simples lembrando a definição de produto vetorial. Se $\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ então temos que suas componentes são definidas por

$$u_x = v_y w_z - v_z w_y \quad (3.4)$$

$$u_y = v_z w_x - v_x w_z \quad (3.5)$$

$$u_z = v_x w_y - v_y w_x. \quad (3.6)$$

Se \mathbf{v} e \mathbf{w} se transformam por reflexão de acordo com as equações (3.1–3.3) então \mathbf{u} terá que se transformar de maneira oposta! Nesse ponto, podemos desenvolver uma intuição pensando em alguma grandeza física definida como produto vetorial entre vetores, por exemplo a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$. Neste caso, sabemos que a direção é dada pelo eixo instantâneo de rotação e o sentido é convencionalizado, por exemplo pela regra da mão direita. Se uma partícula descreve um movimento circular em torno de z , então uma reflexão em um plano contendo z inverte o sentido da rotação e, portanto, o sinal da velocidade angular. Isso é o oposto do ocorre para vetores “verdadeiros”. Da mesma forma, ao refletirmos em um plano perpendicular à $\boldsymbol{\omega}$, no caso do exemplo o plano do movimento, por exemplo, teremos que o sentido do movimento fica inalterado, donde a velocidade angular não muda, também contrariamente a um vetor “verdadeiro”. Claro que “verdadeiro” não é uma boa classificação. Dizemos que a classe de vetores que se transforma de acordo com a regra da seção anteriores são vetores polares. A ideia é que este tipo de vetor não tem arbitrariedade na definição de seu sentido, é uma seta com polos bem definidos. Por exemplo, o vetor velocidade é assim, é fisicamente bem claro a distinção entre uma carga indo para a direita ou para a esquerda. Já grandezas que se transformam por reflexão de modo oposto a vetores polares são ditas pseudovetores ou vetores axiais. O nome

axial indica que para este grupo temos definido a priori apenas a direção do vetor, isto seu eixo. A direção deve ser arbitrada. Além de velocidade angular, momento angular e outras grandezas físicas entram neste grupo. Para mostrar que uma grandeza é pseudovetorial devemos encontrar alguma relação sua com demais grandezas físicas cuja regra de transformação seja conhecida. Por exemplo, no caso do campo magnético ele é definido a partir da força que realiza em cargas em movimento: $\mathbf{F}_{mag} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Uma vez que toda força é vetor polar, e também a velocidade está neste grupo, o campo magnético deve ser um pseudovetor. Aqui há ainda implícita a hipótese de que a carga elétrica é um escalar, voltaremos nisso adiante.

Em resumo, para um pseudovetor \mathbf{v} , sua imagem sob uma reflexão no plano $z = 0$ pode ser expressa por

$$v_x(x, y, z) \rightarrow v'_x(x', y', z') = -v_x(x', y', -z') \quad (3.7)$$

$$v_y(x, y, z) \rightarrow v'_y(x', y', z') = -v_y(x', y', -z') \quad (3.8)$$

$$v_z(x, y, z) \rightarrow v'_z(x', y', z') = v_z(x', y', -z'). \quad (3.9)$$

As Figuras 3.3 e 3.4 ilustram como cada vetor \mathbf{v} é transformado frente a cada operação descrita.

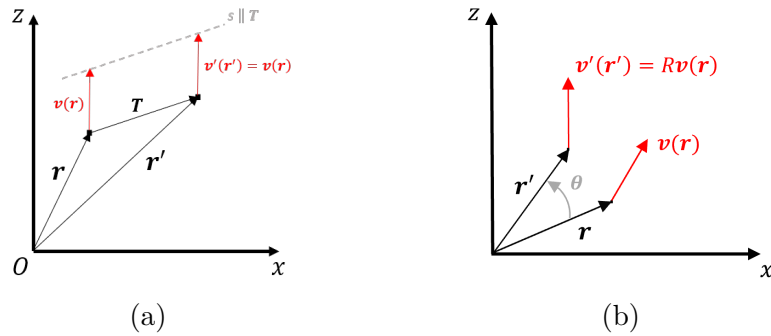


Figura 3.3: Representação da transformação de um vetor $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ em $\mathbf{v}'(\mathbf{r}')$ frente a uma (a) operação de translação por \mathbf{T} contido no plano XZ . (b) Operação de rotação em θ em torno de \hat{y} , onde o vetor transformado mantém o módulo, porém com direção rotacionada em θ .

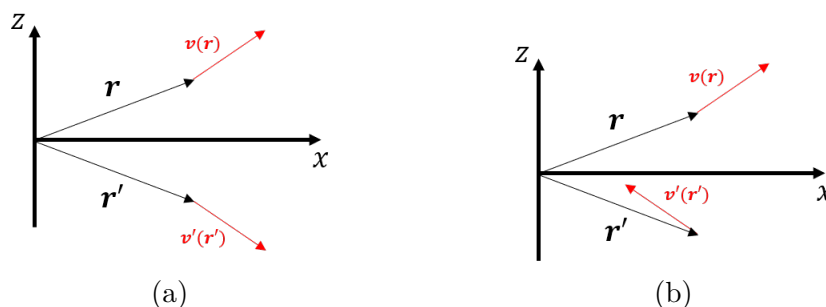


Figura 3.4: Representação de uma operação de reflexão de um (a) vetor polar $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ sobre o plano $z = 0$. Note que a única componente de $\mathbf{v}'(\mathbf{r}')$ que sofre inversão em relação ao vetor original é v'_z . (b) pseudovetor $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ sobre o plano $z = 0$. Note que a única componente de $\mathbf{v}'(\mathbf{r}')$ que não sofre inversão em relação ao vetor original é v'_z .

3.2 O que as simetrias nos permitem inferir sobre campos elétricos e magnéticos

Nas subseções a seguir faremos uma análise através das simetrias de certas configurações de cargas para ganharmos a intuição de como devem ser os campos elétrico e magnético antes mesmo de aplicarmos a Lei de Gauss para obter um resultado analítico.

3.2.1 Análise das Simetrias dos campos gerados por um Fio Infinito Uniformemente Carregado

Para analisar o campo elétrico neste problema, começamos estabelecendo um referencial no qual o eixo de simetria do fio coincide com o eixo z do sistema de coordenadas cilíndricas, como o indicado na Figura 3.5. Neste sistema de coordenadas a expressão mais geral para o campo elétrico é dada por

$$\mathbf{E}(r, \theta, z) = E_r(r, \theta, z)\hat{r} + E_\theta(r, \theta, z)\hat{\theta} + E_z(r, \theta, z)\hat{z},$$

onde r é a distância do ponto em consideração ao eixo vertical z (muita vezes representado por ρ), e θ é o ângulo entre a direção de \hat{x} e a reta que une a origem à projeção vertical do ponto no plano XY . \hat{z} é o vetor unitário paralelo

à direção z , enquanto os demais unitários estão no plano perpendicular ao eixo z , com \hat{r} apontando na direção radial ao eixo z e $\hat{\theta}$ perpendicular ao unitário radial e ao eixo z .

Note que até aqui não falamos nada sobre o fio, apenas definimos sistemas de coordenadas e um referencial. Para determinar as simetrias, devemos considerar tanto a sua geometria quanto as suas propriedades elétricas.

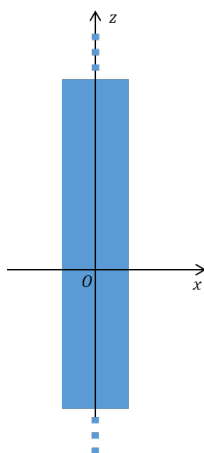


Figura 3.5: Fio retilíneo infinito com densidade de carga ρ (em azul) coincidente com o eixo z do sistema de coordenadas cilíndricas. Note que o eixo x é escolhido de forma arbitrária perpendicularmente ao fio, portanto ele pode sempre representar — e ao longo deste trabalho ele irá representar — o eixo definido por \hat{r} .

Ao fazer esta análise devemos ter cautela, pois a infinitude do fio não garante automaticamente simetria por translação. De fato ao se caminhar paralelamente ao eixo z , a geometria do problema é conservada, no entanto, para que uma translação ao longo do eixo z seja uma operação de simetria, é necessário que tanto a densidade de carga $\rho(\mathbf{r}, t)$ quanto a densidade de corrente $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ se mantenham inalteradas após a transformação.

Começemos lidando com o caso eletrostático, onde $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}$. A condição para que a translação definida pelo vetor $\mathbf{T} = T\hat{z}, T \in \mathbb{R}$ seja uma operação de simetria é que $\rho(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}')$, e é aqui que se faz importante a hipótese de "uniformemente carregado". E Portanto, translações ao longo do eixo z são operações de simetria do problema.

Consequentemente, o campo elétrico gerado pelo fio também herda essa simetria, o que implica que $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ não pode depender de z . Portanto, o campo elétrico pode ser expresso como

$$\mathbf{E}(r, \theta) = E_r(r, \theta)\hat{r} + E_\theta(r, \theta)\hat{\theta} + E_z(r, \theta)\hat{z},$$

onde a dependência em z desaparece, mas simetria por translação por si só não exclui a possibilidade de uma componente $E_z\hat{z}$ no campo elétrico, como ilustrado na Figura 3.6.

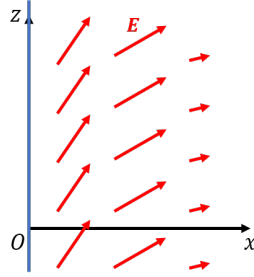


Figura 3.6: Representação de um campo vetorial \mathbf{E} que não depende da coordenada z , mas ainda pode ter uma componente E_z

Uma vez que supusemos a carga no fio distribuída de forma uniforme, temos então que o campo elétrico também deve ter simetria por rotação em torno do fio. De maneira análoga ao argumento de translação, podemos afirmar que \mathbf{E} é independente de θ , nos deixando com

$$\mathbf{E}(r) = E_r(r)\hat{r} + E_\theta(r)\hat{\theta} + E_z(r)\hat{z}$$

Isso é o mais longe que simetria por rotação + translação nos leva — estas simetrias permitem apenas determinar a dependência funcional dos campos mas nada sobre sua direção. Resta, contudo, uma simetria que ainda não exploramos: simetria por reflexão. O plano $z = 0$ é um plano de simetria.

Cada vetor do campo, no ponto localizado por $\mathbf{r} = (r, \theta, z)$, é levado pela reflexão no plano $z = 0$ para $\mathbf{r}' = (r, \theta, -z)$, e suas componentes são transformadas de $\mathbf{E} = (E_r, E_\theta, E_z)$ para $\mathbf{E}' = (E_r, E_\theta, -E_z)$, conforme ilustrado na Figura 3.7.

Uma vez que esta é uma operação de simetria do problema podemos

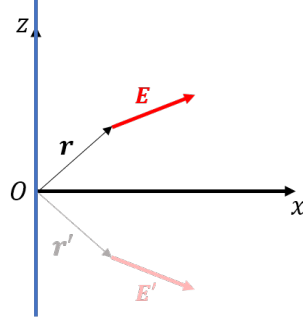


Figura 3.7: Ilustração da reflexão do vetor do campo \mathbf{E} em torno do plano $z = 0$. Observa-se a transformação das componentes do vetor, destacando a inversão da componente E_z .

afirmar que $\mathbf{E} = \mathbf{E}'$, o que resulta em $E_z = 0$. , a expressão geral do campo se reduz a

$$\mathbf{E}(r) = E_r(r)\hat{r} + E_\theta(r)\hat{\theta}.$$

Há, ainda, um outro plano de simetria que ainda não exploramos: qualquer plano que contenha o eixo do fio, por exemplo o plano $y = 0$. Caso o campo elétrico tivesse componente azimutal em $\hat{\theta}$, esta componente não seria preservada nesta reflexão, conforme ilustra a figura 3.8.

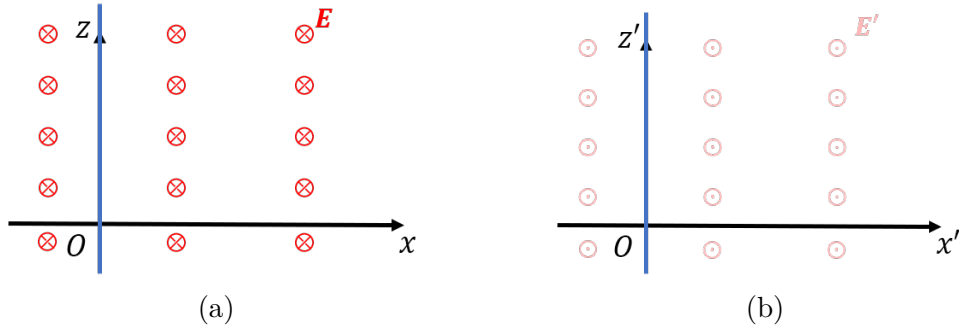


Figura 3.8: (a) Representação da componente azimutal do campo elétrico \mathbf{E} . (b) Reflexão da Figura 8a no plano XZ (ou rZ em coordenadas cilíndricas), invertendo apenas as componentes E_θ perpendicular ao plano de reflexão.

Portanto, temos a expressão particular do campo elétrico gerado por um

fio retilíneo infinito uniformemente carregado:

$$\mathbf{E} = E_r(r)\hat{r}.$$

Note que já havíamos suposto este resultado ao representar as linhas de campo elétrico produzidas pelo fio de cargas. A aplicação da lei de Gauss agora leva imediatamente à dependência $1/r$ que havíamos obtido anteriormente. Para o público de ensino médio não acreditamos que valha entrar nos detalhes conceituais expostos neste capítulo, mas acreditamos que em um curso de física básica é bem importante detalhar o papel de cada simetria antes da aplicação da lei de Gauss.

Por ser um problema puramente eletrostática, já esperamos que não haja nenhum campo magnético produzido por esta densidade de carga. Isso pode, contudo, ser demonstrado também por argumentos de simetria. Levando em conta a simetria por rotação e translação, concluímos que $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ pode ser expresso na forma

$$\mathbf{B}(r, \theta, z) = B_r(r)\hat{r} + B_\theta(r)\hat{\theta} + B_z(r)\hat{z}.$$

Contudo, o campo magnético é um pseudovetor, o que pode ser verificado ao considerar a lei de Biot-Savart. Nela, o campo infinitesimal $d\mathbf{B}$ gerado por um elemento infinitesimal de corrente $I d\mathbf{l}$ é dado por

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Observa-se que o campo $d\mathbf{B}$ resulta do produto vetorial entre o elemento de corrente $I d\mathbf{l}$ e o vetor unitário $\hat{\mathbf{r}}$, que aponta da fonte para o ponto de interesse. Como todo vetor resultante de um produto vetorial entre dois vetores polares, o campo magnético possui propriedades distintas sob reflexões, diferindo do campo elétrico. Dessa forma, não podemos aplicar diretamente os resultados obtidos anteriormente para analisar sua simetria.

A Figura 3.9a ilustra o campo pseudovetorial \mathbf{B} produzido por um fio, considerando as informações que temos até o momento de simetria por translação e rotação. Note que se em um lado do fio o campo está saindo do plano

da folha, no outro está entrando, como requer a simetria por rotação. Ao aplicar a operação de reflexão em torno de um plano que contenha o fio, apenas a componente do campo perpendicular ao plano de simetria, B_θ , permanece inalterado, conforme ilustrado na figura 3.9b, de forma que o campo magnético simplifica para

$$\mathbf{B} = B_\theta(r)\hat{\theta}.$$

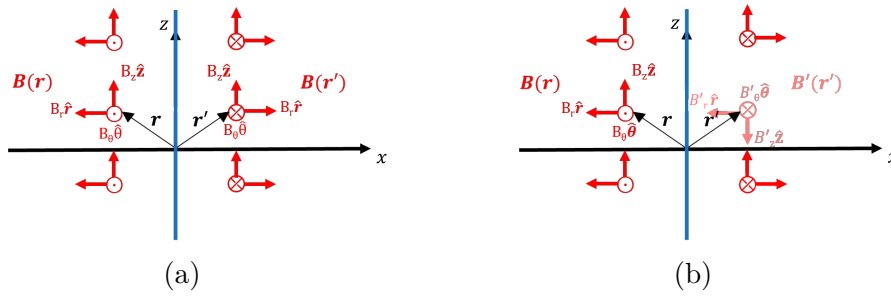


Figura 3.9: (a) Representação de um campo pseudovetorial \mathbf{B} produzido por ρ que possui simetria translacional em z e rotacional em torno do fio. (b) Reflexão de um pseudovetor localizado por \mathbf{r} em torno plano YZ . Note que ao comparar as duas figuras, somente a componente B_θ do campo que havia em \mathbf{r}' foi conservada após a reflexão.

A simetria conhecida nesse problema que ainda nos resta é a de reflexão sob um plano $z = k$, $\forall k \in \mathbb{R}$, que por simplicidade escolhemos o plano $z = 0$, conforme ilustra a Figura 3.10a. Ao aplicar a operação de reflexão sobre um vetor $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, este é levado via reflexão a um ponto localizado por \mathbf{r}' , tal como mostrado na Figura 3.10b. Perceba que, como \mathbf{B} é um pseudovetor, apenas sua componente perpendicular ao plano de reflexão ($z = 0$) não sofre inversão. No entanto, como acabamos de discutir, $B_z = 0$. Desta forma, o campo também não pode ter componente azimuthal, donde $\mathbf{B} = 0$.

As simetrias desse problema nos permitem concluir que um fio com densidade uniforme de carga e sem transportar corrente elétrica não pode produzir campo magnético.

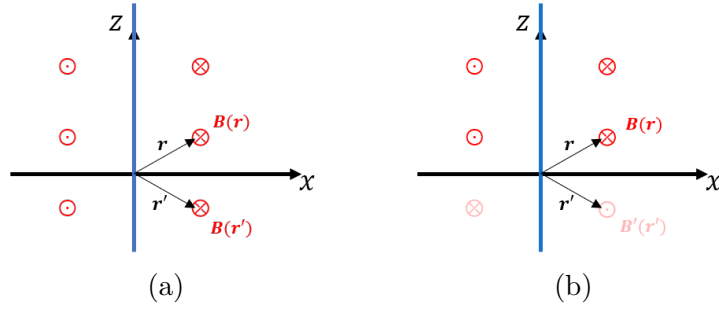


Figura 3.10: (a) Representação de um campo pseudovetorial \mathbf{B} que possui apenas componente $\hat{\theta}$. (b) Reflexão de um pseudovetor do campo localizado por \mathbf{r} .

3.2.2 Análise das Simetrias dos Campos Gerado por um Fio Infinito percorrido por uma Corrente Uniforme

Vamos agora, através do método de análise de simetrias, examinar os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} gerados por um fio infinito percorrido por uma corrente uniforme e constante. Consideremos a corrente elétrica na direção paralela ao eixo de simetria do fio, isto é, $\mathbf{J} = J_0 \hat{z}$, conforme ilustrado na figura 3.11, e suponhamos que $\rho = 0$.

Poderíamos repetir a mesma análise da seção anterior, porém aqui pegaremos um atalho. Note que a única simetria que perdemos com relação ao caso do item anterior é a reflexão em torno plano perpendicular ao fio, já que agora esta reflexão inverte a corrente e não é, portanto, uma operação de simetria. Portanto, o máximo que as simetrias por reflexão, rotação e translação nos permitem afirmar neste caso para os campos é

$$\mathbf{E} = E_r(r)\hat{r} + E_z(r)\hat{z},$$

$$\mathbf{B} = B_\theta(r)\hat{\theta}.$$

Na realidade, sabemos que uma corrente elétrica constante produz apenas campo magnético, mas com as simetrias que vimos é impossível descartar a

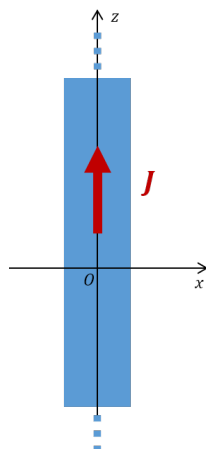


Figura 3.11: Fio retilíneo infinito com densidade de carga ρ percorrido uma densidade de corrente \mathbf{J} com o eixo de simetria coincide com o eixo z do sistema de coordenadas cilíndricas.

existência de um campo elétrico. Porém, se evocarmos ainda a simetria por inversão temporal conseguimos ir mais longe: ao inverter o tempo a corrente elétrica deve inverter o seu sinal, assim como o campo magnético, mas o campo elétrico permanece inalterado. Desta forma, uma inversão temporal seguida de uma reflexão no plano $z = 0$ é uma simetria do problema. A componente $\hat{\phi}$ de um pseudovetor ganha um sinal em ambas as operações, donde o campo magnético que obtivemos acima é consistente com esta simetria. Por outro lado, a componente \hat{z} do campo elétrico fica invariante pela inversão temporal, mas ganha um sinal pela reflexão, donde deve ser descartada. A componente radial do campo elétrico, contudo, é invariante por ambas as operações e ainda não pode ser descartada. Mas ela também se mostra nula ao empregarmos outro princípio basilar do eletromagnetismo: sua linearidade. Afinal, a reflexão no plano perpendicular ao fio é equivalente a trocar \mathbf{J} por $-\mathbf{J}$. Pela linearidade, isso deve trocar os sinais de ambos os campos. Em outras palavras, a linearidade nos garante que apenas componentes dos campos que trocam de sinal por uma reflexão devem ser mantidas. Isso é compatível com a componente azimutal do campo magnético, mas descarta a componente radial do campo elétrico. Após todas essas considerações, chegamos então em

$$\mathbf{E} = 0,$$

$$\mathbf{B} = B_\theta(r)\hat{\theta}.$$

Por fim, a componente azimutal do campo magnético pode ser determinado via lei de Ampère.

Antes de encerrar esta seção, gostaríamos de fazer alguns comentários: (i) Quando temos um fio transportando uma corrente elétrica temos um campo elétrico também presente. Dentro do fio este campo é dado pela lei de Ohm. Isso não contradiz em nada o que fizemos, já que este campo não é produzido pela corrente elétrica mas sim por cargas superficiais acumuladas na superfície do fio [27]. (ii) Se em vez de assumir a corrente em \hat{z} tivéssemos considerado a corrente em $\hat{\phi}$ — que corresponde a um solenoide — teríamos a simetria por reflexão em $z = 0$ mas perderíamos a simetria por reflexão em um plano contendo o eixo de simetria do fio. Neste caso, nosso argumento resultaria em um campo magnético na direção \hat{z} .

3.2.3 Monopolos magnéticos

Nesta seção mostraremos que os argumentos de simetria que desenvolvemos ao longo deste capítulo permite uma análise introdutória de tópicos que não costumam ser cobertos em um curso de física básica. Primeiramente, comecemos com uma carga elétrica puntiforme na origem. Escolhemos coordenadas esféricas para lidar com o problema, de modo que a simetria por rotação já nos permite concluir que tanto o campo magnético quanto o elétrico podem depender apenas de r , isto é $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(r)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(r)$. Imagine que desejamos calcular o campo em um ponto P . A posição da carga e o ponto P definem uma reta e qualquer plano de simetria contendo esta reta é um plano de simetria do problema. Em particular, podemos escolher o plano π_1 perpendicular à $\hat{\theta}$ e o plano π_2 perpendicular à $\hat{\phi}$. Dois planos de simetria perpendiculares entre si são incompatíveis com qualquer pseudovetor, donde $\mathbf{B} = 0$. π_1 garante que $E_\theta = 0$ enquanto π_2 implica na nulidade de E_ϕ . Desta forma, uma carga elétrica puntiforme em repouso produz apenas um campo

elétrico radial, como esperado.

A situação fica mais rica ao considerarmos a possibilidade de um monopolo magnético. Consideramos ele em repouso na origem. De maneira análoga ao caso elétrico, caso exista um monopolo magnético de intensidade g , a força sobre ele será $\mathbf{F} = g\mathbf{B}$. O monopolo sentirá uma força elétrica apenas se estiver em movimento. Embora em muitos aspectos o monopolo magnético seja o simétrico de uma carga elétrica, trocando-se campos elétricos por magnéticos, há diferenças fundamentais. Em especial, uma vez que força é um vetor e o campo magnético é um pseudovetor concluímos que g deve ser um pseudoescalar, isto é, trocar de sinal por reflexão. Assim, agora π_1 e π_2 não são mais planos de simetria. No entanto, a combinação de ambas as reflexões em sucessão é uma operação de simetria, já que a g troca de sinal duas vezes. Contudo, essa é uma simetria mais fraca do que a anterior e permite excluir menos componentes. Em particular, não podemos excluir as componentes radiais nem do campo elétrico nem do campo magnético. A primeira por ser invariante nas duas operações, e a segunda por trocar o sinal em ambos os casos. Por outro lado, podemos descartar as componentes azimutal e zenital de ambos os campos, já que em ambos os casos elas trocam o sinal em apenas um das operações.

Destacamos, então, essa assimetria. Enquanto simetria por reflexão sozinha é capaz de garantir que cargas elétricas em repouso não produzem campo magnético e produzem um campo elétrico radial, estas mesmas simetrias são incapazes de descartar um campo elétrico radial no caso de um monopolo magnético em repouso. Por outro lado, se levarmos em conta que o eletromagnetismo é linear teremos que cada reflexão individualmente deve apenas inverter o campo. Neste caso, a componente radial do campo elétrico é incompatível com isso e não pode estar presente. Assim, suplementando simetria por reflexão com linearidade temos uma situação totalmente simétrica da carga elétrica escalar com o monopolo magnético pseudoescalar. O campo magnético deste último pode ser determinado pela lei de Gauss do magnetismo e assume a mesma forma, caindo com o inverso do quadrado da distância. Contudo, por ter estabelecido tal paralelo entre um escalar e um pseudoescalar, a linearidade do eletromagnetismo tem outra implicação:

não podemos de fato garantir que a carga elétrica é um escalar. Teremos os mesmos resultados se considerarmos que a carga elétrica é um pseudoescalar, desde que agora consideremos que o campo elétrico é um pseudovetor e o campo magnético um vetor. Caso o monopolo magnético existisse ele seria então um escalar verdadeiro. As conclusões que chegamos para o fio nas duas subseções anteriores permaneceriam válidas desde que suplementássemos as simetrias de reflexão com a linearidade. De fato, teorias modernas que se dedicam a estudar partículas elementares lidam corriqueiramente com cargas que são pseudoescalares e acreditamos que possa ter um papel motivador no ensino de física básica discussões introdutórias no contexto do eletromagnetismo clássico. Comentamos, por fim, que embora usualmente seja mais conveniente tratar cargas elétricas como escalares tanto por reflexão quanto por inversão temporal, em certos casos pode ser interessante definir diferente. Por exemplo, na interpretação de Stueckelberg-Feynman que considera que antipartículas (por exemplo o pósitron, positivo) pode ser pensado com sua partícula correspondente andando para trás no tempo, cenário no qual uma inversão temporal vem acompanhada de uma troca do sinal de carga.

3.3 Transformações de simetria não usuais

Nesta seção discutiremos algumas transformações de simetria que não costumam ser abordadas em cursos de física básica. Argumentaremos que é possível uma menção introdutória a elas e veremos algumas aplicações neste e no próximo capítulo.

3.3.1 Simetria de escala

A lei da eletrostática, descrita pela Lei de Coulomb, caracteriza-se como uma lei de potência, uma vez que pode ser expressa na forma

$$y = c \cdot x^p,$$

onde x e y são variáveis do problema, c é uma constante de proporcionalidade, e p é o expoente, que, nesse caso particular, é igual a -2 . Uma das propriedades das leis de potência é sua invariância por mudanças de escala. Note que ao escalar a grandeza x por um fator a , temos

$$y = c \cdot (a \cdot x)^p = (c \cdot a^p) \cdot x^p,$$

o que demonstra que a forma da lei não se altera, apenas a constante é reescalada para $c \cdot a^p$. Essa invariância em leis desse tipo sugere a existência de uma simetria por escala.

Um exemplo contrastante é o chamado Potencial de Yukawa, amplamente utilizado em física nuclear [28], e expresso por

$$V(r) \propto \frac{e^{-\mu r}}{r},$$

onde μ é uma constante. Observe que a dependência exponencial introduz uma escala natural de comprimento a essa lei, $\frac{1}{\mu}$, que possui uma interpretação de alcance dessa interação. O essencial é que leis envolvendo exponenciais, senos ou outras funções similares exigem argumentos adimensionais, fazendo necessário uma constante como μ , que tem dimensão de comprimento⁻¹, definindo assim uma chamada escala natural. Em contraste, leis de potência, por não dependerem de uma escala associada, permitem simetrias por escala. A ideia é que não existe escala natural do que é próximo ou longe de uma carga puntiforme, diferentemente do que ocorre em Yukawa, onde $r \gg 1/\mu$ pode ser considerado estar longe da fonte de potencial.

Vejamos agora como isso se aplica no caso da eletrostática: considere uma carga puntiforme gerando, em um ponto P , um campo elétrico \mathbf{E} de intensidade proporcional a q/r^2 (Figura 3.12a). Suponha que apliquemos uma transformação de escala, levamos um ponto do espaço localizado por \mathbf{r} para $\mathbf{r}' = \alpha \mathbf{r}$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$. Nesse caso, o campo em \mathbf{r}' será reduzido por um fator α^2 (3.12b), o que implica que reescalar essa configuração altera o campo. Contudo, ao combinar essa transformação com uma reescala simultânea da carga, $q \rightarrow \alpha^2 q$, a invariância é restaurada (Figura 3.12c). Uma vez que essa

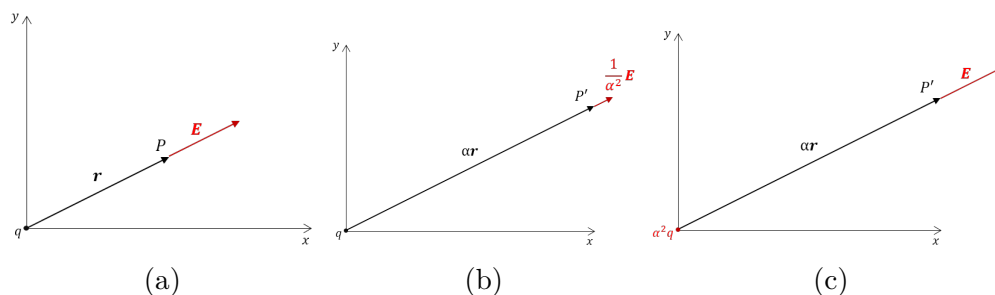


Figura 3.12: Transformação por escala para uma carga puntiforme $q > 0$ centrada na origem. Note que de (a) para (c) o ponto P foi levado ao ponto P' , enquanto o campo \mathbf{E} permaneceu invariante

transformação nos permite encontrar invariâncias, podemos explorar outras soluções a fim de verificar se há simetria em alguma delas.

Para uma distribuição linear de carga, como no caso de um fio infinito uniformemente carregado, a densidade linear é dimensionalmente dada por $\lambda = \frac{Q}{L}$. Ao aplicarmos a transformação de escala mencionada acima, o comprimento L transforma-se em αL e a carga Q em $\alpha^2 Q$, de modo que λ deve escalar como $\alpha \lambda$. Enquanto anteriormente usamos a dependência do campo com a distância para ver como a carga re-escala, podemos agora fazer o oposto. Pela linearidade, vemos que o campo produzido pelo fio uniformemente carregado deve ser proporcional à λ , o qual por uma transformação de escala ganha um fator α . Assim, para manter o campo invariante vemos que este deve depender da distância com o inverso da distância, e não com o quadrado da distância como no caso de uma carga puntiforme.

Vejamos o que ocorre agora no caso de uma densidade superficial σ . Assim, como em um plano infinito uniformemente carregado, ela permanece inalterada sob um reescalamento do sistema. Isso ocorre porque $\sigma = \frac{Q}{A}$, e tanto a carga Q quanto a área A escalam proporcionalmente a α^2 , mantendo σ constante.

Considere, agora, um plano infinito contendo uma distribuição uniforme de carga σ . Ao reescalarmos o problema, a distribuição de cargas fica invariante e temos, portanto, uma simetria. Isso é diferente do caso de uma carga puntiforme, por exemplo. Neste último, mapeamos dois problemas

distintos, já que a carga muda. O fato da reescala no problema do plano infinito ser uma simetria do sistema mostra que o campo elétrico é invariante por reescala. Contudo, ao reescalarmos o espaço mudamos a distância para o plano. Vemos, portanto, que o campo produzido por um plano infinito com densidade de carga uniforme deve ser uniforme, algo que já havíamos obtido pelo argumento de linhas de campo. Note que se o plano for finito nosso argumento não se aplica: afinal a reescala afetará o tamanho do plano, embora o σ permaneça constante.

3.3.2 Simetria de inversão de Kelvin

A inversão é um mapeamento bijetivo que relaciona pontos no interior e no exterior de uma esfera, com aplicações amplamente exploradas na geometria, originando o subcampo conhecido como geometria inversiva [29].

No século XIX, Kelvin demonstrou que, no contexto da eletrostática, a inversão é uma operação de simetria. Isso implica que as soluções das equações de campo elétrico podem ser transformadas em novos campos que continuam a satisfazer as mesmas equações após a aplicação da inversão. Nesta seção, apresentaremos essa transformação e mostraremos o porquê desta ser uma operação de simetria. Posteriormente, na 3.5, exploraremos uma aplicação prática dessa simetria ao abordar o método das imagens em uma esfera condutora.

Dado um ponto \mathcal{O} (denominado de centro de inversão) e um círculo de raio R , a inversão é definida pelo mapeamento que leva um ponto, P , com coordenadas esféricas (r_0, θ_0, ϕ_0) ao seu ponto imagem, P' , com coordenadas (r_i, θ_i, ϕ_i) , onde

$$r_i = \frac{R^2}{r_0}, \quad \theta_i = \theta_0, \quad \phi_i = \phi_0,$$

conforme ilustrado na Figura 3.13.

Note que este é um mapeamento bijetivo, e se $r_0 < R$, então $r_i > R$, de modo que esta operação troca o interior de uma esfera pelo exterior e vice-versa. Além disso, aplicar duas vezes o operador de inversão equivale à operação identidade. Devido a essas propriedades, a inversão por uma esfera

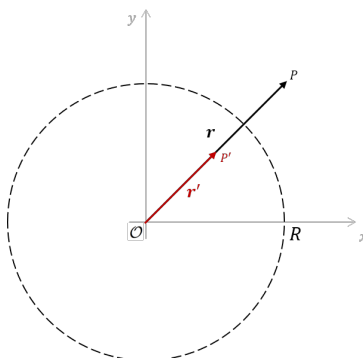


Figura 3.13: Transformação por Inversão levando um ponto P , fora da esfera de inversão, a um ponto P' , dentro da esfera de inversão.

é uma generalização da reflexão por um plano.

Agora que aprendemos como mapear pontos dentro da esfera para pontos fora dela, resta estabelecer a transformação para o campo, análoga à equação (3.9). Enquanto as operações de reflexão, rotação e translação são simetrias contidas nas leis do eletromagnetismo, e em outros ramos da física, nada garante que a inversão seja uma simetria. Em outras palavras, campos que são soluções das equações de Maxwell não necessariamente permanecem como soluções após a realização da inversão. No entanto, no caso eletrostático, a inversão é uma simetria, conforme estabelecido por Lord Kelvin no século XIX, sendo agora conhecida como transformação de Kelvin. Aqui apresentaremos uma demonstração elementar dessa simetria.

Vamos começar com um caso particular: uma carga puntiforme q colocada a uma distância R de \mathcal{O} . Realizando a inversão, a carga puntiforme permanece na mesma posição, sendo este um ponto de partida perfeito para nossa análise.

Antes da inversão ser realizada, o potencial em um ponto P , que está a uma distância r da carga puntiforme, é dado por

$$\phi(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (3.10)$$

Após a inversão, o ponto P , a uma distância r do centro de inversão \mathcal{O} , é levado a um ponto P' , distante $r' = \frac{R^2}{r}$ de \mathcal{O} . Nosso objetivo é relacionar

$\phi'(P')$ com $\phi(P)$. Podemos escrever essa regra de transformação na forma

$$\phi'(P') = \mathcal{T}\phi(P).$$

Como a distribuição de carga é a mesma após a inversão, sabemos que

$$\phi'(P') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\mathfrak{r}'}, \quad (3.11)$$

onde \mathfrak{r}' denota a distância entre P' e a carga puntiforme, conforme ilustrado na Fig.3.14a.

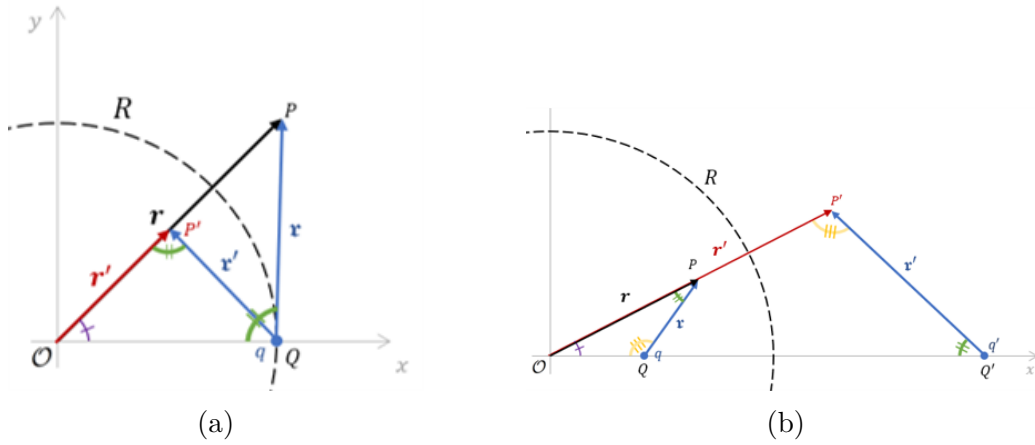


Figura 3.14: (a) Transformação de inversão que leva uma carga q sobre um ponto Q nela mesma. (b) Transformação de inversão que mapeia uma carga q sobre um ponto Q , dentro da esfera, em uma carga imagem q' sobre o ponto Q' , fora da esfera.

Precisamos agora relacionar \mathfrak{r}' com \mathfrak{r} , o que pode ser feito observando que os triângulos \mathcal{OPQ} e $\mathcal{OP'Q}$ são semelhantes. Isso se deve ao fato de que os ângulos $P\hat{O}Q = P'\hat{O}Q$ e que

$$\frac{R}{r} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}} = \frac{r'}{R}.$$

Por essa semelhança, vemos que

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{P'Q}}{\overline{OP'}} \Rightarrow \frac{\mathfrak{r}}{R} = \frac{\mathfrak{r}'}{r'}.$$

Substituindo isso na Eq.(3.11) e usando a Eq.(3.10), obtemos

$$\phi'(P') = \frac{R}{r'} \phi(P). \quad (3.12)$$

Isso implica que a regra de transformação \mathcal{T} é simplesmente multiplicar ϕ pelo fator $\frac{R}{r'}$.

Vamos agora considerar o caso em que a carga puntiforme não está na superfície da esfera de inversão. Suponha que, antes da inversão, uma carga puntiforme q está em uma posição Q fora da esfera de inversão. Após a inversão, essa carga é levada à posição Q' , como ilustrado na Fig.3.14b.

Se a inversão é uma simetria na eletrostática, então o campo no ponto P após a inversão deve corresponder a uma carga puntiforme na posição Q' , obedecendo à regra de transformação (3.12).

Começamos estabelecendo o campo originalmente produzido por q em uma posição P dentro da esfera, que é a situação de interesse na seção 3.5. Temos que $\frac{r}{r_0} = \frac{r'_0}{r'}$, estabelecendo que os triângulos \mathcal{OPQ} e $\mathcal{OP'Q'}$, ilustrados na Fig.3.14b, são semelhantes, pois também compartilham o ângulo no vértice \mathcal{O} . Isso, por sua vez, implica que $\frac{r}{r_0} = \frac{r'_0}{r'}$. Substituindo isso na Eq.(3.10), obtemos

$$\phi(P) = \frac{r'}{r_0} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \mathbf{r}'}.$$

Substituindo essa relação na regra de transformação (3.12), obtemos

$$\phi'(P') = \frac{q \frac{R}{r_0}}{4\pi\epsilon_0 \mathbf{r}'}, \quad (3.13)$$

o que mostra que

1. a inversão é de fato uma simetria, pois $\phi'(P')$ continua sendo o potencial de uma carga puntiforme (ele decresce com $1/\mathbf{r}'$);
2. a carga também deve ser transformada de acordo com a regra $q' = q \frac{R}{r_0}$.

Por superposição, podemos estender nossa análise para qualquer distribuição de carga na eletrostática.

Uma observação é necessária para distribuições contínuas de carga. Se, em um pequeno volume dV distante r_0 do centro de inversão, temos uma

carga $dq = \rho dV$, então, após a inversão, devemos ter, na posição imagem $\frac{R^2}{r_0}$, uma carga

$$dq' = \rho' \left(\frac{R^2}{r_0}, \theta_0, \phi_0 \right) dV' = \frac{R}{r_0} \rho(r_0, \theta_0, \phi_0) dV. \quad (3.14)$$

Sabemos que $dV = r_0^2 dr_0 d\Omega_0 = r_0^2 \left| \frac{dr_0}{dr'_0} \right| dr'_0 d\Omega'_0 = \frac{R^6}{r_0^6} dV'$. Substituindo esse resultado de volta na Eq.(3.14), vemos que uma distribuição de carga deve se transformar de acordo com

$$\rho' \left(\frac{R^2}{r_0}, \theta_0, \phi_0 \right) = \left(\frac{r_0}{R} \right)^5 \rho(r_0, \theta_0, \phi_0).$$

Raciocínios semelhantes podem ser aplicados a distribuições superficiais e lineares de carga para estabelecer suas regras de transformação.

3.4 Método das Imagens sem Mágica

Fenômenos envolvendo metais são de grande riqueza conceitual no ensino de eletromagnetismo. A grande mobilidade de cargas permite aplicações fascinantes, como a gaiola de Faraday e o gerador Van de Graaff. Além disso, há casos bem anti-intuitivos que podem despertar curiosidade nos estudantes. Por exemplo, duas esferas metálicas positivamente carregadas em geral se atraem quando estão próximas entre si (comparado com seus raios), algo decorrente da redistribuição de cargas [30, 31]. Contudo, a mesma mobilidade que origina uma física rica é ao mesmo tempo responsável por uma complexidade matemática considerável. De fato, em cursos de física básica nos restringimos quase que exclusivamente a distribuições prescritas de cargas, cujo campo pode ser encontrado por integração direta ou — quando há simetrias suficiente — via lei de Gauss. No ensino médio é ainda pior, e cobrimos casos apenas em que devemos superpor o campo produzido por cargas puntiformes. Nos metais, por outro lado, a distribuição de cargas não é conhecida a priori. Assim, mesmo os problemas mais simples — por exemplo, uma carga puntiforme próxima a um plano condutor infinito — acabam sendo tratados apenas em cursos mais avançados a partir da im-

sição de condições de contorno em equações diferenciais parciais, como feito, por exemplo, na seção 3.2 do livro *Introduction to Electrodynamics* de David J. Griffiths [32].

Nesta seção mostraremos que simetria pode ser um auxílio para lidar com alguns problemas envolvendo a interação entre cargas puntiformes e condutores. Abordaremos dois problemas: uma carga puntiforme próxima a um plano infinito metálico, e uma carga puntiforme próxima a uma esfera metálica. Neste último, analisamos tanto o caso em que a esfera está aterrada quanto o caso em que está isolada. Nossos resultados recuperam o que é obtido via método das imagens, mas pelo caminho que seguimos não é necessário falar em condição de contorno, equação de Laplace e nem adivinhar a posição e valor da carga imagem (daí o “sem mágica” no título da seção). Acreditamos que o caso do plano infinito pode ser levado para o ensino médio. Já o da esfera, embora também não necessite de nenhuma técnica que seja vista apenas no ensino superior, envolve argumentos mais sofisticados baseados na transformada de Kelvin que estudamos na seção anterior.

3.4.1 Plano metálico infinito

Dada uma carga elétrica puntiforme q localizada a uma distância d de um plano condutor infinito aterrado, deseja-se determinar o campo elétrico \mathbf{E} em todos os pontos do espaço.

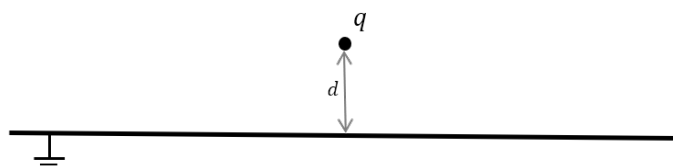


Figura 3.15: Configuração inicial no Método das Imagens.

Mostraremos que podemos resolver este problema fazendo uso apenas dos princípios de blindagem eletrostática, simetria e linearidade. Nosso ponto de partida é a observação que a presença da carga puntiforme induz uma carga no metal, algo conhecido como fenômeno de indução. A ideia é que se a carga for positiva ela atrai elétrons da terra, e se for negativa os repele para

lá. No equilíbrio eletrostático podemos afirmar que não há campo elétrico no interior do metal e que todas suas cargas se concentram em sua superfície.

De acordo com o princípio da superposição, sabemos que o campo elétrico em qualquer ponto do espaço é determinado pela resultante do campo elétrico devido a carga puntiforme q , denotado como \mathbf{E}_q , e o campo elétrico gerado pela distribuição superficial de carga σ induzidas no metal, representado por \mathbf{E}_σ . Dessa forma, podemos expressar o vetor campo elétrico em qualquer ponto das regiões A e B , definidas, respectivamente, como as regiões acima e abaixo do plano, como

$$\mathbf{E}_A = \mathbf{E}_q^A + \mathbf{E}_\sigma^A, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{E}_B = \mathbf{E}_q^B + \mathbf{E}_\sigma^B. \quad (3.16)$$

Entretanto, de acordo com o princípio de blindagem eletrostática, sabemos que o campo elétrico no interior de um condutor em equilíbrio eletrostático é nulo. Logo, $\mathbf{E}_B = \mathbf{0}$ e, a partir da equação (3.16),

$$\mathbf{E}_q^B = -\mathbf{E}_\sigma^B.$$

Lê-se que o campo elétrico na região B devido exclusivamente à carga puntiforme q (\mathbf{E}_q^B) é idêntico ao campo elétrico produzido exclusivamente pela distribuição σ nessa mesma região (\mathbf{E}_σ^B), porém com a direção oposta. Em termos de linhas de campo temos a figura 3.16b.

Conhecido \mathbf{E}_σ^B , o próximo passo consiste em determinar a verdadeira incógnita do nosso problema: \mathbf{E}_σ^A . Mostraremos que o conhecimento de \mathbf{E}_σ^B é suficiente para determinar o campo gerado pela distribuição σ na região A .

Ao examinar a geometria do problema, observamos que, para σ , não há distinção entre as regiões A e B devido à simetria da distribuição em relação ao plano infinito em $z = 0$. Isso o que nos permite fazer uma operação de reflexão sobre o plano, onde os pontos em A são mapeados nos pontos correspondentes em B através da transformação $(x, y, z) \rightarrow (x, y, -z)$. Portanto, as linhas de campo elétrico de σ na região A podem ser representadas conforme

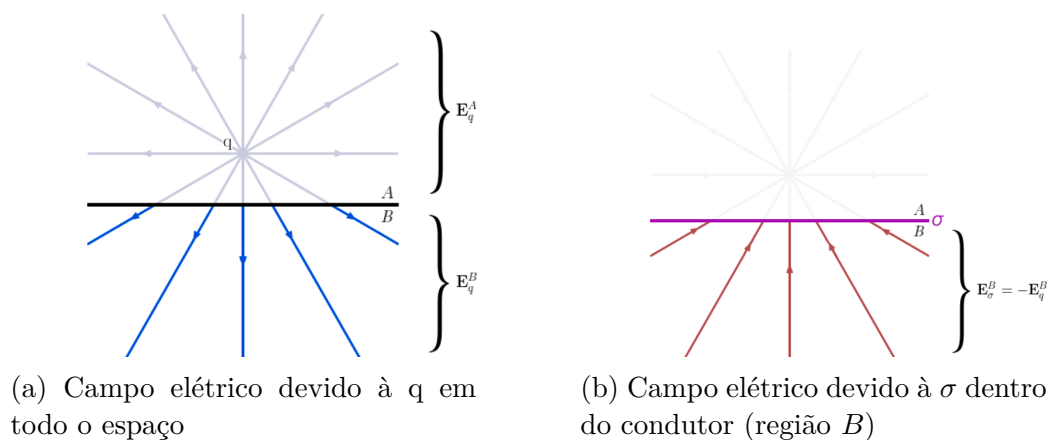
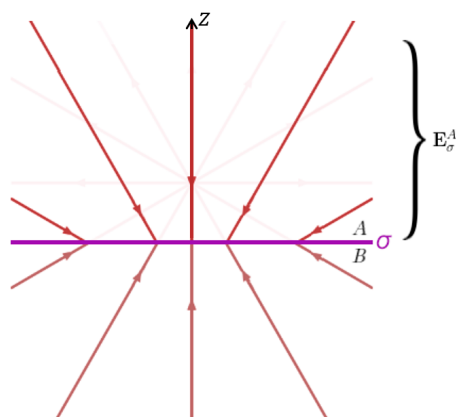


Figura 3.16

ilustrado na figura 3.17, aproveitando o conhecimento do campo em B para inferir o campo em A , alcançando assim nosso objetivo.


 Figura 3.17: Campo de σ na região A por simetria de reflexão no plano

Observa-se que as linhas de campo de \mathbf{E}_σ^A convergem para um ponto específico P' sobre o eixo Z , localizado a uma distância d do plano, conforme ilustrado na figura 3.18.

Portanto, não há nada que difira \mathbf{E}_σ^A de um campo $\mathbf{E}_{-q'}^A$ gerado por uma carga puntiforme $-q$ posicionada sobre o ponto P' , como a figura 3.19 evidencia.

Podemos então substituir este resultado na equação (3.15) e obtemos

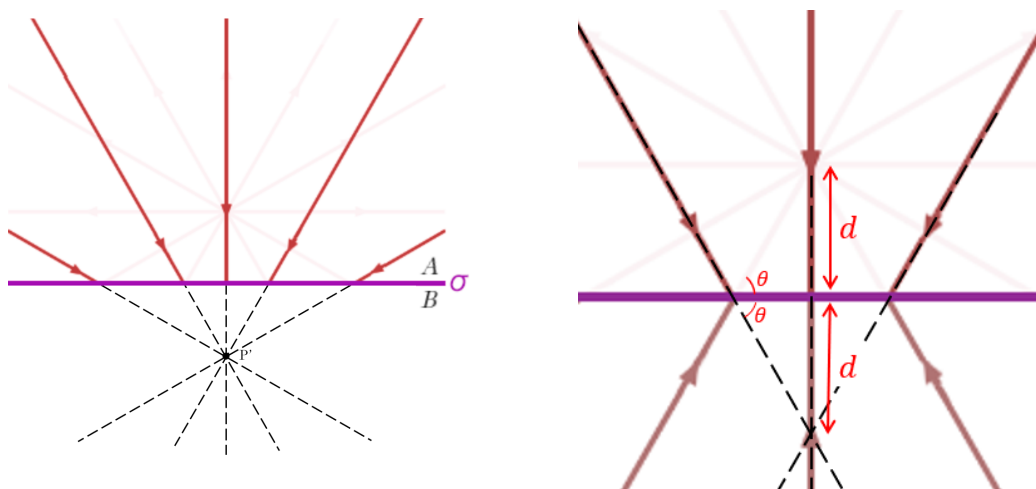
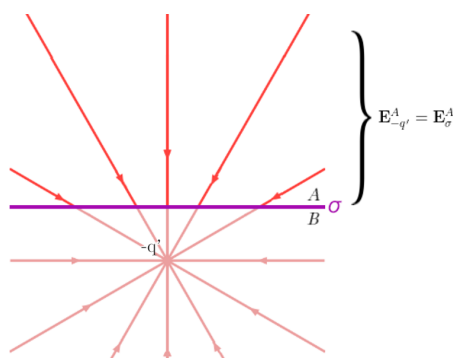

 Figura 3.18: Prolongamento das linhas de \mathbf{E}_σ^A


Figura 3.19

$$\mathbf{E}_A = \mathbf{E}_q^A + \mathbf{E}_{-q'}^A. \quad (3.17)$$

A equação acima nos indica que podemos determinar o campo elétrico na região fora do condutor como a superposição do campo gerado exclusivamente pela carga q e o campo gerado por uma carga $-q'$, chamada de carga imagem, simétrica à carga original por reflexão sobre o plano condutor. Em outras palavras, podemos calcular o campo na região A como o campo gerado por 2 cargas opostas (Figura 3.20), eliminando a dependência de uma distribuição superficial σ mais complicada.

Note que a abordagem adotada aqui para o método das imagens oferece

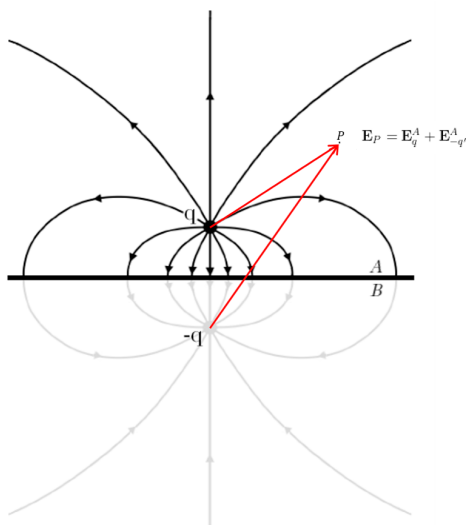


Figura 3.20: Representação da solução do Método das Imagens por linhas de campo.

uma maneira elegante e intuitiva de lidar com o que inicialmente parecia ser um problema complexo de eletrostática. Ao contornar o uso de equações diferenciais parciais complicadas, condições de contorno ou teoremas da unicidade, simplificamos significativamente a análise e a interpretação do nosso problema, tornando-o acessível a uma gama mais ampla de estudantes. Valendo-se apenas do princípio da superposição, da blindagem eletrostática e dos princípios da geometria básica, conseguimos ilustrar conceitos fundamentais sem sobrecarregar os alunos com formalismos matemáticos avançados, permitindo assim a introdução do método das imagens em cursos de Física Básica na graduação e até mesmo no Ensino Médio — uma vez que todos esses conceitos são abordados de maneira integral nos currículos da educação básica.

Portanto, a solução por simetria do método das imagens se apresenta como uma ferramenta valiosa, proporcionando uma compreensão mais profunda e intuitiva de fenômenos eletrostáticos. Antes de encerrar gostaríamos apenas de fazer dois comentários: (i) Poderíamos ter simplificado ainda mais nossa análise e encurtado a demonstração ao observar que o campo produzido por σ deve ser invariante por reflexão no plano. Desta forma, podemos obter

o campo \mathbf{E}_σ^A apenas refletindo a configuração inicial: isto é, como \mathbf{E}_σ^B corresponde ao campo de uma carga puntiforme $-q$ em uma posição (x_0, y_0, z_0) , o campo \mathbf{E}_σ^A será o reflexo disso pelo plano, isto é o campo de uma carga $-q$ em $(x_0, y_0, -z_0)$. Assim, não é necessário prolongar as linhas para concluir isso. Usaremos este atalho na próxima seção. (ii) Podemos discutir um pouco mais a fundo a questão da unicidade da solução. A princípio, poderíamos superpor ao σ encontrado qualquer $\sigma^{(0)}$ que produzisse um campo nulo na região B . Porém, neste caso o campo em A seria a reflexão deste campo, donde também nulo. Em outras palavras, o campo que encontramos é de fato a solução única do problema, o que podemos afirmar sem nunca necessitar evocar unicidade do teorema da Laplace.

3.5 Método das Imagens para uma Esfera metálica

Vamos considerar uma carga puntiforme q na posição $\mathbf{r}_0 = (r_0, \theta_0, \phi_0)$, nas proximidades de uma esfera metálica aterrada com raio R , cujo centro coincide com a origem do nosso sistema de coordenadas. Sabemos que a carga puntiforme induzirá uma distribuição de carga $\sigma(\theta, \phi)$ na superfície da esfera que deverá anular \mathbf{E}_q (campo devido a q) no interior da esfera, conforme ilustrado na figura 3.21.

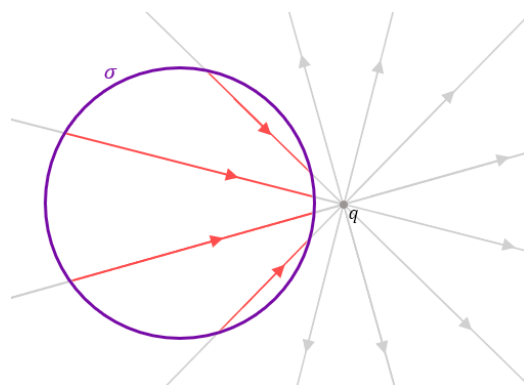


Figura 3.21: Campo gerado pela distribuição σ (em vermelho) no interior da esfera condutora aterrada.

Isso significa que o campo elétrico gerado por σ em um ponto P , no interior da esfera, é dado por

$$\mathbf{E}_\sigma(P) = -\frac{q\hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \quad (3.18)$$

onde \mathbf{r} é a posição de P relativa à carga puntiforme.

A simetria por inversão, apresentada em 3.3.2, desempenha aqui um papel análogo ao da simetria por reflexão usada na seção anterior. O campo produzido por $\sigma(\theta, \phi)$ é simétrico por inversão, desde que escolhamos a superfície metálica como esfera de referência para a inversão. Assim, o campo gerado por $\sigma(\theta, \phi)$ fora da esfera pode ser obtido aplicando a inversão ao campo gerado por $\sigma(\theta, \phi)$ dentro da esfera.

A partir da Eq.(3.13), vemos que a transformação do campo elétrico, dada na Eq.(3.18), corresponde ao campo elétrico de uma carga puntiforme $-q\frac{R}{r_0}$ na posição imagem $\mathbf{r}_i = (\frac{R^2}{r_0}, \theta_0, \phi_0)$, como ilustrado na figura 3.22.

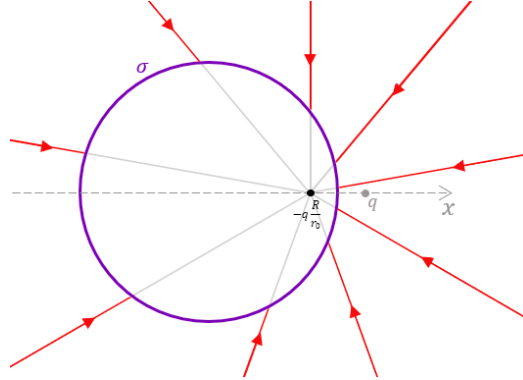


Figura 3.22: Campo gerado pela distribuição σ (em vermelho) no exterior da esfera, equivalente ao campo gerado por uma carga $-q\frac{R}{r_0}$ na posição imagem.

Mais uma vez, podemos obter o mesmo resultado do método da imagem diretamente a partir de uma operação de simetria, sem a necessidade de adivinhações. No entanto, ainda precisamos abordar a questão da unicidade das soluções.

Podemos superpor à $\sigma(\theta, \phi)$ qualquer distribuição de carga superficial $\sigma^{(0)}$, que por si só produza um campo nulo no interior do condutor esférico. Isso é equivalente a afirmar que o potencial eletrostático deve ser uma constante

V dentro da esfera.

Aplicando a transformação de Kelvin, a Eq.(3.12) implica que o campo fora da esfera deve ser

$$\phi^{(0)} = \frac{VR}{r},$$

que corresponde ao potencial gerado por uma carga puntiforme $4\pi\epsilon_0 VR$ no centro da esfera.

Portanto, vemos que o campo elétrico fora de uma esfera metálica na presença de uma carga puntiforme q na posição \mathbf{r}_0 é, na forma mais geral, dado pela superposição do campo elétrico produzido por duas cargas imagens: uma de magnitude $q_{i,1} = -q\frac{R}{r_0}$ na posição $\mathbf{r}'_{i,1} = \frac{R^2}{r_0^2}\mathbf{r}_0$, e outra de magnitude $q_{i,2} = 4\pi\epsilon_0 VR$ no centro da esfera.

Dois casos particulares se destacam:

1. Esfera aterrada ($V = 0$): Nesse caso, mantemos apenas a imagem $q_{i,1}$.
2. Esfera isolada com carga Q : Aqui, ambas as imagens devem ser consideradas. O valor de V pode ser determinado diretamente pela aplicação da lei de Gauss, que garante que a carga total na esfera é a soma das cargas imagens. Isso implica que, além da carga imagem presente quando a esfera está aterrada, agora uma carga adicional $q_{i,2} = Q - q_{i,1} = Q + q\frac{R}{r_0}$ deve ser colocada no centro da esfera.

Capítulo 4

Aplicações mais avançadas da Lei de Gauss

4.1 Neutralidade do Universo Finito

Um problema cosmológico simples e instigante é demonstrar que a finitude do universo implica diretamente em sua neutralidade. Esse resultado está apresentado no livro de Landau e Lifshitz [33], e pode ser obtido de maneira simples utilizando apenas a lei de Gauss. No entanto, ao adotar uma abordagem baseada em linhas de campo, é possível tornar esse problema ainda mais acessível, permitindo que ele seja levado para turmas do ensino médio de forma didática, e com uma abordagem em essência equivalente à utilizada no ensino superior. Essa discussão foi, de fato, aplicada em uma turma de ensino médio, conforme registrado na seção 6.5 do capítulo Aplicação.

Apresentaremos duas soluções para esse problema, organizados do mais básico ao mais sofisticado. Para todos eles, partimos do modelo cosmológico que diz que o Universo é fechado, isotrópico e as leis da Física valem em todo o espaço.

4.1.1 O Universo Limitado

Para essa solução, consideremos que o universo seja finito na sua concepção mais simples e direta, isto é, que ele possua fronteiras intransponíveis – as bordas de todo o universo. Nesse cenário, podemos definir uma superfície gaussiana S que coincida com essas fronteiras. Como não existe um “lado de fora”, não há linhas de campo escapando ou entrando através dessa superfície (ilustrado na Figura 4.1). Consequentemente, o fluxo do campo elétrico é nulo, o que implica uma carga líquida interna igual a zero.



Figura 4.1: Representação do universo limitado e neutro. Linhas de campo não escapam, visto que não há para onde escapar.

É evidente, porém, que um argumento tão simplificado apresenta várias limitações. Por exemplo, poderia existir uma distribuição de carga σ acumulada precisamente na fronteira do universo, que não colaboraria para o fluxo, e não teria entrado nessa conta. Além disso, um problema cosmológico ainda mais fundamental reside na suposição de que o universo possua limites bem definidos.

Ainda assim, este é um argumento simples e acessível, que pode ser utilizado tanto no Ensino Médio quanto em um curso básico de eletromagnetismo. O objetivo não persuadir os estudantes de que o universo é neutro, mas sim estimular sua curiosidade e motivação, que é o papel dos problemas instigantes no ensino [34].

O universo sempre foi um tema fascinante, especialmente para alunos mais jovens. Conectar uma matéria tradicionalmente vista como desinteressante com temas cosmológicos também é uma forma de tornar o aprendizado

mais significativo.

4.1.2 Universo Limitado

Um modelo cosmológico de universo fechado mais bem aceito que o anterior, é o do universo com espaço finito, mas sem fronteiras, análogo à superfície de um sólido. Portanto, para facilitar a visualização deste argumento, iremos ‘omitir’ uma dimensão espacial, simplificando-o para um universo em duas dimensões.

Assim, consideremos a geometria esférica do universo, uma das soluções permitidas pela Teoria da Relatividade Geral de Einstein. Todas as ilustrações deste argumento serão apresentadas como projeções planas dessa esfera (Figura 4.2), para facilitar a visualização.

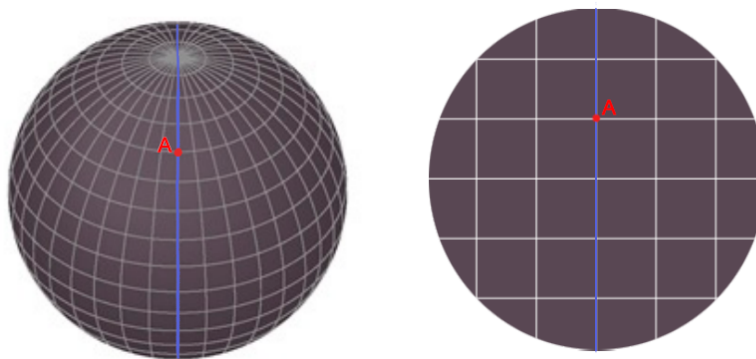


Figura 4.2: A esquerda, uma representação clássica de um universo (fechado) com geometria esférica. Nele, partindo em linha reta de um ponto A qualquer você acaba por algum momento retornar ao mesmo ponto. A direita, observa-se uma projeção plana deste mesmo universo.

A intuição é que um universo finito e sem fronteiras impede que haja uma “fuga” de linhas de campo, levando a um fluxo total de campo elétrico igual a zero. Para formalizar isso, consideremos uma superfície gaussiana S . No universo fechado, qualquer que seja essa superfície, ela sempre dividirá o espaço em duas regiões finitas, as quais denominaremos S_1 e S_2 , ambas tendo S como fronteira comum, conforme ilustrado na Figura 4.3.

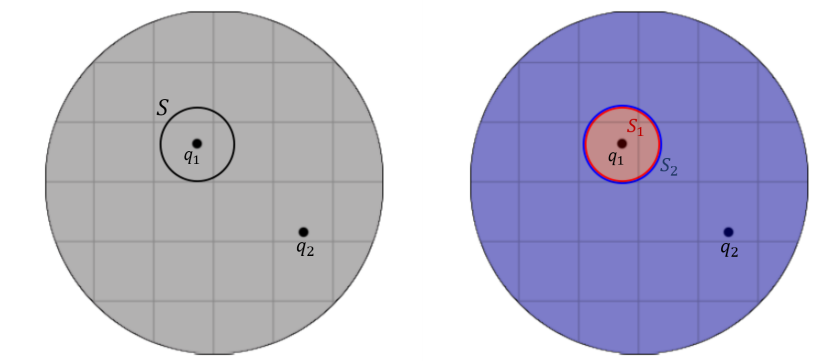


Figura 4.3: Superfície fechada S no espaço finito enclausurando ao mesmo tempo duas regiões separadas S_1 e S_2 .

Nessa configuração, o fluxo do campo elétrico que atravessa a borda de S_1 é igual, em módulo, ao fluxo do campo que atravessa a borda de S_2 , mas com sinal oposto, pois essas bordas representam apenas faces opostas da mesma superfície fechada S . Em termos de linhas de campo, isso significa que toda linha que sai de S_1 entra em S_2 ⁴. Se essas duas regiões representam a totalidade do universo, então não há linhas de campo que escapam, e a carga total do universo deve ser zero.

4.2 Relação entre o ângulo de criação e destruição de linhas de campo

Linhas de campo são verdadeiros laboratórios teóricos de eletromagnetismo. Elas não apenas ilustram conceitos abstratos, mas também permitem formular soluções fora do comum para explorar problemas instigantes da Física. Um desses problemas emerge inclusive do próprio conceito: como encontrar a relação entre o ângulo pelo qual uma linha de campo emerge/chega a uma carga e o módulo dessa carga? E até antes disso: ao observar uma configuração com duas cargas e uma de suas linhas de campo, como na Figura

⁴É importante destacar que, em um sistema dinâmico como o Universo, a análise considera um instante específico, com a superfície sendo definida para um momento particular do sistema.

4.4, como identificar rapidamente qual delas possui o maior módulo?

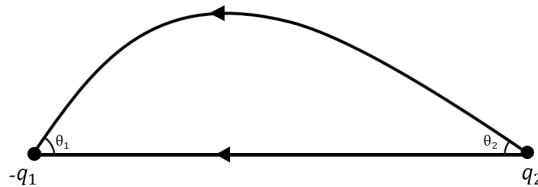


Figura 4.4: Par de cargas de módulos e sinais distintos com duas de suas linhas de campo representadas.

Em adição, é possível encontrar um ângulo crítico em que as linhas que saem de uma carga deixam de encontrar a outra? Ou seja, seria possível estabelecer uma relação entre a razão das cargas e o ângulo em que linhas escapam para o infinito (ou chegam do infinito)?

Essas perguntas compõem o cerne do problema que exploraremos e resolveremos ao longo desta seção. Ainda que alguns possam considerar esse problema abstrato ou sem aplicabilidade, ele oferece uma rica oportunidade em cursos de eletromagnetismo para explorar aplicações incomuns da lei de Gauss e ganhar intuição mais avançadas sobre o campo produzido por duas cargas puntiformes.

Antes de buscarmos uma solução para as questões levantadas, é importante observar que a Figura 4.4, assim como qualquer representação 2D de linhas de campo, possui certa ambiguidade. Não é possível discernir, apenas com base na ilustração, se nas extremidades dessas existem cargas puntiformes ou a fios paralelos que atravessam perpendicularmente o plano do papel. Embora cada configuração possua uma solução analítica ligeiramente diferente, veremos adiante que essa diferença tem pouca influência sobre a conclusão final. Analisaremos cada caso separadamente.

4.2.1 Solução para fios infinitos

Consideremos inicialmente o caso de dois fios retilíneos infinitos dispostos em paralelo, com densidades lineares de carga $-\lambda_1$ e λ_2 , onde λ_1 e λ_2 são valores reais e positivos. Nesta configuração, vemos que o problema possui simetria de translação ao longo do eixo paralelo aos fios, que definiremos

como o eixo y . O eixo perpendicular que cruza ambos os fios será, por sua vez, definido como o eixo x . A configuração do problema está ilustrada na Figura 4.5.

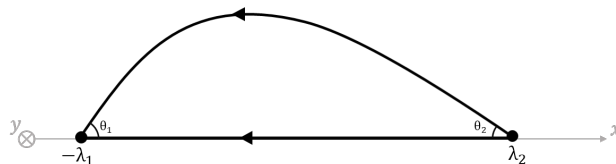


Figura 4.5: Configuração inicial para fios infinitos e os referenciais adotados na solução.

O segredo para estabelecer a relação entre ângulos e cargas está na escolha conveniente de uma superfície gaussiana S (Figura 4.6), construída a partir da própria linha de campo em análise.

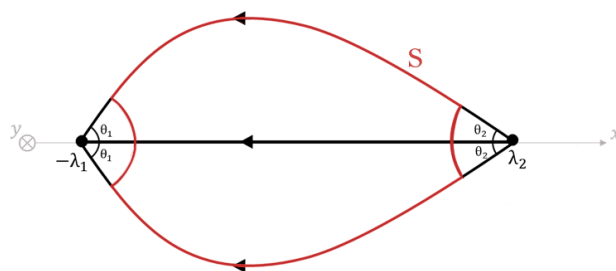


Figura 4.6: Superfície gaussiana S (em vermelho) para solução com dois fios infinitos.

Para construção de nossa gaussiana, consideraremos um prisma reto de altura h onde a área da base é a região delimitada pelas linhas de campo, como ilustrado na Figura 4.7a. Além disso, consideremos dois cilindros sólidos de altura h e raios r_1 e r_2 , centrados nos fios com densidades $-\lambda_1$ e λ_2 , respectivamente, conforme mostra a Figura 4.7b.

Ao subtrair do prisma as regiões que o interceptam com ambos os cilindros, obtemos uma nova região, denominada V (Figura 4.8).

A superfície que delimita V é, então, a nossa superfície gaussiana S , e sua visualização tridimensional é mostrada na Figura 4.9.

Aplicando a lei de Gauss, temos que

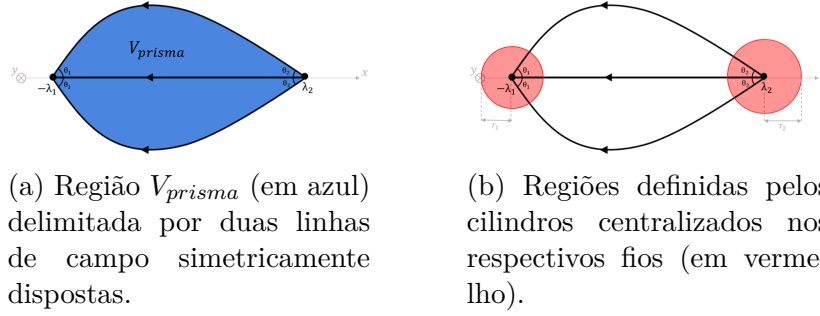


Figura 4.7

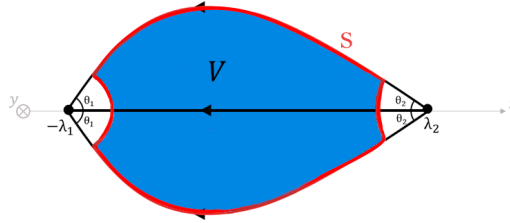


Figura 4.8: Região V (em azul) delimitada pela superfície gaussiana S (em vermelho)

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}.$$

Desmembramos agora a superfície gaussiana S em três partes: A_L (área lateral), A_1 , e A_2 , onde A_1 e A_2 correspondem às áreas das concavidades voltadas para os fios 1 e 2, respectivamente, e sabendo que a carga total interna a essa superfície é nula, temos

$$\oint_{A_L} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} + \oint_{A_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} + \oint_{A_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0.$$

Devemos notar que o fluxo do campo elétrico através da área lateral A_L é nulo, pois essa área é sempre, por construção, tangente ao vetor campo elétrico, resultando em $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0$. Essa é justamente a razão de escolher esta gaussiana.

O fluxo nas demais regiões pode ser calculado de forma simples desde que consideremos que os raios dos cilindros em torno dos fios são infinitesimais. Neste caso, as linhas de campo geradas por $-\lambda_1$ e λ_2 são perpendiculares às

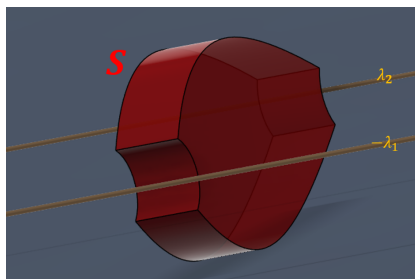


Figura 4.9: Superfície Gaussiana S vista em perspectiva para fios infinitos.

áreas A_1 e A_2 , pois essas áreas correspondem a cortes dos cilindros concêntricos em torno dos fios. Essa configuração preserva a simetria dos cilindros em relação aos fios, o que implica que o campo elétrico é normal a A_1 e A_2 . Além disso, essa mesma simetria permite inferir que o campo elétrico é aproximadamente constante sobre essas áreas, novamente lembrando que escolhemos raios de curvatura dos cilindros bem pequenos. Portanto, para essas áreas, temos $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \approx E_{\text{Fio Inf.}} A_{\text{Concavidade}}$, sendo o resultado exato no limite. Assim

$$E_1 A_1 + E_2 A_2 = 0,$$

e, portanto

$$\frac{-\lambda_1}{2\pi r_1} (2\theta_1 r_1 h) + \frac{\lambda_2}{2\pi r_2} (2\theta_2 r_2 h) = 0.$$

Com uma simplificação algébrica, finalmente encontramos a relação

$$\boxed{\lambda_1 \theta_1 = \lambda_2 \theta_2}$$

Usando esse resultado para retornar e analisar rapidamente a Figura 4.5, observamos que $\lambda_2 > \lambda_1$, pois na imagem temos $\theta_1 > \theta_2$. Isso poderia ter sido antecipado ao notar que a aproximação de campo radial se mantém por uma distância maior para o fio 2 do que para o 1, indicando que o fio 2 é mais carregado.

Ainda considerando a situação em que $\lambda_2 > \lambda_1$, podemos determinar o ângulo crítico θ_c acima do qual as linhas de campo escapam para o infinito. Como θ_1 só pode ser menor ou igual a π , obtemos o ângulo crítico $\theta_2 = \theta_c$ ao

impor $\theta_1 = \pi$. Substituindo essa condição na relação que obtivemos, temos

$$\frac{\lambda_2 \theta_c}{\lambda_1} = \pi.$$

Assim, a fração das linhas de campo que partem de λ_2 e chegam até λ_1 é dada por

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\theta_c}{\pi}.$$

Como esperado, se $\lambda_1 = \lambda_2$ todas as linhas que saem do fio 2 chegam no 1 e nada escapa para o infinito, compatível com o fato de que neste caso o sistema é neutro.

No caso em que $\lambda_2 = 2\lambda_1$, a relação obtida nos permite concluir que o ângulo crítico é $\theta_c = \pi/2$, transição que pode ser observada através da Figura 4.10, onde foram traçadas algumas linhas de campo próximas a esse valor para ilustrar a situação limite. Na imagem, percebe-se claramente o "corte" entre as linhas que terminam em λ_1 , próximas a $\theta = \pi$, e aquelas que seguem indefinidamente para longe do sistema.

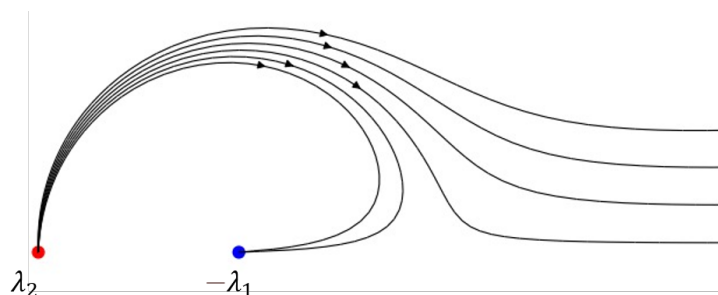


Figura 4.10: Distribuição das linhas de campo para o caso $\lambda_2 = 2\lambda_1$. O ângulo crítico $\theta_c = \pi/2$ delimita a separação entre as linhas que alcançam λ_1 e as que escapam para o infinito.

4.2.2 Solução para cargas puntiformes

Consideremos, agora, o mesmo problema que o abordado na seção anterior, porém com duas cargas puntiformes q_1 e q_2 no lugar dos fios. Novamente, q_1, q_2 denotam apenas os módulos das cargas e consideramos que a carga 1 é negativa e a 2 positiva. A solução para essa configuração segue essen-

almente a mesma abordagem adotada para a solução com os fios infinitos, porém agora temos a diferença da simetria envolvida. Em vez de simetria por translação em uma direção, temos agora a simetria por rotação em torno da reta que liga as cargas. Desta forma, em vez de um prisma, partiremos da superfície de revolução gerada por rotacionar uma dada linha de campo em torno do eixo de simetria do problema. Além disso, excluiremos desta região duas esferas de raio infinitesimal centradas nas cargas, em vez de dois cilindros.

A representação bidimensional e tridimensional da superfície gaussiana S para o caso de cargas puntiformes está ilustrada na Figura 4.11. É inte-

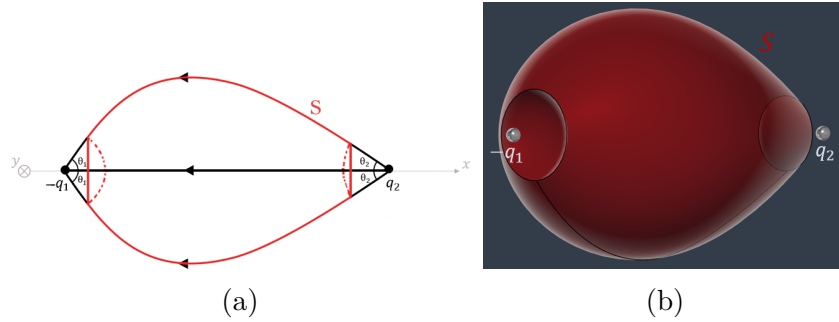


Figura 4.11: (a) Superfície gaussiana S (em vermelho) para solução com duas cargas puntiformes; (b) Superfície gaussiana S vista em perspectiva para cargas puntiformes.

ressante notar que a representação 2D para o caso das cargas puntiformes (Figura 4.11a) é basicamente igual àquela dos fios infinitos (Figura 4.6).

Tudo o que muda é o cálculo de A_1 e A_2 , que agora correspondem às áreas das “bolas de sorvete” (Figura 4.12). Denotando por R o raio da calota e por θ o ângulo de abertura, temos que a área da “bola de sorvete” é dada por

$$A = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\theta R^2 \sin \theta d\theta = 2\pi R^2 (1 - \cos \theta).$$

Dessa forma, aplicando mais uma vez a lei de Gauss ao problema,

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow \oint_{A_L} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} + \oint_{A_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} + \oint_{A_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0,$$

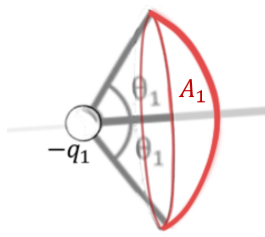


Figura 4.12: Área da superfície A_1 em forma de bola de sorvete

e, usando que o fluxo na área lateral é nulo, temos $E_1 A_1 + E_2 A_2 = 0$, ou seja,

$$-\frac{kq_1}{r_1^2} [2\pi r_1^2 (1 - \cos \theta_1)] + \frac{kq_2}{r_2^2} [2\pi r_2^2 (1 - \cos \theta_2)] = 0.$$

Simplificando a expressão, obtemos a relação carga-ângulo para partículas puntiformes:

$$\boxed{q_1(1 - \cos \theta_1) = q_2(1 - \cos \theta_2)}.$$

Assim como fizemos para os fios infinitos, o ângulo crítico agora satisfaz

$$2q_1 = q_2(1 - \cos \theta_c)$$

$$\frac{q_1}{q_2} = \sin^2(\theta_c/2).$$

Novamente, se $q_2 = q_1$ concluímos que $\theta_c = \pi$, indicando que todas as linhas que saem de q_2 chegam à carga 1.

Da mesma forma, vemos que a fração entre as linhas que saem da carga q_2 e que chegam na carga 1 é dada pela razão entre as áreas da calota em torno da carga 2 com a abertura com ângulo crítico, θ_c , pela área da esfera em torno da carga 1, desde que escolhamos o mesmo raio para ambas as superfícies. Assim,

$$\boxed{\frac{A_{\text{linhas que chegam em } q_1}}{A_{\text{total de } q_2}} = \frac{2\pi R_2^2 (1 - \cos \theta_c)}{4\pi R_2^2} = \frac{q_1}{q_2}}.$$

Outro ponto interessante é que nosso resultado independe da distância entre as cargas, consequência da simetria por escala que discutimos em seções anteriores. Uma vez que reescalar preserva ângulos isso implica na inde-

pendência observada. Isso também já podia ter sido antecipado de forma mais simples via análise dimensional. Afinal, θ_2 pode no máximo ser função de θ_1, q_1, q_2 e da distância entre as cargas. Contudo, esta última é a única grandeza com dimensão de comprimento, e não podemos gerar nenhum adimensional com ela. Uma vez que θ_2 é adimensional, concluímos então que $\theta_2 = f(\theta_1, \frac{q_2}{q_1})$, de acordo com o que obtivemos.

4.3 Campo de uma carga em movimento retilíneo e uniforme

Certamente, uma das questões mais intrigantes no estudo do eletromagnetismo é o fato de o campo elétrico de uma carga em movimento retilíneo uniforme apontar sempre na direção de sua posição instantânea. Esse fenômeno desperta dúvidas nos estudantes, especialmente aos que sabem que toda informação se propaga no espaço a uma velocidade finita — limitada pela velocidade da luz no vácuo. Como, então, o campo consegue refletir a posição atual de uma carga que o gerou em um instante passado?

À primeira vista, essa propriedade parece contradizer o princípio de causalidade, sugerindo uma espécie de “telepatia” do campo. Afinal, como um fenômeno que depende de eventos passados pode estar em total concordância com a posição presente da carga?

Nesta seção, mostraremos como argumentos de simetria, aliados a Lei de Gauss, permitem fornecer um argumento simples para este fato. Nosso objetivo não é reconstituir todos os cálculos para determinar explicitamente o campo \mathbf{E} de uma carga em MRU, pois a solução desse problema pode ser encontrada em detalhes no capítulo 2 do livro de Hofmann [35]. Em vez disso, concentraremos nossa análise no aspecto mais fundamental do resultado — o comportamento do campo, que aponta para a posição instantânea da carga.

A Figura 4.13 ilustra essa propriedade curiosa do campo elétrico, e irá nos ajudar a visualizar e debater as implicações desse resultado. Considere que no instante t uma carga em movimento retilíneo e uniforme está na posição $\mathbf{r}_0(t)$. O campo em um ponto P que está na posição \mathbf{r} com relação à posição

instantânea da carga é determinado pela posição que a carga ocupava no instante de tempo retardado t_r , representada na figura por $\mathbf{r}(t_r)$. Este tempo pode ser determinado levando em conta que a luz viaja com velocidade c , mas não nos interessará aqui obtê-lo. Destacamos, apenas, que ao resolver as equações da eletrodinâmica, demonstra-se que o campo elétrico no ponto P possui uma direção que coincide com a reta que liga P à posição instantânea da carga.

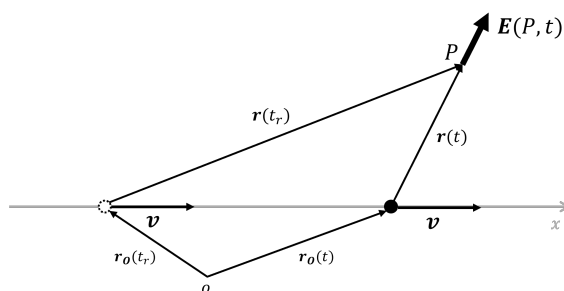


Figura 4.13: Representação da solução para o campo \mathbf{E} de uma carga em MRU

Aqui reside o aparente paradoxo: como pode o campo refletir a posição atual da carga enquanto produzido em sua posição no instante retardado? No entanto, como veremos a seguir, não há violação do princípio da causalidade. De fato, ao realizar o cálculo (que não faremos aqui) usa-se a posição retardada da carga, donde a causalidade é manifesta. Isso significa que o campo elétrico em P depende, e é portanto função, da posição retardada $\mathbf{r}(t_r)$, e da velocidade da carga \mathbf{v} . Feito essa observações, podemos expressar o vetor campo elétrico como

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}(t_r), \mathbf{v}). \quad (4.1)$$

Entretanto, a única certeza que esses dois vetores ($\mathbf{r}(t_r)$ e \mathbf{v}) nos oferecem, por argumentos de simetria, é que \mathbf{E} deve estar contido no plano definido por eles (o plano do papel). Isso significa que, diferente do caso de uma carga em repouso, onde o campo é função apenas de um único vetor, $\mathbf{r}(t)$, e por isso aponta sempre na direção desse vetor posição, aqui não há mais qualquer motivo para que o campo \mathbf{E} em P esteja alinhado com $\mathbf{r}(t_r)$. Ele poderia

apontar para qualquer direção dentro do plano definido pelos dois vetores.

Assim como não há argumentos de simetria para afirmar que o campo \mathbf{E} no instante t aponta para a posição retardada, há ainda menos motivos para supor que ele deva apontar na direção da posição instantânea, algo que, no entanto, ocorre. Nas formulações tradicionais isso surge como uma “coincidência”. Na realidade, como a resposta usual é escrita como uma função da posição da carga no tempo retardado, não é sequer claro a priori que o campo aponta na direção instantânea da carga. Os livros precisam reescrever o campo em termos da posição instantânea, o que envolve uma álgebra nada imediata, para expor esta incrível feição do campo. Nosso objetivo aqui é demonstrar usando apenas argumentos de física básica que este tem de ser o caso. Para mostrar isso, precisaremos evocar a Lei de Gauss neste problema.

O ponto de partida e base de toda nossa argumentação é o fato de que o campo no ponto P e no instante t pode ser escrito apenas em função da carga q , do vetor que liga P à posição instantânea da carga, que denotaremos por \mathbf{r} , da velocidade \mathbf{v} da carga e de constantes do problema (velocidade da luz e permissividade elétrica do vácuo). O tempo retardado, por exemplo, pode ser escrito em termos destas grandezas. O ponto é que a única escala de comprimento presente é r , de modo que análise dimensional nos garante que podemos escrever o campo elétrico na forma

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \mathbf{f}\left(\frac{v}{c}, \theta\right),$$

onde r é a distância da posição instantânea até o ponto em análise e θ o ângulo entre \mathbf{r} e \mathbf{v} . Em particular, podemos garantir que o campo cai com $1/r^2$, assim como o caso em repouso, e que a direção do campo elétrico — que está inteiramente contida no fator \mathbf{f} — não depende da distância mas de θ , como ilustrado na Figura 4.14. Denotaremos o ângulo entre o campo elétrico e a direção radial por α . Por simetria, o campo elétrico estará na direção definida por \mathbf{r} e \mathbf{v} . Escolheremos coordenadas esféricas, medindo o ângulo zenital θ a partir da direção determinada pela velocidade. Assim, o campo elétrico pode ter apenas componentes em $\hat{\theta}$ e \hat{r} .

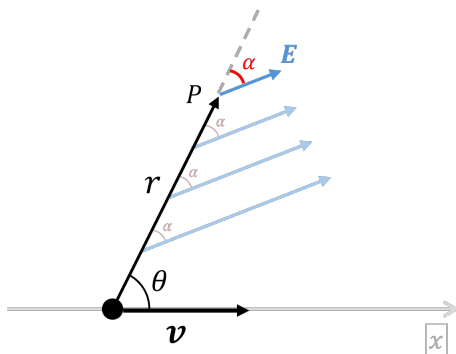


Figura 4.14: Representação do campo elétrico ao longo de uma direção fixa θ . Pela análise dimensional, conclui-se que a direção do campo é independente da distância r , variando apenas sua intensidade.

Agora, podemos usar a Lei de Gauss para demonstrar que esse argumento é suficiente para garantir que α deve ser zero, ou seja, que o campo elétrico aponta para direção da posição instantânea.

Para isso, escolhemos, no instante em análise, uma superfície gaussiana S na forma de um setor de uma coroa esférica centrada na carga. Essa superfície é composta por duas superfícies côncavas, S_1 e S_2 , ambas centradas na posição instantânea da carga, e fechadas por uma superfície lateral S_L , conforme ilustrado na Figura 4.15. A superfície lateral é o plano definido por $\theta = \text{constante}$.

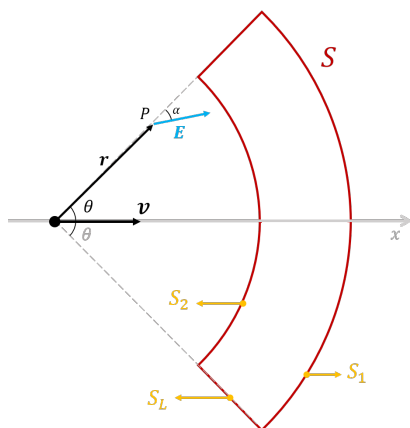


Figura 4.15: Superfície gaussiana S usada para resolver o problema da carga em MRU. S pode ser dividida em três superfícies abertas S_1 , S_2 , e S_L .

Aplicando a lei de Gauss na superfície S , temos

$$\oint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} + \oint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} + \oint_{S_L} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0. \quad (4.2)$$

Ainda que não tenhamos mais a garantia que a direção do campo elétrico seja constante ao longo de toda a superfície S_1 ou S_2 , os argumentos de análise dimensional apresentados anteriormente garantem que, para cada direção θ_0 fixa, os vetores de campo elétrico sobre S_1 e S_2 possuem a mesma direção, como ilustrado na Figura 4.16. Essa figura mostra que, sobre essas duas superfícies, a componente zenital do campo (E_θ) não contribui para o fluxo ($\mathbf{E}_\theta \cdot d\mathbf{A} = 0$). Apenas as componentes radiais dos vetores campo elétrico podem contribuir para o fluxo.

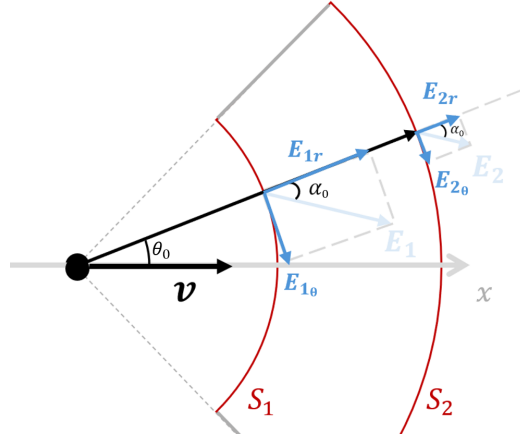


Figura 4.16: Campos \mathbf{E} sobre superfícies S_1 e S_2 para uma direção θ_0 qualquer. Perceba que apenas as componentes radiais (E_{1r} , E_{2r}) contribuem para o fluxo.

Todavia, o fluxo da componente E_{1r} tem o mesmo módulo, mas sinal oposto ao fluxo da componente E_{2r} . Isso ocorre porque o módulo do campo ainda é proporcional a $\frac{1}{r^2}$, enquanto a área das superfícies é proporcional a r^2 , de modo que um compensa o outro em valor absoluto, ou seja,

$$\oint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = - \oint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}.$$

De 4.2, resta que

$$\oint_{S_L} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0. \quad (4.3)$$

Resta apenas analisar a contribuição da superfície lateral.

O ponto central é o seguinte: se o campo elétrico estiver em um dado ponto entrando na superfície lateral, ele estará entrando em todos os pontos da superfície lateral. Isto porque ao andarmos em r o ângulo θ não pode mudar. E ao girar em torno da direção determinada pela velocidade (eixo x em nossas figuras) o campo também terá que estar entrando pois esta é uma simetria do problema. Da mesma forma, se o campo elétrico estiver saindo em um ponto da superfície lateral, ele teria que estar saindo em todos! Em ambos os casos teríamos uma violação da lei de Gauss, donde podemos afirmar que o campo não pode possuir componente em $\hat{\theta}$. Já havíamos concluído por simetria que o campo não possui componente em $\hat{\phi}$. Desta forma, a única maneira de não haver violação da lei de Gauss é o campo apontar na direção radial, isto é, para a posição instantânea da carga.

Capítulo 5

Proposta de ensino a partir das Linhas de Campo

Este capítulo apresenta o material desenvolvido para o ensino da Eletrostática em turmas do ensino médio, utilizando as linhas de campo como recurso central para facilitar a compreensão visual e prática da natureza elétrica. A sequência está organizada em duas aulas e três atividades. A aula 1 e a atividade 1 introduzem fenômenos elétricos, motivam a ideia de campo elétrico antes mesmo de falar em cargas elétricas. Na aula 2, as cargas são definidas como criadoras e devoradoras linhas de campo, além das regras que regem essas linhas. A atividade 2 revisita e expande os conceitos trabalhados na aula anterior, conectando-os com a primeira atividade. Além disso, destacamos as discussões enriquecedoras que surgiram dessas interações em sala de aula. Por fim, a terceira atividade aborda os aspectos tridimensionais dos campos produzidos por cargas pontuais, utilizando modelos impressos em 3D, além de introduzir a motivação para a lei da força de campo.

Nas seções seguintes, detalhamos cada fase da sequência didática conforme foi apresentado aos estudantes durante a aplicação deste produto. No entanto, a versão final dos roteiros, apresentada no Apêndice A, traz alterações significativas no design e diagramação das perguntas, além de pequenas modificações no conteúdo e uma inversão na ordem das duas primeiras fases da sequência — ajustes que julgamos necessários após analisar as respostas

dos alunos, documentadas no próximo capítulo. Ao final desse mesmo capítulo, justificamos as mudanças implementadas, conforme apresentadas no Apêndice A.

Também no Apêndice A, assim como no material instrucional disponível na [página do programa](#), é possível encontrar instruções para baixar ou modelar as peças em 3D utilizadas na última atividade. Para aqueles que não tiverem acesso a essa tecnologia, indicamos no texto uma outra possibilidade.

Sugerimos que o material seja utilizado conforme a versão final apresentada. No entanto, é possível adaptá-lo conforme as necessidades do professor, já que não há uma dependência rígida entre as fases da sequência. O professor pode optar por trabalhar com apenas uma ou duas das cinco etapas, se assim desejar. Ao longo das próximas seções, discutiremos em detalhe nossa motivação pedagógica para cada escolha que fizemos para as aulas e para as atividades. Quando for muito importante para nosso argumento colocaremos algum slide ou questão como imagem no texto, mas muitas vezes não o faremos. Remetemos o leitor ao apêndice A para o material completo.

5.1 Aula 1: Boas-vindas à Física do invisível

O material desenvolvido para esta aula é uma apresentação de slides que possui dois objetivos principais. O primeiro é levantar um debate com os estudantes acerca de suas concepções prévias sobre interações à distância a partir de suas experiências diárias. Para isso, são utilizados slides no estilo *flashcards*, com perguntas-chave, animações variadas e imagens que enriquecem a discussão, enquanto o professor atua como mediador, garantindo a continuidade do diálogo. Seu papel é ajudar os estudantes a identificarem possíveis lacunas no conhecimento.

O segundo objetivo é introduzir o conceito de campo de maneira inicial, adotando um formato de aula mais próximo do tradicional. A figura 5.1 mostra alguns slides que ilustram bem esses dois momentos com funções distintas mas que se misturam durante a aula.

Após uma breve sequência de slides ilustrando o efeito do campo gravitacional clássico sobre alguns planetas do sistema solar, a discussão da



Figura 5.1: Exemplos de slides em momentos onde (a) o aluno deve ser o protagonista; (b) o professor tem o papel central da aula.

aula deságua em uma reflexão quase filosófica: os campos realmente existem ou são apenas construções teóricas que a humanidade criou para descrever fenômenos da natureza? Essa é uma questão sem resposta definitiva, mas essencial para ser considerada ao iniciarmos o estudo do tema. Os próprios autores do Berkeley [5] levantam essa reflexão:

Talvez você ainda queira perguntar: o que é um campo elétrico? É algo real ou apenas um nome para um fator em uma equação que precisa ser multiplicado por algo para dar o valor numérico da força que medimos em um experimento? Duas observações podem ser úteis aqui. Primeiro, como funciona, não faz diferença. Essa não é uma resposta vazia, mas sim uma séria. Segundo, o fato de que o vetor de campo elétrico em um ponto no espaço é tudo o que precisamos saber para prever a força que atuará sobre qualquer carga naquele ponto está longe de ser trivial. Poderia ter sido diferente! (p. 17)

Embora essa discussão seja valiosa, nossa tese se concentra em defender a existência concreta dos campos, com o propósito de tornar esse conceito mais tangível para os estudantes.

5.2 Atividade 1: Boas-vindas à Física do invisível

A segunda parte desta sequência didática conecta-se diretamente à etapa anterior, onde introduzimos o conceito de campo, mas agora direcionando o foco para o campo elétrico, ainda que sem nomeá-lo explicitamente. O objetivo desta atividade é permitir que os alunos experimentem um fenômeno elétrico e, em seguida, realizar uma avaliação diagnóstica para compreender como eles pensam sobre os mecanismos envolvidos em interações à distância (Figura 5.2). Por último, buscamos observar como aplicam o conhecimento recém-adquirido sobre o campo como mediador dessas interações.

Para essa atividade, os estudantes realizarão, divididos em grupos, o clássico experimento de atrair pequenos pedaços de papel com um material eletrizado por atrito, e em seguida responder algumas perguntas do roteiro. Essa é uma atividade simples e de baixo custo, utilizando materiais facilmente acessíveis em sala de aula, como folhas de caderno e tubos de canetas esferográficas ou canudos coloridos de plástico.

3. Na opinião do grupo, o que se modificou no tubo após atritá-lo com o cabelo? Elaborem hipóteses, discutam com os seus colegas e expliquem com suas próprias palavras.

4. Como o papel sabe quando o canudo/caneta está ou não atritado?

Figura 5.2: Questões 3 e 4 da Atividade 1. O objetivo dessas questões é que os alunos descrevam o que eles imaginam que acontece “por trás” do fenômeno observado

Na pergunta final, mostrada na figura 5.3, estamos interessados em investigar se os alunos já possuem alguma imagem em mente de como um campo se parece, antes de serem apresentados ao conceito de linhas de campo, que virá na etapa seguinte.

5. É possível dizer que existe um mediador na interação entre o papel e o tubo? Se a resposta for não, cite um exemplo que motiva a resposta do grupo. Se a resposta for sim, dê um nome que vocês acharem conveniente para este mediador e criem uma representação esquemática (um desenho simples) para como ele poderia funcionar - use formas geométricas, setas, legendas ou o que mais vocês acharem necessário para representar a “teoria” de vocês.

Figura 5.3: Questão 5 da Atividade 1

5.3 Aula 2: O que é Carga Elétrica?

A terceira fase da sequência didática consiste em uma aula que inicia com uma breve contextualização histórica sobre a evolução dos conceitos da eletrostática, e culmina em nossa definição particular de cargas elétricas como criadoras e consumidoras de linhas de campo. Por fim, é ensinado aos estudantes como interpretar essas linhas. Nesse contexto, desenvolvemos uma segunda apresentação em slides, rica em animações e memes, o que facilita a comunicação com o público jovem.

Podemos dividir a aula internamente em três momentos. O primeiro é uma introdução histórica que começa com Thales de Mileto e o registro da capacidade do âmbar de atrair palha quando atritado, assim como os próprios estudantes fizeram na atividade 1. Em seguida, avançamos para o século XVIII e o fenômeno da eletricidade, com experimentos como o de Stephen Gray, que impressionaram a Europa da época e inspiraram até mesmo a jovem autora Mary Shelley a escrever *Frankenstein* — a obra pioneira da ficção científica que até hoje inspira produções no gênero. No slide em evidência na Figura 5.4, destacamos como referência o filme *Pobres Criaturas*, baseado no romance homônimo, não apenas pelo vínculo com a obra de Shelley, mas também por estar em exibição e gerando repercussão no período em que este material foi aplicado.

O segundo momento, que se mistura naturalmente com a contextualização histórica, traz os primeiros conceitos de eletrostática. Ao apresentar Benjamin Franklin, abordamos a existência de dois tipos de carga na natureza, que se atraem quando opostas e se repelem quando iguais. Em seguida,



Figura 5.4: Slide usado para comentar sobre a influência dos descobrimentos da eletrostática na cultura pop dos dias de hoje

com Charles Coulomb, introduzimos sua lei e explicamos como aplicá-la para calcular a força entre duas cargas, estabelecendo um paralelo com a lei da gravitação de Newton, que muitos alunos já estudaram anteriormente no ensino médio. Por fim, com Faraday, retomamos a ideia de um mediador para ações à distância, discutida na primeira aula, e o apresentamos como campo elétrico, além de forma a relação entre esse campo e a força elétrica, sem entrar em detalhes neste momento, apenas usando o conceito de campo como um vetor e as relações que definimos com Franklin.

Para reforçar a ideia de Faraday sobre a existência dos campos, usamos vários GIFs animados de experimentos no último slide dessa parte (Figura 5.5). Esses GIFs ajudam a ilustrar o conceito de campo por meio de linhas de ação, sem precisar explicá-lo diretamente, deixando que os alunos construam essa intuição por conta própria.

Os experimentos mostrados nos GIFs incluem adaptações de demonstrações clássicas, como o uso de limalhas em magnetismo, agora aplicadas ao contexto elétrico. No canto superior esquerdo e direito, os quadros exibem cristais de permanganato de potássio dissolvendo-se e fluindo em direção ao eletrodo positivo, devido à carga negativa do íon manganato. No canto superior e no canto inferior esquerdo, sementes de grama ou sêmola em óleo de mamona aquecido polarizam-se ao longo do campo na presença de alta tensão. Já no canto inferior esquerdo, um condutor eletrizado suspenso por

um fio isolante é aproximado de esferas condutoras carregadas com cargas iguais, revelando a direção das linhas de campo. Por fim, o GIF central inferior mostra um globo de plasma, incluído para motivar a compreensão do conceito de campo elétrico, ainda que as linhas nele representadas não indiquem exatamente a direção do campo.

Por trabalharem todos a altas tensões e por limitações de tempo na preparação desta dissertação, não conseguimos elaborar um roteiro para realizar alguns desses experimentos em sala de aula, mas consideramos que seria uma excelente forma de marcar a experiência e tornar o aprendizado mais impactante. Caso o professor disponha dos recursos e ferramentas, recomendamos realizar algum desses experimentos com os alunos neste momento.

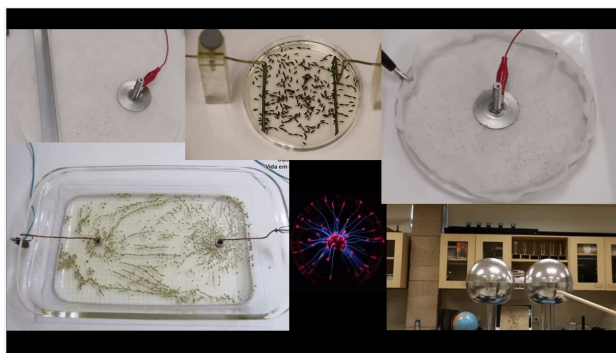


Figura 5.5: Slide com GIFs animados de experimentos que buscam tornar visível o campo elétrico.

No terceiro e último momento, as cargas são finalmente introduzidas como responsáveis pela criação ou desaparecimento das linhas de campo, e explicamos como interpretar essas linhas. Não entregamos todas as conclusões prontas para os alunos; por exemplo, no slide representado na Figura 5.6, são eles próprios que chegam à conclusão de que a densidade das linhas de campo é inversamente proporcional à intensidade do campo – mesmo sem uma relação matemática precisa, que será abordada apenas na última fase dessa sequência didática, com o estudo de cargas impressas em 3D.

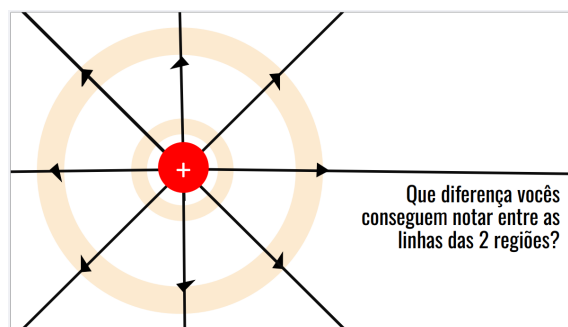


Figura 5.6: Terceiro e último slide de uma sequência com o propósito de levar os alunos a deduzirem a relação entre densidade de linhas e a intensidade do campo.

5.4 Atividade 2: Mapeando as Linhas de Campo

Na quarta fase da sequência didática, realizamos um novo teste em grupo com um roteiro de cinco questões. O objetivo é incentivar os alunos a aplicar os conceitos de linhas de campo para consolidar o conteúdo da última aula, desenvolver novas ideias de campo elétrico e aprender a reinterpretar fenômenos elétricos já conhecidos à luz das linhas de campo.

A primeira questão, composta por cinco itens, apresenta uma representação de uma carga positiva pontual. Os alunos são orientados a: (a) desenhar as linhas de campo da carga; (b) indicar um ponto à direita da carga e o vetor do campo elétrico nesse ponto; (c) adicionar uma carga de teste positiva nesse ponto e representar a força elétrica que ela sofre; (d) repetir o processo com uma carga de teste negativa; e (e) explicar a relação entre campo, carga e força elétrica.

Na segunda questão, o foco principal é promover a discussão entre os alunos sobre a relação entre a intensidade e a densidade das linhas de campo, além de explorar como essas linhas se conectam com suas fontes. Para isso, adaptamos um exercício de vestibular, onde, diferentemente da primeira questão, os alunos não têm a visão da origem das linhas, que convergem e apontam para o lado direito da folha.

A terceira questão desafia os alunos a desenhar vetores que representem o campo elétrico e a força elétrica sobre uma carga em um ponto onde as

linhas de campo são curvas. Nesse ponto, a distribuição de cargas que originou essa configuração não pode mais ser inferida diretamente, embora a situação represente uma configuração real simulada por computador usando uma biblioteca Python, que gerou essa imagem de linhas a partir de uma distribuição aleatória, mas existente, de cargas.

Na quarta questão (ver Figura 5.7), introduzimos o conceito de Campo Elétrico Uniforme (CEU) pela primeira vez por meio de uma imagem sem nomeá-lo explicitamente, e pedimos aos alunos que identifiquem o ponto de maior intensidade nesse campo. Essa proposta visa estimular discussões tanto dentro de cada grupo quanto entre os diferentes grupos, mesmo sem uma alternativa correta na imagem. Somente após essa reflexão coletiva o professor formaliza o conceito de CEU.

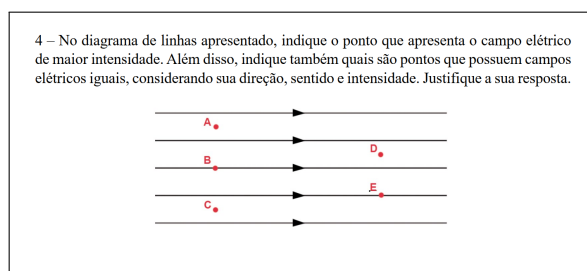


Figura 5.7: Questão 4 da Atividade 2. Note que não há alternativa correta, o objetivo maior dessa questão é apenas estimular o debate entre os alunos grupo.

Por fim, a última questão, na Figura 5.8, retoma trechos das respostas dos alunos à questão 2 da primeira atividade: “Que tipo de interação foi possível observar entre o tubo e o papel, e de que maneira a distância entre esses objetos se relaciona com essa interação?”. Os alunos devem comparar suas respostas anteriores com novas imagens apresentadas e escolher qual delas melhor representa o campo elétrico do canudo, justificando sua escolha.

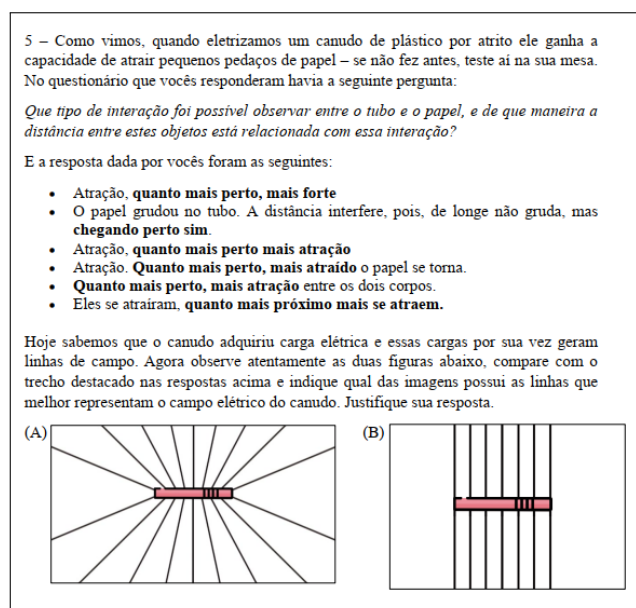


Figura 5.8: Questão 5 da Atividade 2. É interessante que o professor que fizer uso do material substitua as respostas que estão no roteiro pelas da sua turma, preservando apenas o padrão.

5.5 Atividade 3: Campo pra todo lado

A quinta e última fase da sequência didática consiste em uma atividade prática, cujo objetivo é permitir que os estudantes visualizem e manipulem um campo elétrico com as próprias mãos, desenvolvendo uma compreensão empírica da Lei do Inverso do Quadrado. A proposta busca associar a concentração de linhas de campo a uma experiência sensorial, além de familiarizar os alunos com a ideia de campo como algo concreto e palpável.

Para realizar a atividade, os alunos são divididos em grupos, cada grupo recebe um roteiro (disponível no Apêndice A) e um kit com três peças, que o professor identifica como peças A, B e C (Figura A.1).

- A Peça A é uma esfera com 12 hastes radiais, representando uma carga pontual positiva de módulo Q . As hastes não indicam sentido, simbolizando uma carga positiva. A maior distância entre dois extremos é de 6 cm (raio de 3 cm).
- A Peça B possui 20 hastes de comprimento igual às da primeira peça,

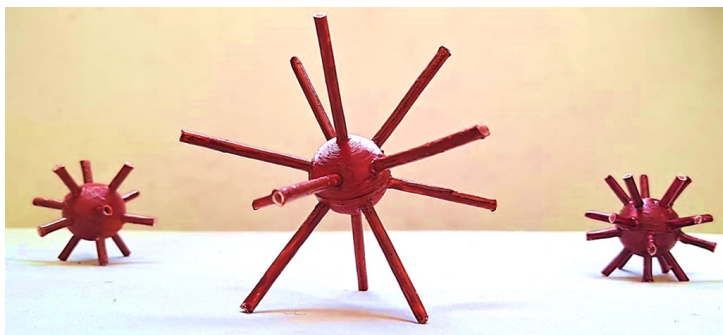


Figura 5.9: Kit contendo as três peças: Peça A (à esquerda), Peça B (à direita) e Peça C (ao centro), representando diferentes configurações de cargas puntiformes para a Atividade 3.

representando uma carga pontual com módulo de $\frac{5Q}{3}$.

- A Peça C, semelhante a peça A, possui 12 hastes, mas com uma distância total entre extremos de 12 cm, simulando uma carga pontual de módulo Q observada 2 vezes mais distante em relação a Peça A.

É importante orientar os alunos a explorarem as peças antes de responder ao roteiro, conforme indicado no próprio roteiro.

Cada peça possui um conjunto de perguntas numeradas e identificadas por uma letra e um número. A letra indica a peça correspondente (A, B ou C), enquanto o número representa a ordem da questão dentro daquela peça. Por exemplo, A1 refere-se à primeira pergunta para a peça A, enquanto C5 indica a quinta pergunta sobre a peça C. Essa nomenclatura é aplicada sequencialmente, facilitando o entendimento e a organização das perguntas e, no capítulo seguinte, das respostas. Ao final, há uma questão de conclusão que envolve a análise conjunta das três peças, permitindo aos alunos integrar suas observações.

Antes de responder às questões do roteiro, cada grupo deve escolher um membro para desenhar um círculo na palma da mão, delimitando uma área onde as peças serão posicionadas. Essa região servirá para medir, de forma indireta, a densidade de linhas de campo, considerando o número de hastes contidas dentro desse círculo quando a mão envolve as peças, conforme indicado em questões específicas do roteiro.

- Questão A1: Solicita que os alunos observem a direção e o sentido das linhas de campo da Peça A. Embora as peças não tenham elementos que indiquem orientação específica das linhas, espera-se que os alunos, já familiarizados com representações de linhas de campo de cargas puntiformes, consigam fornecer o sentido a partir da informação que a carga é positiva.
- Questões A2 e A3: Os alunos devem medir a quantidade de linhas de campo na região delimitada e a distância d entre o centro e a extremidade da peça. Para facilitar a tarefa, sugere-se que usem uma régua para medir o diâmetro total da peça e dividam o valor por dois.
- Questões B1 e B2: Solicitam as mesmas medições para a Peça B, que servirão como base para responder às questões B3 e B4.
- A questão B3 explora se os estudantes conseguem relacionar o valor da carga com a quantidade de linhas e comparar qualitativamente qual peça representa uma carga de maior módulo. Como objetivo secundário, verifica-se se os alunos conseguem extrapolar a razão de linhas ($5/3$) para a razão entre os módulos das cargas. Enquanto isso, a questão B4 questiona a relação entre o número de linhas e a carga elétrica, esperando-se que os alunos identifiquem a proporcionalidade direta. Essa resposta será retomada na questão de conclusão.
- Questões C1 e C3: Os alunos repetem as medições para a Peça C, cujos dados serão utilizados para responder às questões C2 e C4, respectivamente.
- A questão C2 pretende fazer com que os alunos percebam que as peças A e C, embora diferentes em aparência, representam a mesma carga sob diferentes perspectivas. Já a questão C4, buscar verificar se os alunos conseguem imaginar que, para hastes mais extensas, o valor da carga se mantém constante, enquanto as extremidades das hastes se afastam cada vez mais, indicando uma menor densidade de campo.

- Questão C5: Semelhante à questão B4, pede que os alunos estabeleçam uma relação matemática entre a distância d e a densidade de linhas, visando uma expressão que relacione a intensidade do campo elétrico com a distância d .

Por fim, a questão de conclusão solicita que os alunos integrem os conhecimentos obtidos nas questões B4 e C5 para chegar a uma expressão matemática que relacione a intensidade do campo (densidade de linhas na mão) com o valor da carga pontual e a distância d . Esse resultado, que se aproxima da forma matemática da Lei de Coulomb, poderá ser discutido em mais detalhes com os alunos em uma aula posterior, dado o nível de sutileza necessária para a compreensão dessa relação e a sua aplicação em questões-problemas tradicionais do ensino médio.

Capítulo 6

Aplicação em sala de aula e Análise das respostas

A sequência didática descrita no capítulo anterior foi aplicada a uma turma de 14 alunos do terceiro ano do ensino médio de uma escola particular, localizada na Zona Oeste do município do Rio de Janeiro, que atende majoritariamente estudantes de classe média alta da região. A aplicação ocorreu ao longo das três primeiras semanas do ano letivo, com a turma tendo, teoricamente, uma carga horária semanal de 150 minutos, dividida em três tempos de 50 minutos cada, sendo nenhum deles tempos corridos.

Na prática, porém, o tempo efetivo de aula foi reduzido, pois, além da turma ser pequena, dois dos tempos semanais eram no primeiro horário do dia, o que resultava em atrasos frequentes no início das aulas. A compreensão dos conteúdos abordados na sequência didática foi verificada na primeira avaliação bimestral, que é elaborada pelo próprio professor da turma.

6.1 Aula 1

Essa primeira aula acabou se mostrando essencial para revisar conceitos de mecânica que os alunos já não lembravam com facilidade, especialmente após um ano letivo focado em ondulatória e termodinâmica. Eles estavam desacostumados a trabalhar com grandezas vetoriais, embora fosse perceptí-

vel que alguns ainda mantinham esses conceitos de forma adormecida. Isso ficou evidente com a pergunta do segundo slide, “O que vocês entendem pelo conceito de Força?”, o que gerou respostas como a do

- Aluno 1: “*Força é exercida sobre algo*”;
- Aluno 2: “*Interação entre dois vetores*”;
- Aluno 3: “*Energia que move algo*”.

O slide seguinte trouxe a pergunta “É possível que exista uma força entre dois corpos que não estejam em contato?”, o que gerou discussões interessantes, como já era esperado. Enquanto alguns alunos não souberam responder, outros afirmaram que sim, citando como exemplo os ímãs. Com mais exemplos apresentados, alguns chegaram a questionar se “o vento conta” ou até se um pistão hidráulico seria um exemplo, mas logo ficaram sem novas ideias. Nesse momento, uma caneta é deixada para cair na frente da sala para induzir a resposta, e, como esperado, muitos deles mencionaram o título do slide seguinte: gravidade. A partir daí foi retomada a discussão para revisar a diferença entre gravidade e força peso, conceitos que já haviam esquecido — vale lembrar que esta é também a primeira aula de Física do ano.

Um último comentário interessante ocorreu no Slide 11 (Figura 6.1), que traz a pergunta: “Será que existe um mediador para essas interações também?”. Nesse slide, aparece o desenho de uma jovem e um rapaz queimados de sol na praia, e é lhes feita a pergunta: “*Como o sol está queimando a gente se não estamos tocando nele?*”. O aluno 1 respondeu: “*Pelos raios solares*”, uma afirmação simples que revela a tendência intuitiva dos estudantes de atribuir materialidade e localidade a essa forma de interação à distância. É interessante que isso já aponta uma intuição inicial para o conceito de um mediador transportando energia, que é o próprio campo eletromagnético nesse caso. Ironicamente, o contexto mais natural para se introduzir o conceito de campo — a propagação de ondas eletromagnéticas — já envolve conceitos matemáticos muito sofisticados. No entanto, acreditamos que uma motivação evocando a materialidade do contexto eletrodinâmico fornece um subsídio interessante para começar a falar sobre campo elétrico. Contudo,

embora no caso da luz solar os estudantes evoquem a ideia de raio, no caso estático (como no caso do ímã, na imagem ao lado) nenhuma aluno fala que o ímã emite “raios magnéticos” e nesse caso realmente pensam no fenômeno como uma ineração à distância. Podemos usar este contraste para destacar que em ambos os casos temos um campo presente mediando a interação, contudo no caso estático ele não transporta energia não sendo, portanto, visível como o caso dos raios de luz.



Figura 6.1: Slide 11 da aula 1. Antes da pergunta aparecer centralizada na tela, o slide exibe à esquerda um GIF de uma mão manipulando esferas magnetizadas e, à direita, a imagem de dois jovens queimados de sol.

6.2 Atividade 1

Para o início da aula, a turma foi dividida em seis grupos formados pelos próprios alunos: quatro duplas (Grupos 1 a 4) e dois trios (Grupos 5 e 6). Cada grupo recebeu um roteiro e, em seguida, foram distribuídos canudos plásticos coloridos para cada integrante. Notou-se que, embora a cor do canudo parecesse um detalhe irrelevante na elaboração da atividade, os alunos demonstraram grande interesse em escolher a cor de sua preferência, o que trouxe uma dimensão de personalização à atividade.

A inclusão de um objeto fora do contexto escolar tradicional, como o canudo (frequentemente associado a festas), foi um fator relevante para o engajamento, especialmente em comparação à segunda alternativa que era a caneta esferográfica, extremamente comum ao ambiente dos estudantes. Esse aspecto foi reforçado quando, no final da aula, alguns alunos tiraram fotos

com seus canudos para compartilharem em suas redes sociais, evidenciando o impacto do uso de um objeto pouco usual em sala de aula.

O experimento proposto, apensar de inicialmente ser considerado “clássico”, revelou-se uma novidade para quase toda a turma, mostrando o quão equivocada é a ideia de presumir que experimentos simples já são conhecidos por eles. Muitos alunos demonstraram genuína surpresa ao observar o fenômeno da atração dos pequenos pedaços de papel pelo canudo, o que incentivou a reflexão sobre a importância de revisitar experimentos simples para enriquecer o aprendizado.

A prática foi realizada em uma sala climatizada, o que geralmente facilita o experimento, uma vez que a baixa umidade favorece a eletrização dos objetos. Mesmo assim, já era esperado que alguns grupos iriam enfrentar dificuldades em realizar o experimento, o que é totalmente normal. Nesse contexto, vale destacar a atitude de dois alunos em solicitar a troca de canudo por acreditarem que o problema estava no canudo que eles escolheram. É sabido que outro fator que pode influenciar no experimento é o tipo de cabelo ou os produtos aplicados nele, e isso foi observado pelo grupo 3 quando na resposta da questão 1: “*Funcionou no cabelo da [aluna 14], mas no meu cabelo que está com creme de cabelo não funcionou.*”. Por isso recomenda-se que o professor na aplicação também leve outros materiais que possam ser atritados com o canudo como papel-toalha que também funciona.

Enquanto respondiam ao roteiro, parte dos alunos referiu-se ao canudo como “eletrizado,” o que sugere uma familiaridade pré-existente com o termo. Em contrapartida, outro grupo de alunos associou o fenômeno ao aquecimento do canudo, o que foi evidenciado pela resposta do Grupo 3 na questão 3: “*Acho que o cabelo meio que esquentou o canudo e isso fez o papel grudar.*”. Esse comentário indica que, para aqueles sem uma bagagem de conhecimentos prévios específicos de eletrostática, a primeira reação dos estudantes foi atribuir a causa do fenômeno à primeira alteração sensível no canudo — a sua temperatura. As outras respostas a questão 3: “Na opinião do grupo, o que se modificou no tubo após atritá-lo com o cabelo? Elaborem hipóteses, discutam com os seus colegas e expliquem com suas próprias palavras.” são:

- Grupo 1: *“Sim, pois ficou eletrizado.”*;
- Grupo 2: *“Quando sobre atrito, o canudo recebe carga negativa, oposta à do papel, o que faz eles se atraírem.”*;
- Grupo 4: *“Foi criada uma energia estática.”*;
- Grupo 5: *“Na opinião do nosso grupo, o atrito do cabelo com o canudo criou uma energia que fez com que os papéis picados, que são leves, levantassem.”*;
- Grupo 6: *“Existe, campo eletromagnético.”*.

Ao longo de todas etapas da atividade percebem-se que os alunos se apegam a palavra “energia” mesmo que, curiosamente, ela não tenha sido mencionada em nenhum slide ou roteiro.

Na questão 4, “Como o papel sabe quando o canudo/caneta está ou não atritado?”, observa-se uma variedade de respostas que refletiram tanto a compreensão dos conceitos apresentados anteriormente quanto a construção de hipóteses próprias por parte dos alunos. Pelo menos metade dos grupos foi capaz de relacionar a pergunta à aula anterior, onde discutimos a ideia de “campo” como um mediador de interações à distância, embora sem especificar o termo “campo elétrico”. As respostas dos grupos foram:

- Grupo 1: *“Através do campo eletromagnético.”*;
- Grupo 2: *“Pelo mediador.”*;
- Grupo 3: *“Sabendo.”*;
- Grupo 4: *“Quando está com carga elétrica acumulada, está atritado.”*;
- Grupo 5: *“Pois ele é atraído pelo papel de forma involuntária.”*;
- Grupo 6: *“Quando o campo avisa para ele.”*.

Nas respostas à última questão (Figura 5.3 do capítulo anterior), notou-se que, embora todos tenham afirmado que existe um mediador, nem todos

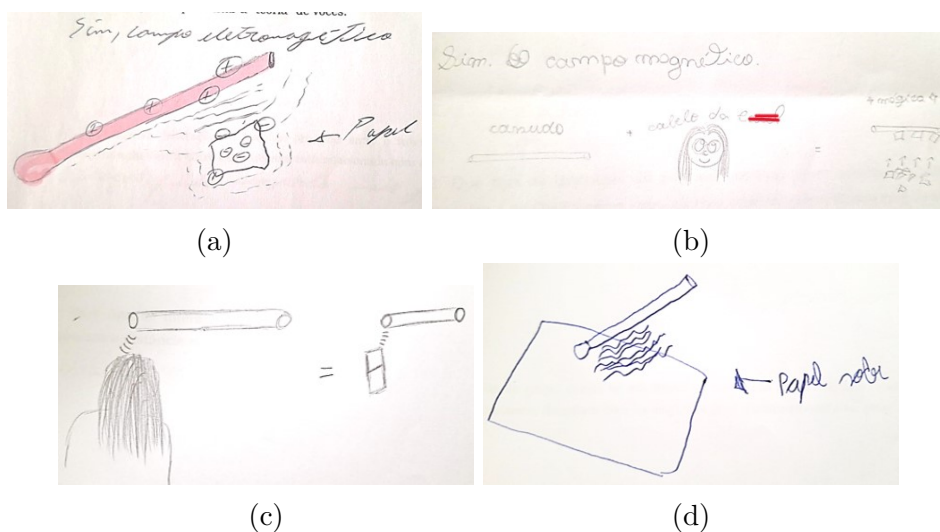


Figura 6.2: Respostas dos grupos (a) 1, (b) 2, (c) 3 e (d) 6 à questão 5 da atividade 1.

se arriscaram a fazer uma representação gráfica do campo. Destacamos os desenhos de alguns grupo na imagem 6.2.

Ao final da atividade, que durou cerca de 30 minutos, cinco estudantes de grupos mesclados se reuniram a fim de tentar fazer a levitação de uma folha de papel inteira, expandindo os objetivos do experimento. Após várias tentativas sem sucesso, o grupo começou a levantar hipóteses sobre possíveis obstáculos: cogitaram que uma leve inclinação da mesa poderia estar prejudicando o experimento, mas, mesmo após mudarem de posição, o resultado permaneceu inalterado. Em busca de alternativas, um dos alunos optou por trocar o canudo por um tubo de caneta, acreditando que este poderia proporcionar uma “força” superior para atrair a folha, embora tal mudança também não tenha trazido diferença significativa. Finalmente, o grupo encontrou êxito ao partir a folha ao meio, conseguindo, assim, o efeito desejado.

6.3 Aula 2

Essa aula, apresentada em formato de slides em uma tela ampla posicionada à frente da sala, teve uma duração de aproximadamente 35 minutos. Embora seguisse um formato mais próximo ao tradicional, diversos comentários pertinentes surgiram ao longo da aula. A seguir, destacamos e analisamos os principais momentos da aula.

Desde a atividade anterior, os alunos demonstraram uma boa compreensão de conceitos como prótons com carga positiva, elétrons com carga negativa e a regra de “opostos se atraem e iguais se repelem”. Embora não tenham estudado eletrostática no ensino médio, atribuíram esse conhecimento às aulas de química, o que é compreensível. Portanto, é importante que o professor de Física considere essa bagagem prévia de química ao iniciar o ensino de eletricidade.

Ao falar sobre Benjamin Franklin e a relação de atração e repulsão de cargas elétricas, alguns alunos perguntaram se isso tinha relação com o que ocorre na “*caixinha do fone*”. Atualmente, diversos outros acessórios modernos, como fones de ouvido, integram super-ímãs em seus encaixes, de tal maneira que fenômenos magnéticos estão mais fazendo parte do cotidiano. Nesse contexto, é natural que estudantes olhem para a atração e a repulsão de cargas elétricas e associem à interação entre ímãs. Quando essas dúvidas surgiram na sala, lhes foi explicado que, embora parecidas, essas interações tinham fontes diferentes.

A distinção mais interessante surgiu adiante ao discutir as linhas de campo. Ao apresentar que uma carga positiva gera um certo número de linhas, perguntei o que aconteceria ao dobrar a carga, e alguns alunos rapidamente responderam que “dobraria o número de linhas”. Foi possível notar que, da maneira como a primeira regra foi apresentada, foi fácil para a turma deduzir certa linearidade, ainda que de maneira intuitiva. Contudo, nem todos os alunos compreenderam bem essa parte, e pelo menos uma aluna manifestou dúvida, mas com exemplos adicionais (como $+3Q$ e $+4Q$) desenhados no quadro, ela conseguiu entender a relação de proporcionalidade entre a carga e o número de linhas.

Nos slides com a pergunta “Dessa forma, o que acontece se colocarmos uma carga $+Q$ e $-Q$, uma do lado da outra?”, enquanto um aluno respondeu que “*elas se anulam*” outro antecipou a explicação dizendo: “*Tudo que uma criar a outra vai devorar*”. Esse diálogo demonstra que, para alguns alunos, a construção das regras se torna intuitiva; contudo, é importante notar que essa compreensão não foi igualmente natural para todos.

Durante a discussão sobre a interação entre uma carga $+2Q$ e uma carga $-Q$, o aluno 2 comentou “*Vai ficar sobrando. Se sobra elas vão se atrair*”, demonstrando uma compreensão inicial correta sobre a configuração das linhas de campo. Contudo, foi necessário esclarecer que, no exemplo anterior (cargas $+Q$ e $-Q$), a atração já ocorria sem a necessidade de um desequilíbrio no número de linhas. No slide seguinte (Figura 6.3), ao observar as linhas de campo da configuração $+2Q$ e $-Q$, o mesmo aluno perguntou se “*a outra [linha] deu a volta ao mundo ou é impressão minha?*” — o que revela que alguns alunos já percebem estranhezas devido a efeitos de projeção. Esse foi um bom momento para explicar a eles que essa aparência era um efeito visual devido à representação em 2D, enquanto no espaço tridimensional a linha daria a volta ao redor ou por dentro da tela. Como complemento, foi explicado que a carga negativa poderia também capturar uma “linha perdida” pelo espaço, similar ao comportamento de uma carga negativa isolada — que é de fato a melhor explicação para o fenômeno.

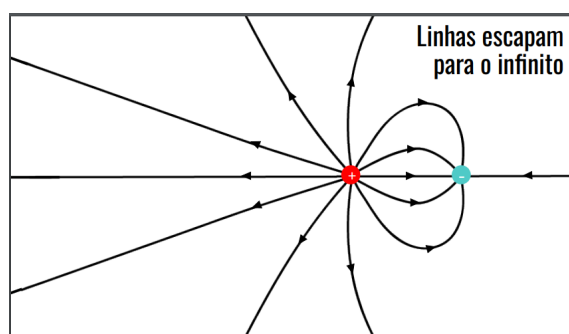


Figura 6.3: Slide que ilustra a configuração das linhas de campo de duas cargas pontuais $+2Q$ e $-Q$

Por fim, nos slides onde mostro duas regiões ao redor de uma carga puntiforme — uma mais próxima e outra mais afastada (Figura 5.6) — é perguntado

onde o campo é mais intenso, todos respondem prontamente que ele é mais intenso perto da carga. No entanto, ao questioná-los sobre a diferença entre as duas regiões ao observarmos as linhas de campo, a sala fica em silêncio. Em seguida, pergunta-se qual região possui um maior número de linhas, e após outro breve período de silêncio, todos concordam que o número de linhas é o mesmo em ambas as regiões. Então, é-lhes dado um tempo para refletirem: se a intensidade não depende do número de linhas, a que ela poderia estar relacionada? Finalmente, o aluno 3 responde: “*Acho que perto a concentração [de linhas] é maior*”. A partir dessa observação, é ensinada a relação entre densidade de linhas e a intensidade do campo, uma ideia que, nos slides seguintes, eles demonstram ter assimilado.

Embora críticos das linhas de campo como Chabay e Sherwood [2] argumentem que ensinar as regras das linhas de campo demanda muito esforço e oferece pouco benefício prático para os estudantes, a aplicação desta aula mostrou que é possível ensinar este conceito a alunos do ensino médio de maneira didática e intuitiva, sem “gastar” muito tempo. Analisaremos, portanto, se os resultados suportam nossa abordagem metodológica.

6.4 Atividade 2

Com o objetivo de avaliar o método e aprofundar o conhecimento dos alunos obtido na última aula, o encontro seguinte foi dedicado à Atividade 2. Cada um dos 11 alunos presentes recebeu o roteiro da atividade e foi incentivado a discutir as questões livremente, sem a formação de grupos fixos desta vez.

Questão 1

A primeira questão visava avaliar as noções formadas pelos alunos sobre linhas de campo, vetores campo elétrico e força elétrica. Na Figura 6.4 é possível conferir algumas respostas dos alunos ao primeiro item da questão. Embora a maioria dos alunos tenha feito uma representação correta, observou-se que alguns alunos não deram importância à simetria radial das linhas, como visto nas Figuras 6.4c e 6.4d. Além disso, houve uma dificul-

dade geral em representar e diferenciar elementos geométricos, como pontos e vetores (Figura 6.4b), indicando um assunto a ser trabalhado com a turma.

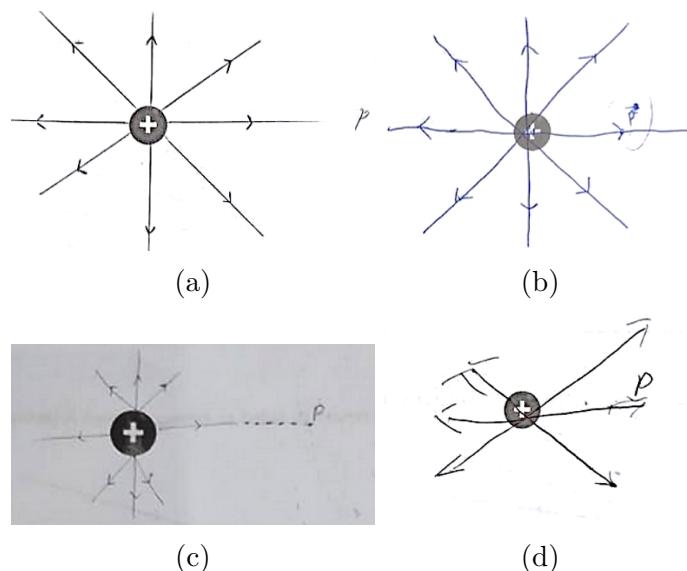


Figura 6.4: Representações das linhas de campo de uma carga puntiforme positiva e de um ponto P a direita da carga.

No item (e) — “Compare os diagramas dos vetores força F para as cargas positiva e negativa no ponto P. Explique como o sinal da carga q (carga de prova) influencia a direção e o sentido da força eletrostática que ela experimenta.” — percebeu-se certa confusão nas respostas, sugerindo que a pergunta poderia ser reformulada para maior clareza. Destacam-se algumas respostas dos alunos:

- Aluno 1: “Porque a carga negativa vai se atrair para a positiva e a positiva vai se expelir”;
- Aluna 4: “Quando a carga é positiva ela é parecida com o campo, quando ela é negativa elas são opostas”;
- Aluno 5: “Os vetores de cargas invertidas se atraem e iguais se repelem”;
- Aluna 6: “Cargas positivas são fontes de linhas de campo, apontam

para a direita. Cargas negativas são devoradoras de linhas de campo, apontam para a esquerda”;

- Aluna 7: *“Se a carga de q é igual a do ponto (+), as setas vão em sentidos opostos. Já se a carga for diferente da do ponto (+ e -), as setas vão na mesma direção”.*

Questão 2

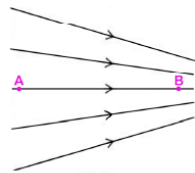
Especialmente na questões 2, é possível realizar uma análise mais quantitativa dos acertos e erros dos alunos, utilizando essas respostas para avaliar a sequência didática e o material proposto. No entanto, ao interpretar os resultados, é importante lembrar que a atividade foi realizada coletivamente pela turma; assim, o número de acertos e erros não deve ser interpretado da mesma forma que em uma prova tradicional.

A questão 2 da atividade (Figura 6.5a) é adaptada de uma questão do vestibular de 2014 da Universidade Federal de Santa Maria (RS), cuja versão original encontra-se na Figura 6.5b. Além de reformular a questão de formato objetivo para um formato de preenchimento de lacunas, foi removida a referência ao potencial elétrico presente na versão original, já que esse conceito será abordado com a turma em um momento posterior. Em seu lugar, foi incluído o item (c), que tem como objetivo avaliar a capacidade dos estudantes de utilizar a resposta da último item da questão anterior para responder a este.

As porcentagens de acertos e erros dos alunos em cada um dos itens da questão 2 estão representadas na Figura 6.6.

No item (b), que apresentou o maior índice de erro, acredita-se que a dificuldade esteja relacionada ao uso do termo “fonte” de campo. É possível que os alunos associem a palavra “fonte” exclusivamente a cargas positivas como fontes de linhas de campo, o que pode ter gerado confusão. De qualquer forma, é recomendável que o professor que aplica essa atividade esclareça essa diferenciação ao final da atividade.

2 – (UFSM – 2014 - Adaptada) A figura representa as linhas de campo de um campo elétrico.

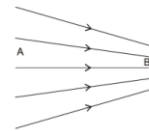


Assim, complete as afirmativas:

- O campo elétrico é mais intenso na região ____ pois a ____ de linhas de linhas de campo é ____ em torno desse ponto.
- Uma única carga de sinal ____ pode ser a fonte desse campo.
- Se abandonarmos uma carga elétrica com sinal negativo no ponto A, ela sofrerá uma força que aponta para ____

(a)

A tecnologia dos aparelhos eletroeletrônicos está baseada nos fenômenos de interação das partículas carregadas com campos elétricos e magnéticos. A figura representa as linhas de campo de um campo elétrico.



Assim, analise as afirmativas:

- O campo é mais intenso na região A.
- O potencial elétrico é maior na região B.
- Uma partícula com carga negativa pode ser a fonte desse campo.

Está(ão) correta(s)

- apenas I.
- apenas II.
- apenas III.
- apenas II e III.
- I, II e III.

(b)

Figura 6.5: Questão 2 da Atividade 2: Comparação entre (a) a versão adaptada aplicada aos alunos e (b) a versão original da questão do vestibular.

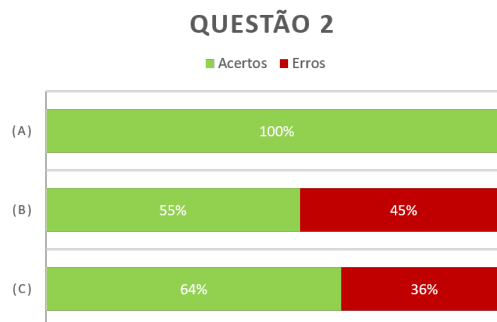


Figura 6.6: Distribuição percentual de acertos e erros para os itens da Questão 2 da Atividade 2.

Questão 3

A questão 3 (Figura 6.8) tinha como objetivo avaliar, primeiro, se os estudantes conseguiam identificar o vetor campo elétrico em uma região com linhas curvas e, segundo, se eram capazes de relacionar o campo elétrico à força elétrica sobre uma partícula de prova. Os resultados indicaram que, para os alunos, não houve dificuldade em identificar o campo elétrico em um ponto onde passa uma linha curva.

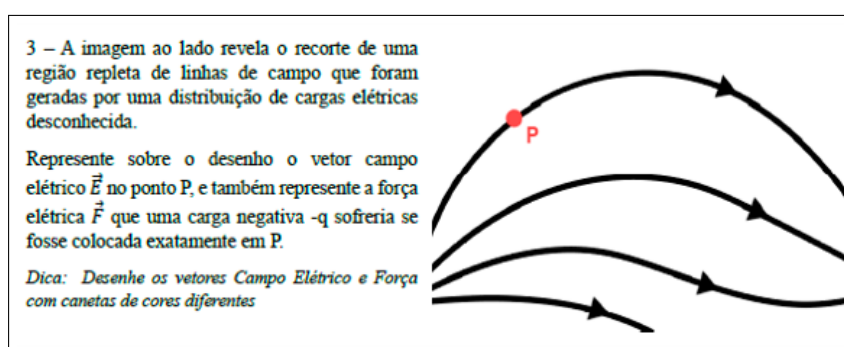


Figura 6.7: Questão 3 da Atividade 2

Questão 4

A questão 4 (Figura 5.7), que introduziu o conceito de campo elétrico uniforme, e gerou uma discussão produtiva entre os alunos, que ainda não haviam explorado esse tipo de campo. Um dos alunos tentou determinar o ponto de maior intensidade do campo pela proximidade da "fonte", mas ficou indeciso se a carga que gerava esse campo era uma positiva à esquerda da figura, ou uma negativa à direita. Esse questionamento chamou a atenção pois o mesmo aluno, na questão 2 item (a), demonstrou entender bem a relação entre a densidade das linhas e a intensidade do campo. Esse exemplo reflete uma compreensão parcial, onde alguns estudantes enxergam a densidade das linhas como uma consequência da intensidade do campo próximo a uma carga puntiforme.

Outro aluno sugeriu traçar círculos ao redor dos pontos para contar as linhas de campo passam por aquelas regiões, uma boa tentativa de quantificação a densidade de linhas. Em seguida, ao discutir os pontos A, C e

D, outro aluno argumentou que o campo nesses pontos seria igual ao dos pontos B e E, pois ainda é possível “*desenhar mais linhas ali*”, evidenciando uma boa compreensão de que ainda existe campo entre as linhas e que a quantidade de linhas representadas é arbitrária.

Houveram alunos que tentaram pegar uma régua para ver onde as linhas estavam mais “concentradas”, mas a compreensão coletiva só foi consolidada quando uma aluna, ao notar que as linhas eram equidistantes, deduziu que o campo seria igual em todos os pontos: “*Ué? Então eu não entendi a discussão. É todo mundo igual*”. Com essa excelente exclamação, a discussão foi finalmente interrompida pelo professor para se esclarecer o conceito com a turma toda e caracterizar esse tipo de campo como Campo Elétrico Uniforme (CEU).

Questão 5

Na questão 5 (Figura 5.8), foi notável a empolgação de alguns alunos ao verem suas respostas sendo mencionadas no enunciado, o que sugere um efeito motivacional positivo, pois eles se sentiram valorizados e engajados na atividade. Esse entusiasmo, no entanto, não se traduziu em uma reflexão mais profunda sobre o problema.

A abordagem dos alunos foi direta e objetiva: todos rapidamente concordaram com a opção ‘A’ como resposta correta, mas nenhum apresentou justificativa para sua escolha. Esse comportamento é comum quando os estudantes encaram a questão como um item objetivo de uma avaliação tradicional, que tende a focar apenas na escolha da resposta correta. Portanto, no encontro seguinte, foi feita novamente a pergunta sobre o motivo de todos terem marcado a “alternativa A”.

6.5 Aula pós atividade 2

Após a aplicação da atividade 2, no dia seguinte, discutimos com a turma algumas de suas respostas e outras questões sobre linhas de campo que, embora não estivessem no roteiro inicial, geraram resultados muito interessantes que merecem ser documentados.

Ao questionar a turma sobre o motivo de todos terem escolhido a “alternativa” A na última questão, muitos alunos não souberam justificar, explicando apenas que essa opção “parecia mais com uma carga”. Essa resposta pode ser valiosíssima se pensarmos que de maneira totalmente intuitiva os alunos fizeram uma espécie de expansão em multipolos ao imaginar que à longas distâncias o canudo se comporta como uma carga puntiforme. Porém uma segunda hipótese é que muitos marcaram essa opção devido a um estranhamento da segunda alternativa, que mais parecia esse novo conceito haviam acabado de ser apresentados, o CEU.

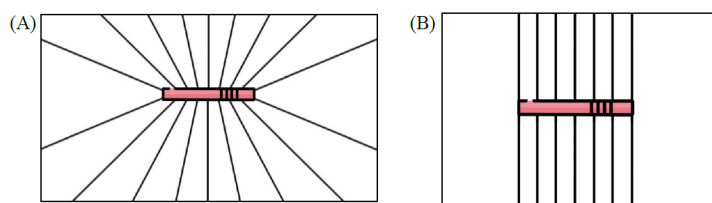


Figura 6.8: Imagens referentes a quinta questão da Atividade 2

Após uma explicação no quadro sobre a relação entre a imagem (A) e as respostas que deram na primeira atividade, um aluno fez uma observação interessante: *“ahhh então se fosse que nem no B [o canudo] atrairia [os papéis] de longe”*, enquanto fazia um gesto de ‘varinha mágica’ com sua caneta, ilustrando a compreensão da diferença entre as duas imagens e estendendo-a para prever o efeito físico da configuração de linhas de campo representada. Vale destacar que, embora a imagem B represente o campo de um fio infinito uniformemente carregado, a confusão entre essa representação e um campo uniforme é compreensível quando consideramos uma figura em duas dimensões, sendo ambas visualmente semelhantes de perfil. Como nosso objetivo com turmas de ensino médio não é adentrar nas sutilezas entre o 2D e 3D, a análise deste aluno é totalmente legítima e dotada de enorme valor para esta metodologia.

Em um momento posterior da aula, discutimos a proporcionalidade entre a carga e o número de linhas de campo associadas a ela. Para ilustrar, desenhiei um “pacote” de linhas de campo semelhante ao da Figura 6.9a. Quando perguntei o que os alunos imaginavam que havia dentro do pacote, todos res-

ponderaram prontamente que era uma carga positiva. Ao desenhar um novo pacote com o dobro de linhas (Figura 6.9b), a turma deduziu corretamente que representava uma carga com o dobro de valor, demonstrando uma boa compreensão da proporcionalidade.

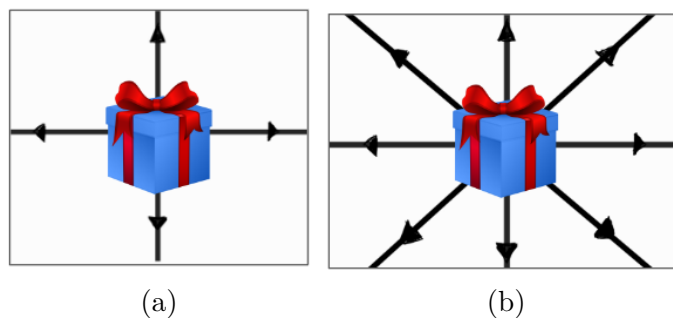


Figura 6.9: Representação dos dois primeiros desenhos feitos no quadro: o pacote em (a) contém uma carga puntiforme positiva $+Q$, enquanto o pacote em (b) contém uma carga puntiforme $+2Q$

Novos pacotes foram desenhados para aprofundar a análise. Ao perguntar o que poderia haver dentro do pacote na Figura 6.10a, a maioria respondeu que não deveria haver carga, já que nenhuma linha era criada ou “engolida” pelo pacote. Na Figura 6.10b, houve hesitação, mas, após refletirem, os alunos concluíram que provavelmente haveria uma carga positiva e uma negativa de mesma intensidade.

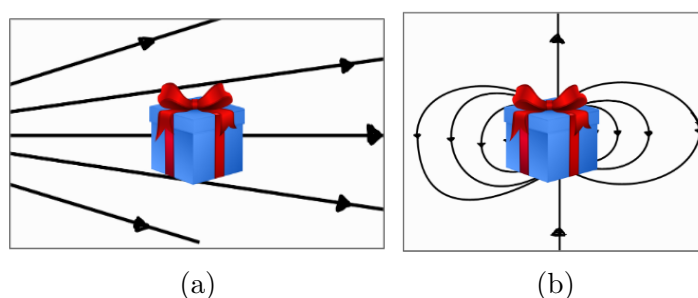


Figura 6.10: Representação dos desenhos feitos no quadro onde o pacote em (a) não contém cargas elétricas e o pacote em (b) contém um dipolo elétrico

Por fim, um último pacote, semelhante ao da Figura 6.11, foi desenhado e perguntei o que eles achavam que ele continha. A configuração peculiar

levou os alunos a refletirem mais, e, ao analisar o número de linhas saindo e entrando, a maioria concluiu que, apesar de haver várias cargas no pacote, o saldo era equivalente ao de uma carga com o mesmo valor da primeira configuração (Figura 6.9a). Essa parte não foi tão intuitiva assim para uma pequena parte da sala e precisou ser passada mais uma vez.

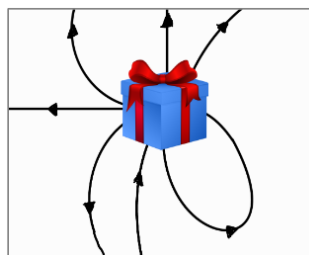


Figura 6.11: Representação do desenho feito no quadro de um pacote contendo uma configuração desconhecida de cargas

Observando que os alunos haviam acabado de aprender os princípios da Lei de Gauss, a discussão foi estendida, ao final da aula, para o intrigante problema do Universo Finito Neutro, onde, em um universo sem o “lado de fora”, não há linhas de campo que escapem. Essa discussão capturou a atenção da sala inteira, que se mostraram entusiasmados e motivados. É sabido que temas sobre o universo fascinam os jovens, mas captar essa atenção em uma aula de eletrostática, que quase sempre são abstratas e mecanizadas, é um feito raro e valioso proporcionado por esta sequência.

6.6 Atividade 3

A terceira atividade dessa sequência foi realizada aproximadamente duas semanas após a atividade anterior, em um dia em que se tinha dois tempos com a turma, sendo um no primeiro horário do dia e o outro no último. Diferente das etapas anteriores, essa foi a única atividade que precisou de mais de um tempo de aula para ser concluída.

Inicialmente, fez-se uma breve explicação sobre significa a carga ser puntiforme, destacando que cada carga que representamos antes com um círculo se localiza, na verdade, no centro deste. Para tornar o conceito mais claro,

foi utilizada a projeção de um dos slides da aula 2 (Figura 6.12a), onde foi deletado, em tempo real, o círculo que representava a carga em um slide, expondo apenas o ponto central de onde divergiam as linhas de campo (como na Figura 6.12b). Esse procedimento ajudou a consolidar o conceito de uma carga verdadeiramente puntiforme.

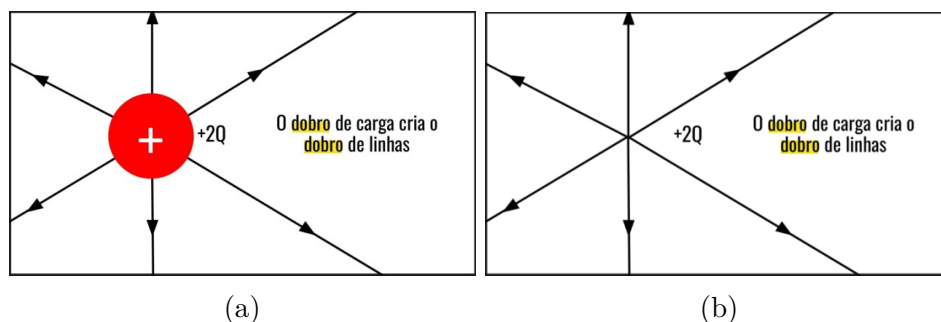


Figura 6.12: Slide projetado para a turma mostrando: (a) antes e (b) depois da remoção do círculo que representa a carga. Explicou-se aos estudantes que a verdadeira carga pontual, para essa representação, está localizada na interseção das linhas na imagem (b).

Como a turma era pequena, optou-se por entregar uma peça a cada aluno antes de distribuir o roteiro, permitindo que os alunos observassem e discutissem livremente as diferenças entre as peças. Essa etapa inicial gerou entusiasmo, e os alunos demonstraram interesse ao explorar as características físicas dos modelos. Apesar do dano em três peças durante a atividade, contava-se com peças de reposição, o que possibilitou a continuidade sem interrupções.

As questões propostas no roteiro buscaram orientar os alunos a observarem a distribuição das linhas de campo e a quantificarem, ainda que de forma imprecisa, a densidade dessas linhas em relação ao número de linhas. Abaixo, uma análise detalhada das respostas obtidas e das observações realizadas.

Peça A:

A1: Qual é a direção e o sentido de suas linhas de campo?

Análise: Todos os grupos identificaram corretamente a direção e o sentido das linhas de campo, reconhecendo que as linhas diver-

gem radialmente a partir de uma carga positiva. Mesmo com a ausência de pontas nas hastes, a turma não teve dificuldade em perceber essa orientação.

Grupo	Resposta
Grupo 1	Para fora e radial (todos os lados).
Grupo 2	As cargas estão apontando para vários lugares e, como a carga é positiva, estão apontando para fora.
Grupo 3	Sua direção aponta para todos os lados.
Grupo 4	Sentido contrário à direção da esfera.

A2: Quantas linhas de campo estão dentro do círculo quando o membro escolhido pelo grupo segura a peça com a mão marcada?

Análise: As respostas foram variadas, sugerindo uma interpretação livre do que deveria ser contado. Isso pode indicar uma falta de clareza na formulação da questão ou uma divergência na compreensão dos critérios para contagem.

Grupo	Resposta
Grupo 1	4
Grupo 2	Todas as linhas
Grupo 3	3
Grupo 4	O A possui 6 linhas de campo quando em contato

A3: Qual é a distância entre o centro da esfera e a palma da mão?

Análise: Os resultados foram consistentes, com todos os grupos aproximando a medida para 3 cm, exceto o grupo 4, que respondeu 1 cm. Essa discrepância sugere uma possível diferença na interpretação ou execução da medida.

Peça B:

B1: Desta vez, quando o mesmo membro do grupo segura agora a peça B, quantas são as linhas de campo que estão em contato com a área delimitada?

Análise: Nesta questão os grupos apresentaram respostas mais próximas (entre 5 e 6 linhas), exceto pelo Grupo 2, que mais uma vez respondeu “*Todas as linhas*”.

B2: Qual relação é possível observar entre a quantidade de linhas que passam pela mesma palma da mão quando se segura a Peça A e quando se segura a Peça B?

Análise: Alguns grupos mencionaram a diferença qualitativa de maneira correta. Contudo não houveram comparações quantitativa, mas a formulação da pergunta poderia ter sido mais específica para direcionar essa comparação (por exemplo, “quantas vezes mais linhas”).

Grupo	Resposta
Grupo 1	Como tem mais linhas, a quantidade mais que dobra.
Grupo 2	Peça B tem 7 linhas para fora e a A tem 5 linhas de diferença.
Grupo 3	A relação entre a quantidade de linhas entre a peça A e B é que as duas são usadas como base, mas a peça B tem duas linhas a mais que a peça A.
Grupo 4	A “B” possui menos linhas em contato com a área.

B3: De que maneira essa diferença se reflete no mundo real, isto é, o que essa diferença diz sobre o valor das cargas A e B?

Análise: A questão verificou que os alunos compreendem bem a relação entre carga e quantidade de linhas de campo.

B4: Sabendo que as cargas representadas pelas peças geram um vetor campo elétrico em cada ponto da palma da mão, e que a intensidade deste campo é medida através da concentração de linhas no entorno desse ponto, qual deve ser a relação matemática entre a intensidade do campo elétrico (E) e o valor da carga elétrica (Q)?

Análise: As respostas foram todas corretas, com os alunos mostrando que entendem a relação direta entre campo e carga, mas essa questão exigiu uma intervenção do professor no quadro para ensinar diferentes maneiras de representar proporcionalidade matematicamente.

Peça C:

C1: Por fim, segure a peça C com a palma da mão que foi marcada — como nas questões anteriores — determine o número de linhas que atravessam essa região.

Análise: Aqui todas as respostas ficaram dentro de uma flutuação esperada (de 1 a 2 linhas), com exceção do grupo 2 que respondeu “Todas estão para fora”. Esta resposta revela que a pergunta poderia ser escrita como “qual é o número máximo de linhas que conseguem atravessar essa região?”. Dessa forma, imagina-se que a resposta desse grupo seria 1 linha.

C2: Qual é a diferença entre o número total de linhas de campo que sai da peça A e o número total de linhas que sai da peça C? O que essa diferença nos dá de intuição sobre o valor das cargas elétricas representadas pela peça A e C?

Análise: Na questão todos os alunos foram capazes de reconhecer que, apesar das diferenças no comprimento das hastes, as peças A e C representam cargas de mesmo valor.

Questão C3: Ainda comparando a Peça C com a Peça A, determine a distância entre o centro da esfera na peça C e a palma da mão.

Análise: Nessa questão houve uma variação que não era esperada, visto que na peça A (com mesma quantidade de linhas de campo) a maioria chegou a rapidamente a resposta correta. Aqui, metade dos grupos (1 e 2) encontrou o valor esperado, 6 cm, e os outros dois grupos encontraram 4 cm.

Questão C4: O que você imagina que aconteça com as linhas de campo de peças com raios (distâncias) cada vez maiores, ou seja, à medida que nossa mão se afasta da carga?

Análise: A maioria dos alunos compreendeu que a densidade das linhas de campo diminui à medida que se afastam da carga. No entanto, o grupo 3 apresentou uma resposta confusa, sugerindo que a redução da densidade de linhas implicaria em uma diminuição do valor da carga, e não do campo. Isso contrasta com a resposta dada na questão C2, onde afirmaram que as peças A e C representam cargas de mesmo módulo.

Grupo	Resposta
Grupo 1	Vão ficando menos concentradas.
Grupo 2	A quantidade de linhas diminui.
Grupo 3	As linhas ficam maiores e com isso as linhas passam pelo campo, diminuem, diminuindo o valor da carga.
Grupo 4	Menos linhas estão em contato.

Questão C5: Como foi feito na sessão anterior, busquem agora uma relação matemática entre a distância da carga à palma da mão (d) e a intensidade do vetor campo elétrico (E).

Análise: Todos os grupos identificaram corretamente a relação é inversamente proporcional, embora a orientação do professor tenha sido necessária para que alguns alunos diferenciasssem $\frac{1}{d^2}$ de $\frac{1}{d}$ e conseguem formalizar uma resposta.

Grupo	Resposta
Grupo 1	$E = \frac{1}{d^2}$ -> inversamente proporcional.
Grupo 2	$E \propto \frac{1}{d^2}$
Grupo 3	$E \propto \frac{1}{d^2}$, dobramos a distância e o campo dividiu por 4.
Grupo 4	$C = d \cdot E$

Conclusão:

Considerando as relações matemáticas estabelecidas nas questões anteriores, como podemos expressar a intensidade do vetor campo elétrico (E) por meio de uma equação?

Análise: A maioria dos alunos conseguiu integrar os resultados das questões B4 e C5 para expressar corretamente a relação entre campo, carga e distância. a formalização matemática desse conhecimento só foi possível devido à mediação do professor ao longo da atividade.

Grupo	Resposta
Grupo 1	$E \propto Q \frac{1}{d^2}$
Grupo 2	$E \propto Q$
Grupo 3	$E \propto \frac{Q}{d^2}$ (Proporcional à carga e inversamente proporcional ao quadrado da distância)
Grupo 4	$q = E \cdot \frac{d}{C}$

Por fim, notou-se que a divisão dos grupos em quartetos revelou-se excessiva, pois, em cada grupo, ao menos um aluno não se envolveu ativamente na atividade. Assim, conclui-se que seria mais eficaz organizar os grupos em duplas ou, no máximo, trios, para promover uma participação mais equilibrada e engajada entre todos.

Além disso, percebemos também que o fato de a atividade ter sido realizada em dois momentos distintos — no início e no final do dia letivo — impactou negativamente a motivação dos alunos, que, no último período, já não demonstravam o mesmo nível de engajamento. Essa interrupção comprometeu a continuidade e quebrou o ritmo da atividade, sendo um ponto importante a considerar para otimizações em futuras aplicações.

6.7 Linhas de Campo no ENEM 2024

Embora o principal objetivo da sequência apresentada não seja preparar os estudantes para avaliações em larga escala, o ensino de Física por meio das linhas de campo no Ensino Médio também desempenha um papel utilitário no contexto de vestibulares, como evidenciado na versão final da questão 2 da atividade 2. Coincidentemente, no mesmo ano em que essa sequência foi implementada, a interpretação de um diagrama de linhas de campo para compreender um fenômeno físico (a blindagem eletrostática) apareceu como uma habilidade central em uma das questões de Ciências da Natureza (Figura 6.13) do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

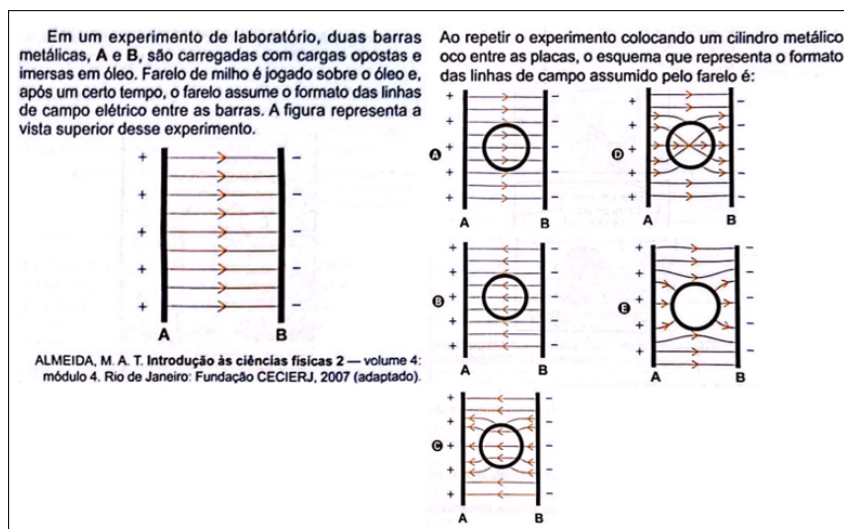


Figura 6.13: Questão de 104 da prova cinza de Ciência da Natureza do ENEM 2024.

É interessante observar que a questão apresenta uma motivação física concreta para o uso das linhas de campo, além de as tratar como uma ferramenta para compreender fenômenos naturais — tudo o que defendemos nesse trabalho. Acreditamos que essa seja a combinação ideal para seu uso na educação básica.

Infelizmente, não dispomos de dados quantitativos sobre o desempenho dos alunos que participaram desta sequência em relação a essa questão, nem o percentual de acertos dessa questão no Brasil como um todo, informações que certamente enriqueceriam o presente trabalho ao permitir uma análise mais objetiva da eficácia do ensino baseado em linhas de campo.

6.8 Conclusões e versão final do produto

Após essa análise, decidimos realizar alguns ajustes no produto para sua versão final, disponível no apêndice A. Começamos pelo design dos roteiros, que inicialmente eram mais simples. Acreditamos que um visual mais elaborado pode transmitir um senso de cuidado aos alunos e ajudá-los a entender que essas atividades têm um caráter diferente das avaliações tradicionais, muitas vezes associadas a um design mais básico e que, involuntariamente, geram pressão para que eles não cometam erros.

A mudança mais significativa na sequência didática foi inverter a ordem da atividade 1 com a aula 1. Observamos que iniciar com uma atividade investigativa é mais estimulante para os alunos, pois permite que comecem com uma pergunta (o que existe entre o papel e o canudo?), explorando suas concepções prévias sobre o fenômeno, para então apresentar a resposta (a existência de um mediador de interações à distância, que chamamos de campo). Na configuração anterior, os alunos acabavam reproduzindo na atividade o que viram na aula, o que é positivo, mas não avalia suas ideias iniciais. Com essa alteração, substituímos a palavra “mediador” da questão final da atividade 1 por uma expressão mais aberta, como “alguma coisa”, tornando as respostas menos direcionadas.

Para os slides da aula 2, fizemos ajustes sutis no design das linhas de campo, corrigindo algumas setas que perderam o alinhamento ao serem trans-

feridas do PowerPoint para o Google Slides. Alguns alunos mencionaram que as setas assimétricas em relação à carga causavam incômodo visual, então buscamos uniformizar esses elementos.

Na atividade 2, revisamos a questão 1 para dar aos estudantes a liberdade de escolher o ponto P em qualquer região do espaço, ao invés de limitar à direita da carga. Também incluímos uma figura da mesma carga até o item d, de forma que cada item fosse tratado como uma nova análise, evitando que os alunos sobrepussem todos os desenhos de vetores, pontos e linhas na mesma representação. Na questão final, removemos os marcadores "(A)" e "(B)", que davam a impressão de uma questão objetiva, e adicionamos linhas para que os alunos escrevessem suas respostas, reforçando o caráter dissertativo. Esteticamente, removemos os três riscos de cada canudo, que poderiam ser confundidos com linhas de campo, e adicionamos duas linhas horizontais na figura B para dar uma representação mais familiar, com linhas horizontais e verticais em torno das cargas pontuais.

Na atividade 3, passou a ser recomendável que não apenas um, mas todos os membros do grupo tocassem e analisassem a densidade das linhas com as mãos. Algumas perguntas foram reformuladas para tornar os comandos mais claros e minimizar a imprecisão na análise quantitativa final.

Capítulo 7

Considerações Finais

As linhas de campo têm sido um recurso no ensino da Física há mais de meio século, amplamente utilizadas por grandes nomes como Richard Feynman, conhecido como *o grande explicador*, para ilustrar fenômenos do eletromagnetismo. Este trabalho, portanto, não pretende reinventar essa abordagem, mas sim explorar e potencializar um recurso que ainda é subutilizado, que muitas vezes aparecendo no ensino apenas como um elemento meramente ilustrativo. Nossa proposta sugere um uso didático mais aprofundado das linhas de campo, aplicável desde a resolução de problemas instigantes no ensino superior até o ensino de eletrostática no ensino médio, onde se concentra o material instrucional desenvolvido neste trabalho.

A sequência de aulas e atividades proposta para o ensino médio utiliza as linhas de campo como elemento que permeia todas as etapas, com o objetivo de tornar o conceito de campo elétrico mais concreto e acessível para os estudantes. Como ferramenta auxiliar, incluímos a impressão 3D na última atividade, com o objetivo de reforçar a materialidade do campo elétrico e facilitar a compreensão visual e tátil desse conceito abstrato.

Esse material foi aplicado em uma turma do 3º ano do ensino médio de uma escola privada no Rio de Janeiro, e os resultados foram bastante satisfatórios. Além de tornarem as aulas mais dinâmicas e menos repetitivas para o professor, essa sequência motivou os estudantes a se envolverem em diversos momentos com um conceito tradicionalmente visto como cansativo

e desinteressante no ensino médio. Ficou evidente que os alunos adquiriram uma maior familiaridade com o conceito de campo.

Ressaltamos que essa sequência de aulas não precisa necessariamente ser a introdução ao estudo de eletrostática no ensino médio; ela pode ser aplicada de forma parcial ou completa em outros momentos do ensino de eletromagnetismo, ou até como uma atividade extracurricular. O uso de uma impressora 3D, embora desejável, não é obrigatório para aproveitar o material proposto. Além disso, vale enfatizar que este material não se propõe a substituir o ensino de conteúdos clássicos, como a Lei de Coulomb ou o Princípio da Superposição, que foram abordados separadamente com os estudantes ao final da sequência.

Ainda há muito a ser desenvolvido neste trabalho, especialmente com a perspectiva de adaptar o material para estudantes com deficiência visual, um público ao qual acreditamos que este recurso pode trazer contribuições significativas. Outras possibilidades de aprimoramento incluem o aperfeiçoamento das peças impressas e a criação de novos modelos 3D com diferentes configurações de campo, como as linhas de campo de um dipolo, para uso em maquetes táteis.

Acreditamos que a abordagem adotada neste material tem grande potencial para apoiar o ensino de eletromagnetismo, superando barreiras conceituais e estimulando tanto a curiosidade científica quanto a compreensão da natureza eletromagnética. Esperamos que esta dissertação contribua de forma significativa para o avanço do ensino do Eletromagnetismo.

Apêndice A

Material Instrucional

Caro(a) professor(a),

Este material foi desenvolvido pensando em você, que está à procura de novas formas de abordar a Eletrostática em sala. Aqui, você encontrará uma sequência de aulas e atividades com o objetivo de tornar o tema menos abstrato e mais acessível para seus alunos, proporcionando uma experiência de aprendizado envolvente e significativa. Para isso adotamos o conceito das Linhas de Campo como um recurso chave que interliga todas as atividades.

Neste capítulo, você encontrará uma visão geral do material e como ele pode ser utilizado no planejamento das suas aulas.

No capítulo seguinte, todas as aulas e atividades da sequência didática estão detalhadamente descritas. Recomendamos que siga a ordem apresentada, pois ela foi cuidadosamente planejada para construir gradualmente os conceitos e habilidades necessários para o entendimento completo da Eletrostática. No entanto, fique à vontade para ajustar o ritmo e a ordem de acordo com as necessidades e limitações de sua turma, seja em termos de tempo ou recursos disponíveis.

O terceiro capítulo traz um guia completo para modelar, imprimir e montar as peças em 3D que utilizamos em nossa última atividade. Sabemos que nem todas as escolas têm fácil acesso a impressoras 3D, mas acreditamos que este recurso pode agregar valor ao ensino, permitindo que os alunos explorem conceitos abstratos de maneira mais concreta e prática. Além disso, incluí-

mos sugestões de alternativas caso a impressão 3D não esteja disponível.

No quarto capítulo, disponibilizamos uma sequência de links com os materiais do professor, incluindo slides das aulas, modelos dos materiais utilizados e outros links que julgamos relevantes para facilitar a implementação das atividades em sala de aula.

No capítulo final, você encontrará o material dedicado aos alunos, com roteiros de atividades prontos para serem utilizados diretamente em sala de aula. Esses roteiros foram pensados para facilitar a condução das atividades e promover a autonomia dos estudantes durante o processo de aprendizagem.

Os materiais mencionados, assim como a dissertação associada a este material instrucional, podem ser encontrados na [página do Mestrado Profissional em Ensino de Física da UFRJ](https://bit.ly/4fzcKs0) (bit.ly/4fzcKs0) ou diretamente nos **capítulos A.3 e A.4** deste texto.

Douglas de Souza

Reinaldo de Melo e Souza

Rodrigo Pereira

A.1 Descrição do Material Instrucional

A.1.1 Atividade 1: Boas Vindas à Física do Invisível

O objetivo desta atividade é investigar as concepções prévias dos estudantes sobre eletrostática, e ao mesmo tempo promover a reflexão ativa deles sobre o conceito de campo. Para isso, os estudantes realizarão o clássico experimento de atrair pedaços de papel com um material eletrizado por atrito.

Essa atividade pode ser realizada sem grandes despesas, usando materiais simples e facilmente acessíveis em sala de aula, como papel de caderno e canetas esferográficas, além do roteiro impresso, que está no capítulo A.4. Como sugestão, recomendamos substituir as canetas por canudos plásticos, que, apesar de comuns no dia a dia dos alunos, não são comuns em salas de ensino médio. Essa pequena mudança é capaz de gerar um aumento significativo no engajamento dos alunos.

Sugerimos ainda o uso de canudos de cores sortidas para que os alunos possam escolher o seu. Dar o poder de escolha para o aluno ajuda a personalizar a experiência, criando assim um vínculo com a tarefa. Além de ser um material de baixo custo, canudos coloridos ainda podem ser facilmente encontrados em lojas de artigos para festas.

Outro fator importante de se lembrar é que as condições climáticas podem interferir no experimento. Em locais ou períodos de baixa umidade, é mais fácil eletrizar corpos por atrito, enquanto em ambientes úmidos o processo pode ser mais demorado, mas ainda viável. O tipo de cabelo e os produtos que os alunos utilizam podem influenciar o resultado. Em caso de dificuldade, o professor pode disponibilizar folhas de papel-toalha para o atrito. Recomendamos que o professor teste a atividade previamente para garantir o sucesso em sala.

Cada grupo de estudantes (entre 3 a 4 estudantes) recebe uma cópia do roteiro.

1. Na questão 1, os estudantes recebem instruções para realizar o experimento e são orientados a comparar o comportamento do sistema antes

e depois do atrito. O objetivo é que eles observem e descrevam o fenômeno, percebendo que ele está diretamente relacionada ao atrito.

2. Na questão 2, os estudantes devem relacionar a interação entre o tubo e o papel com a distância entre eles. Embora possa parecer uma questão simples agora, ela é fundamental para a sequência didática, pois as respostas fornecidas pela turma aqui estarão em destaque na atividade seguinte, quando o conceito de linhas de campo for abordado, mas os alunos não deverão saber disso neste momento.
3. Na questão 3, o grupo é incentivado a formular hipóteses sobre o efeito da fricção entre o cabelo e o tubo, explorando as mudanças que ocorrem no tubo após o atrito. O objetivo é avaliar os conhecimentos prévios dos alunos sobre a composição da matéria. Além disso, caso um integrante do grupo tenha maior entendimento sobre o tema o objetivo é que ele possa ajudar a lembrar os demais, promovendo a instrução por pares.
4. A questão 4 tem como objetivo incentivar os estudantes a refletirem sobre os mecanismos invisíveis por trás das interações a distância.
5. Na última questão, os alunos são desafiados a discutir a sobre a existência de um terceiro elemento presente na interação entre o tubo e o papel. Em caso de uma resposta positiva, pede-se aos alunos para usarem a criatividade para dar um nome e uma forma para esse elemento misterioso.

A.1.2 Aula 1: Boas Vindas à Física do Invisível

Os objetivos desta sequência de slides são, primeiramente, provocar uma série de questionamentos aos alunos, incentivando-os a refletir sobre ações à distância que eles já experimentam em seu dia a dia. Junto com as perguntas, ao longo da sequência, introduzimos a ideia de um mediador dessas interações, que ao final da atividade chamamos de campo. No encerramento, propomos um breve questionamento para debater com os alunos se a ideia de campo é realmente necessária e se ele de fato existe.

A.1.3 Aula 2: O que é Carga Elétrica? A evolução do conceito ao longo do tempo

Diferente da aula anterior, nesta miramos exclusivamente na Eletrostática com o objetivo de apresentar cargas elétricas como criadoras e destruidoras de linhas de campo. A sequência começa com uma introdução histórica, destacando Tales de Mileto e suas observações sobre o atrito no âmbar (do grego *elektron*), seguidas pela popularização da eletricidade no século XVIII com experimentos como o de Stephen Gray, e como esse fenômeno influenciou na cultura pop como conhecemos hoje. Em seguida, aborda-se o trabalho de Benjamin Franklin, que identificou os dois tipos de eletricidade, e Charles Coulomb, que formulou a Lei de Coulomb.

Destacamos que, até este ponto, não há grandes novidades em relação à forma como a eletrostática é apresentada no ensino médio — muitos livros didáticos já fazem essa introdução nas primeiras páginas do capítulo inicial de eletrostática [19]. A diferença em nosso material é que, ao contrário do tradicional, que apresenta o conceito de campo apenas em capítulos posteriores, aqui optamos por fazer uma transição direta de Coulomb e sua lei de força para Michael Faraday e o conceito de campo elétrico. Vale salientar que, embora tenhamos passado rapidamente pela Lei de Coulomb, isso não significa que não voltaremos a utilizá-la mais adiante. Ela será retomada para ensinar os alunos a quantificar a força elétrica.

Adiante, as cargas são apresentadas como criadoras/devoradoras de linhas de campo, e explicamos as regras básicas dessas linhas.

A.1.4 Atividade 2: Mapeando as Linhas de Campo

Embora os estudantes frequentemente acreditem ter compreendido plenamente uma aula expositiva e afirmem não ter dúvidas, a aplicação desse conhecimento costuma ser uma etapa bem mais desafiadora. O objetivo desta atividade é justamente instigar os alunos a refletir e manipular as linhas de campo, transformando as informações adquiridas em um conhecimento mais sólido.

Para realizar essa atividade, o único material necessário é uma cópia do

roteiro da Atividade 2 (disponível no Capítulo A.4), sendo uma cópia por grupo de 3 a 4 alunos. Vale destacar que não é necessário manter a mesma formação de grupos da atividade anterior.

O início da atividade pode apresentar dificuldades para os alunos, portanto o professor desempenha um papel fundamental nesta etapa, oferecendo maior atenção e suporte aos grupos. À medida que a atividade avança, os alunos começam a se adaptar, colaborando uns com os outros, auxiliando seus colegas e se engajando nas discussões, tanto dentro de seus grupos quanto com grupos adjacentes.

1. Na questão 1, é apresentada uma carga pontual positiva e pede-se que os alunos desenhem as linhas de campo geradas por essa carga. Em seguida, eles devem analisar a ação do campo em um ponto específico, representando o vetor campo elétrico e a força elétrica que uma carga de prova experimentaria em duas situações: sendo ela positiva ou negativa. O objetivo aqui é leva-los a perceber a relação entre força e campo, e a sua dependência com o sinal da carga no ponto.
2. A questão 2, adaptada do vestibular da UFSM de 2014, avalia se os estudantes conseguem relacionar densidade das linhas com intensidade do campo, bem como a capacidade de associar as linhas de campo com sua fonte. Além disso, destaca-se que a compreensão das linhas de campo é uma habilidade frequentemente cobrada em vestibulares.
3. A questão 3 pede aos alunos que desenhem vetores representando o campo elétrico e a força elétrica atuando sobre uma carga em um ponto onde as linhas de campo são curvas. Nesse ponto, não é mais possível inferir a distribuição de cargas que originou essa configuração, embora ela ainda seja real.
4. Na questão 4, a turma é introduzida ao conceito de Campo Elétrico Uniforme (CEU) pela primeira vez. Os alunos são desafiados a identificar o ponto de maior intensidade do campo, embora, como professores, saibamos que o campo é o mesmo em toda a região. O objetivo é fomentar o debate tanto entre os membros do mesmo grupo quanto entre

diferentes grupos, com o professor atuando como questionador e mediador da discussão, guiando-os até que a maioria chegue à conclusão correta. Somente ao final da atividade o professor formaliza o conceito de CEU.

5. Na última questão, os estudantes devem comparar suas respostas da questão 2 da atividade anterior com as imagens apresentadas e escolher qual melhor representa o campo elétrico do canudo, justificando com base em seus conhecimentos sobre linhas de campo.

No capítulo A.4, você encontrará essa questão no roteiro, juntamente com as respostas fornecidas pela primeira turma a que esse material foi aplicado. Recomendamos que, ao destacar esse roteiro em PDF, o professor edite essa parte, substituindo as respostas da turma anterior pelas respostas da sua própria turma, mantendo o modelo original, onde os trechos que indicam a relação entre distância e intensidade estão destacados em negrito.

Para realizar essa edição, sugerimos o uso de um editor de PDF online gratuito, caso o professor não disponha de um software específico em seu computador. Uma simples busca na internet oferece diversas opções de editores gratuitos.

A.1.5 Atividade 3: Lendo as linhas (de campo) na palma da sua mão

Nesta atividade, os estudantes irão explorar empiricamente o conceito de campo elétrico e a Lei do Inverso do Quadrado. Para isso, eles serão divididos em grupos, preferencialmente em duplas ou trios, dependendo do tamanho da turma e da quantidade de kits disponíveis. Cada grupo receberá um roteiro (disponível no capítulo A.4) e um kit contendo três peças identificadas pelo professor como A, B e C, que representam cargas pontuais em diferentes configurações (veja na Figura A.1).

O professor apresentará as peças e orientará os alunos a analisá-las de forma individual inicialmente, observando suas características.

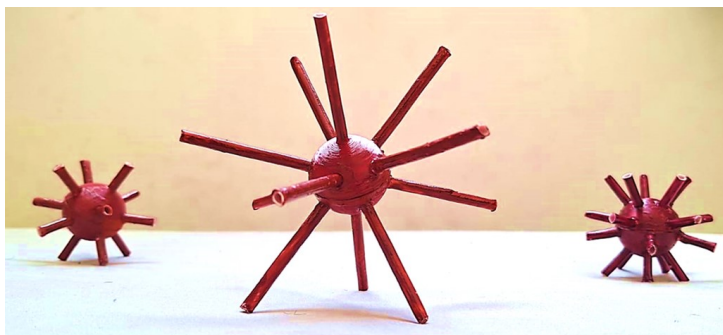


Figura A.1: Kit contendo as três peças: Peça A (à esquerda), Peça B (à direita) e Peça C (ao centro), representando diferentes configurações de cargas pontuais para a Atividade 3

- A Peça A é uma esfera com 12 hastes radiais, representando uma carga pontual positiva de módulo Q . As hastes não indicam sentido, simbolizando uma carga positiva. A maior distância entre dois extremos é de 6 cm (raio de 3 cm).
- A Peça B possui 20 hastes de comprimento igual às da primeira peça, representando uma carga pontual com módulo de $\frac{5Q}{3}$.
- A Peça C, semelhante a peça A, possui 12 hastes, mas com uma distância total entre extremos de 12 cm, simulando uma carga pontual de módulo Q observada 2 vezes mais distante em relação a Peça A.

O objetivo desta atividade é proporcionar aos estudantes uma experiência prática e sensorial que permita uma compreensão empírica do conceito da Lei do Inverso do Quadrado. Ao manipular as peças e observar a concentração das linhas de campo em suas mãos, os alunos poderão associar a intensidade do campo elétrico a uma percepção física e tangível, facilitando a internalização do conceito abstrato que é o campo elétrico como uma entidade concreta e mensurável. Com isto em mente, foram elaboradas as questões do roteiro, planejadas para orientar os estudantes nessa análise.

Antes de começar a responder as perguntas do roteiro, os alunos devem desenhar círculos em suas mãos, nos quais, em algumas questões, eles terão posicionar as peças para medir a densidade de linhas de campo. É importante

que mais de um aluno faça essas medições, pois esses valores vão variar de aluno para aluno e o grupo todo deve chegar num valor comum para todos aumentando o número de medidas.

O roteiro da atividade é estruturado em quatro partes, cada uma com o foco em uma peça, além da parte final que é a conclusão. Abaixo, uma análise das questões de cada parte:

Para a **Peça A**:

1. A Questão 1 pede apenas para os alunos identificarem a direção e o sentido das linhas de campo, mesmo sem indicação explícita de sentido nas hastes - porém com a informação de que a carga é positiva.
2. A Questão 2 pede para os alunos realizarem a primeira medição do número de linhas sobre a região delimitada na mão - que representa densidade de linhas - para ser usada como comparação com as demais peças.
3. Na Questão 3 deve-se medir a distância entre o centro da carga e uma das extremidades das hastes (o raio da peça). Pode ser aconselhado pelo professor que a medida seja feita de ponta a ponta e dividida por dois para obter o raio.

Para a **Peça B**:

1. Nas Questões 1 e 2, os alunos devem prosseguir com as medições, que servirão como base para desenvolver as respostas às questões 3 e 4.
2. A Questão 3 explora a capacidade dos alunos de relacionar, em um contexto tridimensional, o valor da carga com a quantidade de linhas de campo da peça, permitindo uma comparação qualitativa sobre qual peça representa uma carga de maior módulo (A ou B). Como objetivo secundário, verifica-se se os alunos conseguem extrapolar a razão entre as linhas ($5/3$) para a razão entre os módulos das cargas.

3. Na Questão 4, o professor deve estimular os alunos a estabelecer uma correlação matemática entre campo e carga, esperando-se que eles argumentem a favor da proporcionalidade direta entre essas grandezas.

Para a **peça C**:

1. Nas Questões 1 e 3, os alunos devem continuar realizando as medições, que servirão de base para as respostas nas demais questões relacionadas à peça.
2. A Questão 2 tem como objetivo fazer com que os alunos percebam que, embora as peças A e C apresentem diferenças físicas, ambas representam a mesma carga, porém sob diferentes perspectivas.
3. A Questão 4 investiga se os alunos conseguem expandir a análise e imaginar que, para hastes mais longas, o valor da carga permanece constante, enquanto as extremidades das hastes ficam cada vez mais distantes entre si, indicando uma diminuição da densidade do campo.
4. Na Questão 5, o professor deve incentivar os alunos a estabelecer uma correlação matemática entre o campo e a distância em relação à carga. Espera-se que os alunos argumentem que essas grandezas são inversamente proporcionais. O professor pode intervir, quando necessário, para orientá-los a observar que a relação é, na verdade, inversamente proporcional ao quadrado da distância, dependendo dos resultados obtidos. Esse ponto pode ser abordado durante a aula ou em uma discussão posterior.

Na parte final, a **Conclusão**, os alunos devem juntar as conclusões obtidas nas questões 4 da peça B e 5 da peça C, chegando ao conceito de que $E \propto \frac{Q}{d^2}$, ou conclusões próximas. O professor conduzirá a discussão para consolidar esse entendimento, destacando que esse é um passo sutil, portanto não se espera que todos cheguem no resultado da Lei de Coulomb.

A.2 Cargas 3D

Neste capítulo, detalharemos o processo de construção das peças utilizadas na terceira atividade da sequência didática apresentada. Nela, cada grupo de estudantes recebeu um kit contendo três peças, sendo que duas delas são baseadas no mesmo modelo 3D, representando uma carga com 12 linhas de campo elétrico. A única diferença entre essas duas peças está no tamanho das linhas de campo (as hastes). A terceira peça, por sua vez, representa uma carga com 20 linhas de campo, exigindo uma modelagem distinta.

Cada peça é composta por duas partes: uma esfera com encaixes, que representa uma carga pontual, e as hastes, que representam suas linhas de campo. A esfera foi modelada e impressa em 3D, enquanto as hastes foram adquiridas separadamente, já prontas. Optar por um material pronto não apenas reduziu o tempo total de impressão, mas também aumentou a durabilidade das peças, já que hastes impressas em 3D tendem a ser frágeis. Como hastes, foi utilizado 'palitos de pirulito e topo de bolo', facilmente encontrados em lojas de artigos para festas, embora creio que qualquer material similar possa substituí-lo. O importante é que as hastes sejam compridas e fáceis de cortar, permitindo assim a manipulação precisa dos tamanhos necessários para representar as diferentes linhas de campo.

Para garantir a precisão na montagem, o primeiro passo antes de iniciar a modelagem é medir o diâmetro das hastes. A medida encontrada para as hastes utilizadas neste projeto foi de 4,8 mm, sendo importante anotar esse valor. O ideal é usar um paquímetro para obter uma medição precisa, mas, na ausência desse instrumento, pode-se utilizar uma régua. No entanto, ao utilizar uma régua a imprecisão aumenta consideravelmente, resultando em possíveis encaixes inadequados das hastes, o que exigiria a reimpressão das peças. Para minimizar esse risco, recomenda-se imprimir uma peça de teste antes de iniciar a produção dos kits, conforme descrito no final da Seção A.2.4.

A.2.1 Modelagem das Cargas no Fusion 360

O software escolhido para modelar as peças foi o Autodesk Fusion 360, um dos mais populares no ramo de modelagem 3D. Dentre as principais vantagens deste programa estão o fato de ele oferecer licenças gratuitas para uso doméstico (link disponível no capítulo A.3) e o de contar com uma vasta comunidade de usuários, o que facilita o acesso a diversos tutoriais no YouTube, fóruns na internet e uma variedade de *plugins*.

As peças desenvolvidas nesse trabalho foram modeladas com o objetivo de serem completamente isométricas, e por isso a escolha de um software de modelagem paramétrica como o Fusion, ao invés de um software de modelagem orgânica - ideal para a modelagem de seres animados.

A modelagem de uma carga esférica isométrica envolve a distribuição equidistante de furos sobre sua superfície, nos quais as linhas de campo serão encaixadas. Entretanto, conforme discutido no Capítulo 2 da dissertação associada a este material, essa distribuição uniforme só é possível quando utilizamos como base poliedros regulares — também conhecidos como poliedros de Platão. Para um aprofundamento nas nuances geométricas intrínsecas ao conceito de linhas de campo em três dimensões, recomendamos ao leitor conferir a seção 2.3 da dissertação.

Portanto a escolha por modelos de 12 e 20 furos não é arbitrária, mas resulta diretamente da limitação no número de poliedros platônicos. Podemos usar como base para isto um dodecaedro onde fazemos 12 furos a partir do centro de suas faces e 20 furos a partir dos 20 vértices. Da mesma forma, podemos usar apenas um icosaedro (20 faces e 12 vértices) para construir ambos os modelos. Mostrarei brevemente como se faz das duas maneiras.

A.2.2 Construindo um Dodecaedro

Ao abrir o aplicativo, damos um nome para nosso projeto e criamos a base da nossa peça clicando com o botão direito em (Não Salvo) > Novo componente. Por organização, é bom nomear esse componente de Dodecaedro. A partir daí a maneira mais fácil de gerar um dodecaedro é através do *plugin* Gerador de Poliedros.

Essa extensão pode ser obtida gratuitamente na loja de aplicativos da Autodesk. Para acessá-lo, vá até a aba Utilidades, clique sobre o nome "Complementos" e depois selecione "Loja de Aplicativos do Fusion". Na página que será aberta no navegador, use a barra de pesquisa para procurar por "Polyhedron Generator". Após localizar o Gerador de Poliedros, clique em "Download", execute o arquivo baixado, e o *plugin* já irá aparecer no seu Fusion. Para executar a extensão, vá em "Complementos" novamente, clique em "Script e Complementos" e, na aba Complementos da janela que é aberta, selecione "Polyhedron Generator" e clique em executar.

Depois disso você pode ir até a aba Sólidos, clique sobre "Criar" e o Gerador de Poliedros aparecerá no final da lista. Ao abrir o gerador de poliedros, basta selecionar o dodecaedro entre os sólidos platônicos e confirmar. A Figura A.2 mostra o polígono gerado.

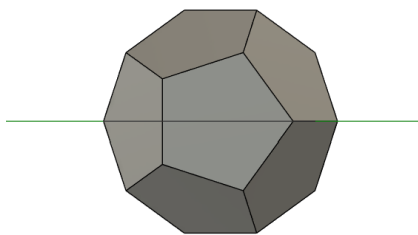


Figura A.2: Dodecaedro construído pelo Gerado de Poliedros

Embora o uso de um *plugin* possa facilitar a criação de um dodecaedro, é totalmente possível construí-lo manualmente no Fusion 360. A seguir, explicarei o processo passo a passo, portanto, caso tenha êxito através da extensão, pule para a subseção A.2.3.

Caso, por algum motivo, não tenha conseguido instalar o *plugin*, crie um novo componente, e o nomeie "Dodecaedro". Vá até a aba "Superfície", clique em Criar Esboço e selecione o plano XY. Em seguida, acesse o menu "Criar» Polígono > Polígono Inscrito e configure o número de lados do polígono para 5 e o raio da circunferência como 11,5 mm a partir da origem. Finalize o esboço para criar uma superfície sólida a partir dele.

Selecione o perfil do pentágono, criado a partir do esboço, e ainda na aba

"Superfície" clique na ferramenta Correção (ao lado de Criar Esboço) e depois em "OK". Nesse ponto, você terá a primeira face do nosso dodecaedro.

Duplique a superfície recém-criada, expandindo o componente Dodecaedro no navegador do Fusion (lista que fica à esquerda), abrindo a pasta "Corpos", copiando o único elemento da pasta (ver a Figura A.3) com o 'Ctrl + C' e dando 'Ctrl + V' , ou 'colar', na mesma pasta.

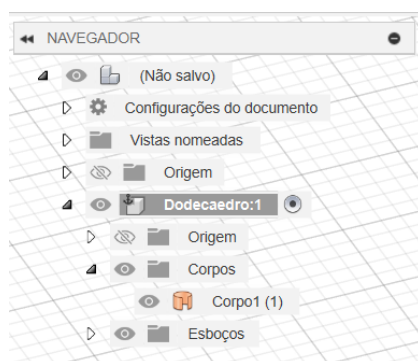


Figura A.3: Local de 'Corpo1 (1)', elemento a ser duplicado

Ao fazer isto, automaticamente será aberta a ferramenta "Mover/Copiar", se, por algum motivo, a janela desta ferramenta não aparecer, clique sobre 'Corpo 2 (1)' e em seguida a tecla "M". Em "Mover tipo» Rotacionar selecione o eixo de rotação clicando sobre uma das arestas da face pentagonal e insira o ângulo de rotação de 116,57 graus.. Verifique se a nova face está posicionada corretamente antes de finalizar o comando.

Para formar a primeira metade do dodecaedro, você pode replicar a nova face ao redor do eixo Z. No menu "Criar", selecione a ferramenta "Padrão Circular". Escolha a segunda face que você acabou de criar e defina o eixo de rotação como o eixo Z (o eixo vertical que passa pelo centro do dodecaedro). Defina o número de repetições para 5 (como ilustra a Figura A.4). Isso criará cinco faces ao redor da face central, distribuídas simetricamente.

Agora que a primeira metade do dodecaedro está pronta, vamos criar a segunda metade. Primeiro, selecione todas as faces e clique sobre a ferramenta "Costurar" na aba "Superfícies" para combiná-las em um único objeto. Assim como utilizamos o navegador para duplicar a primeira face, repetimos o processo para duplicar a primeira metade do nosso poliedro. Gire a cópia

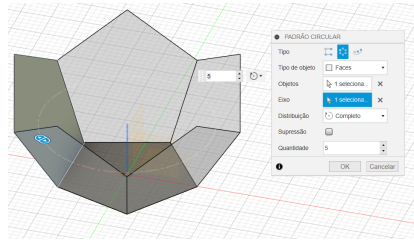


Figura A.4

em 180 graus ao longo do eixo x, a manipule pelos controles da ferramenta de modo a posicionar o objeto na eminência do encaixe com a primeira metade como a Figura A.5 mostra.

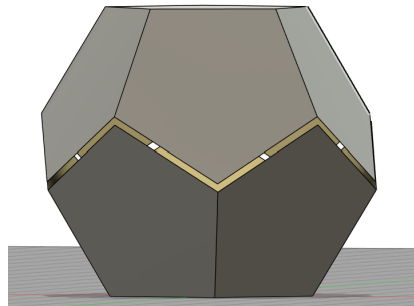


Figura A.5

Para ajustar a posição da segunda metade e garantir que ambas se encaixem corretamente, utilize novamente a ferramenta "Mover/Copiar". Em seguida, em "Mover Tipo» "Ponto a ponto", alinhe uma quina da face superior com sua respectiva "concavidade" logo abaixo. Dessa forma, você garante que as faces estão corretamente unidas. Para transformar as faces em um único objeto, selecione tudo e, na aba "Superfície", clique em "Costurar".

A.2.3 Construindo as Esferas

A próxima fase envolve a modelagem da peça a ser impressa, que consiste na esfera com os encaixes. O primeiro passo desta fase varia ligeiramente, dependendo se o dodecaedro foi construído (1) por meio do Gerador de Poliedros ou (2) manualmente, face a face, conforme detalhado anteriormente.

1. Desative a visualização do dodecaedro e crie um novo componente chamado "Esfera12"(ou escolha um nome que faça sentido para a esfera com 12 furos). Na aba Sólido, clique em "Criar" e modele uma esfera centrada na origem com um diâmetro de "30/1,35". Após isso, selecione ambos os componentes, vá em Montagem > Grupo Rígido, para que as transformações aplicadas à esfera sejam refletidas no poliedro. Por último, selecione novamente os dois componentes e acesse Modificar > Escala > 1,35, ajustando o grupo ao tamanho final para impressão.
2. Crie um novo componente "Esfera12", vá até o menu "Criar" e selecione "Esfera" e defina o diâmetro em 30 mm a partir da origem. Depois que a esfera for criada, centralize-a com o dodecaedro já modelado, basta deslocá-lo -15.063 mm no eixo Z com a ferramenta "Mover/Copiar".

Como medida de segurança, e para posteriormente construir a segunda esfera, crie uma cópia do conjunto Dodecaedro + Esfera e salve o projeto em uma pasta no seu computador.

Selecione uma das faces do dodecaedro e escolha "Criar Esboço" para desenhar um círculo centralizado, que será usado para os furos na esfera. Para determinar o centro da face pentagonal, crie duas linhas medianas do tipo "de construção", e no ponto de interseção, desenhe um círculo com o diâmetro correspondente às hastes, previamente medido com um paquímetro – no nosso caso, 4,8 mm. A Figura A.6 ilustra esta etapa do processo. Com o esboço do círculo pronto, selecione-o, altere o componente para a esfera e pressione "E" para realizar a extrusão, direcionando-a para o interior da esfera, criando os furos. No exemplo, a extrusão foi de 9 mm, mas isso pode variar na peça final impressa. É importante conferir a profundidade conforme descrito na montagem. Nos links (A.3) fornecemos um modelo de uma esfera dentro de um dodecaedro, permitindo que você ajuste o diâmetro dos furos e economize tempo iniciando o processo de modelagem a partir deste ponto.

Repetimos esse processo para todas as faces do dodecaedro, e ao final temos a esfera com 12 furos, pronta para impressão - basta exportar o arquivo no formato 3mf.

Para modelar a esfera com 20 furos, o procedimento é praticamente o

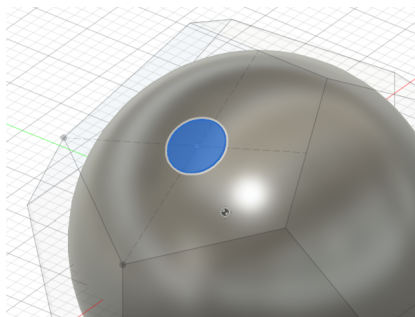


Figura A.6: Visão em perspectiva da peça antes do primeiro furo. A visualização do poliedro foi reduzida apenas para destacar que a esfera permanece dentro do poliedro. No entanto, ainda é possível visualizar as retas auxiliares sobre ele, usadas para localizar o centro da face para fazer o furo.

mesmo. Se estiver utilizando o *plugin*, basta selecionar um icosaedro como base, criar uma esfera de diâmetro 15 mm, agrupar as peças e reescalar pelo fator 2. Caso tenha modelado o dodecaedro manualmente, não é necessário criar um icosaedro do zero – você pode utilizar o modelo do dodecaedro já construído.

Para isso, no dodecaedro (seja uma cópia ou o original), utilize a ferramenta "Chanfrar" em "Modificar". Selecione todo o dodecaedro e aplique um chanfro de 5 mm. Com isso, um novo poliedro, embora não regular, é formado. O ponto crucial é que cada um dos 20 vértices do poliedro original se transforma em uma face triangular equilátera. No ponto de encontro das medianas dessas faces, é possível criar esboços de circunferências com 4,8 mm de diâmetro e realizar a extrusão sobre uma nova esfera, semelhante ao processo de criação da peça anterior. No entanto, recomendo uma extrusão um pouco menor que os 9 mm; no modelo a ser impresso, utilizamos 7 mm. O modelo dessa peça antes e depois dos furos de 4,8 mm também pode ser encontrado nos links disponíveis no Capítulo A.3.

A Figura A.7 ilustra a versão final de cada uma das peças.

A.2.4 Processo de Impressão

Quem está familiarizado com impressão 3D sabe que, antes de imprimir um modelo, é necessário processá-lo em um software de fatiamento. Reco-

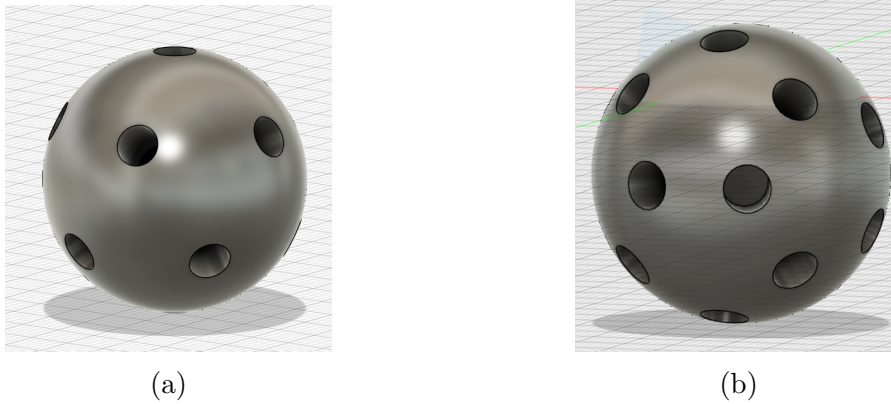


Figura A.7: Modelo final da esfera de (a) 12 encaixes e (b) 20 encaixes

mendamos o PrusaSlicer, que foi o que utilizamos. Além de ser uma ferramenta completa, ele permite dividir o modelo em duas semiesferas, o que facilita o processo de impressão e garante maior precisão nos detalhes.

Para isso, basta abrir a peça no programa e selecionar a ferramenta "Cortar"(ou simplesmente pressionar a tecla "C"). Por padrão, o corte será feito em um plano horizontal que divide a peça ao meio. Caso essa opção não apareça, ajuste o corte manualmente com os controles da ferramenta e depois clique em "Aplicar o corte". Em seguida, mova as partes de modo que suas bases fiquem apoiadas na mesa de impressão, como mostrado na Figura A.8. Nessa etapa, também é possível copiar e colar as semiesferas, conforme a quantidade necessária de peças e o espaço disponível na mesa de impressão.

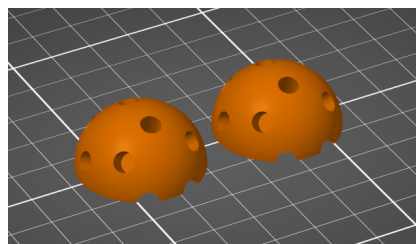


Figura A.8

Essa técnica de impressão elimina a necessidade de suportes adicionais, simplificando o processo. Para este projeto, utilizamos uma impressora Creativity Ender-2 com material PLA genérico. Não foi necessário adicionar supor-

tes para os furos da peça, pois o suporte natural da própria peça foi suficiente. Com o modelo finalizado e todas as configurações ajustadas, exportamos o arquivo G-code para a impressora e iniciamos a impressão.

Recomendo começar imprimindo uma única semiesfera para verificar se o modelo se encaixa corretamente com as hastes, uma questão comum em impressões 3D. Além disso, é crucial garantir que as configurações da impressora, como a temperatura da mesa, temperatura do nozzle e altura da mesa, estejam devidamente ajustadas. Caso contrário, a peça pode apresentar desde pequenas imperfeições até falhas graves que comprometem a impressão.

Após imprimir as duas semiesferas, utilize supercola para uni-las, tomando cuidado para preservar a forma original da peça. Nesta etapa, é útil manter o modelo 3D aberto em uma tela, para auxiliar na precisão do encaixe.

A.2.5 Montagem e demais cuidados com a peça

Com as esferas prontas, o próximo passo é preparar as hastes. Para cada conjunto de três esferas, corte os palitos em 22 segmentos de 2,3 cm (0,8 cm para a profundidade do furo + 1,5 cm que ficarão expostos fora da esfera) e 12 segmentos de 5,3 cm (0,8 cm para o furo + 4,5 cm que ficarão para fora da esfera).

Vale lembrar que a profundidade do furo pode variar ligeiramente entre os modelos de peças. O ideal é, após imprimir uma peça, encaixar a haste corretamente no furo (sem que ela fique folgada), empurrá-la até o fundo e usar uma caneta para marcar a base da parte da haste que ficou exposta. Depois, retire a haste e meça o comprimento que entrou no furo para garantir a precisão no corte das hastes.

Ao montar as hastes nas esferas, aplique uma pequena quantidade de cola em uma das extremidades de cada segmento maior e encaixe-os nos furos da esfera com 12 encaixes. Repita o processo com os segmentos menores para as demais esferas do conjunto.

Ao cortar os palitos, um alicate pode ser mais rápido, porém, ele tende a

amassar as extremidades, o que pode causar desalinhamento no encaixe das hastes. Para evitar isso, uma faca de serra, embora mais trabalhosa, garante cortes mais uniformes, permitindo que as hastes se encaixem perfeitamente.

Para finalizar, pintamos as hastes com esmalte na mesma cor das esferas impressas. Optamos pelo esmalte porque tintas à base de água não aderem bem ao plástico liso. No entanto, essa etapa pode ser evitada se você adquirir o PLA na mesma cor dos canudos. Há uma ampla variedade de cores de PLA disponíveis na internet, o que pode ser uma solução prática. Se você já tiver o material de impressão antes de planejar a atividade, a pintura com esmalte pode não apenas proporcionar um acabamento mais refinado, mas também tornar as peças mais visualmente atraentes, o que pode aumentar o interesse dos alunos durante a atividade. Na Figura A.9, vemos um modelo finalizado com 12 hastes de raio maior (denominada peça C no roteiro da atividade 3).

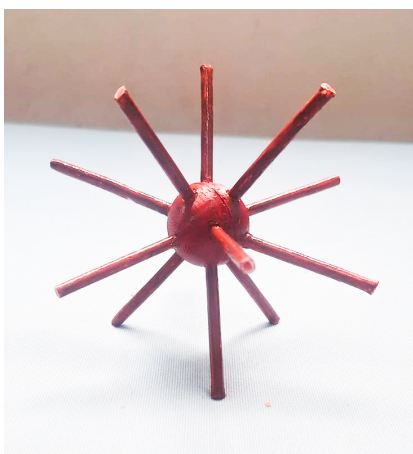


Figura A.9

Por fim, é importante destacar que peças com muitas hastes tendem a ser frágeis, e isso não será diferente ao usar palitos de plástico. Portanto, é essencial que o professor não leve apenas a quantidade exata de kits para a turma, especialmente em turmas grandes. Recomenda-se imprimir kits extras como reserva. Uma dica útil para aumentar a resistência das "linhas de campo" é inserir um palito de dente dentro dos canudos, caso haja espaço, o que ajuda a fortalecer as hastes e reduzir o risco de quebras.

Incentivamos que outros professores sintam-se à vontade para fazer suas

próprias adaptações neste universo de Cargas Impressas conforme a necessidade de suas turmas, tempo disponível e conhecimento sobre o assunto, a fim de testar e criar variações das peças. Essas variações podem incluir o uso de maquetes (caso não tenham acesso a uma impressora 3D), a substituição dos canudos de plástico por hastes mais flexíveis, a criação de novas cargas utilizando os poliedros de Platão como base, ou até mesmo a impressão de outras situações, como linhas de campo do fio infinito ou do plano uniformemente carregado.

A.3 Material do professor

A.3.1 Links para as apresentações em slides (Powerpoint/Apresentações Google)

Aula 1 - Boas Vindas à Física do Invisível - Clique [aqui](https://bit.ly/40HipYf) (https://bit.ly/40HipYf)

Aula 2: O que é Carga Elétrica? - Clique [aqui](https://bit.ly/3Z1k7mk) (https://bit.ly/3Z1k7mk)

A.3.2 Links para Impressão 3D

1 - Download do Autodesk Fusion 360 para uso pessoal - Clique [aqui](http://bit.ly/4hQDYfj) (bit.ly/4hQDYfj)

2 - Modelo final com 12 furos (4.8 mm) utilizada na aplicação (*formato .3mf*)
- Clique [aqui](https://bit.ly/3AFDAPZ) (https://bit.ly/3AFDAPZ)

3 - Modelo final com 20 furos (4.8 mm) utilizada na aplicação (*formato .3mf*)
- Clique [aqui](https://bit.ly/48IUzxc) (https://bit.ly/48IUzxc)

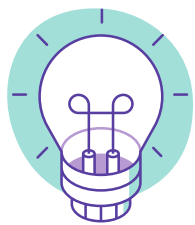
4 - Modelo Dodecaedro pré-furado (*formato .f3d*) - Clique [aqui](https://bit.ly/3O33tMF) (https://bit.ly/3O33tMF)

5 - Modelo Icosaedro pré-furado (*formato .f3d*) - Clique [aqui](https://bit.ly/3O3MEkI) (https://bit.ly/3O3MEkI)

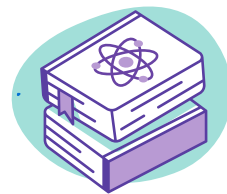
A.4 Material do aluno

Nas páginas a seguir se encontram os roteiros das três atividades descritas para o uso em sala de aula. Para destacar em pdf o roteiro da Atividade 1 para imprimir depois, basta pressionar *Ctrl + P* ou clicar em imprimir este documento e procurar pela opção 'Imprimir como PDF' ou 'Salvar como PDF' e marcar da página 149 à página 150.

Para destacar apenas a Atividade 2, selecione desde a página 151 até a página 155. Para a Atividade 3, selecione desde 156 até 159.



Boas-vindas à Física do invisível



Nomes: _____



Antes de começar:

Lembrem-se de ler cuidadosamente todas as questões e não se preocupar em serem avaliados neste momento. O propósito aqui é compartilhar suas ideias e responder com suas próprias palavras.

Questão 1 - Distribuem pequenos pedaços de papel picado sobre a mesa e, em seguida, aproximem um canudo de plástico ou o tubo de uma caneta transparente dos papéis, observando sempre o que acontece. Repitam o procedimento, mas, antes de aproximar o canudo ou a caneta dos papéis, esfreguem o objeto repetidamente contra o cabelo de um dos integrantes do grupo. Após realizar as duas etapas, comparem e descrevam as diferenças observadas em cada situação.

Questão 2 - Que tipo de interação foi possível observar entre o tubo e o papel, e de que maneira a distância entre estes objetos está relacionada com essa interação?

Questão 3 - Na opinião do grupo, o que vocês acham que o **cabelo** mudou no **tubo** depois de ser esfregado nele? Discutam suas ideias, elaborem hipóteses e expliquem com suas próprias palavras

Questão 4 - E como o **papel** sabe quando o **tubo** está ou não atritado?

Questão 5 - É possível dizer que existe algo **entre** o papel e o tubo que influencie na interação entre os dois? Se a resposta for não, explique o que motiva a resposta do grupo. Se a resposta for sim, deem um nome para essa coisa e criem um desenho simples no espaço abaixo para ilustrar como poderíamos representar esse elemento misterioso - use formas, linhas, setas, a criatividade de vocês ou o que mais vocês acharem necessário para formular a “teoria” de vocês.





Mapeando Linhas de Campo

Nome: _____



Antes de começar:

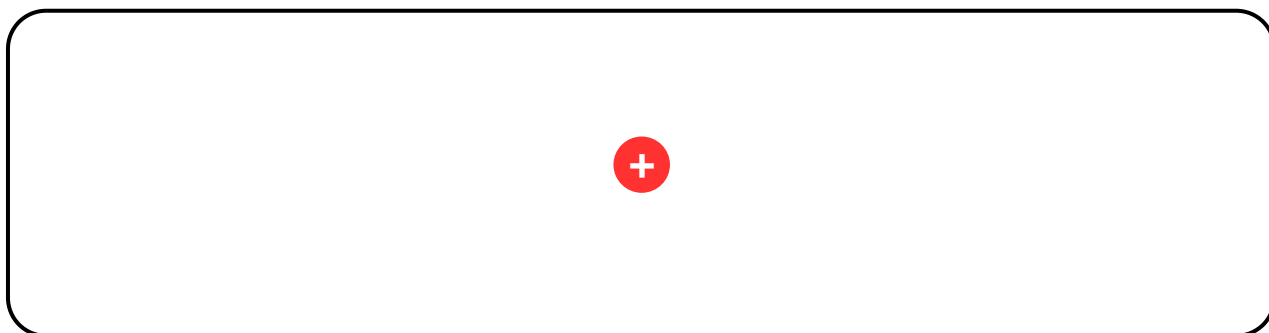
É importante que leiam cada enunciado com atenção, e usem os espaços fornecidos para desenhar ou escrever suas respostas.



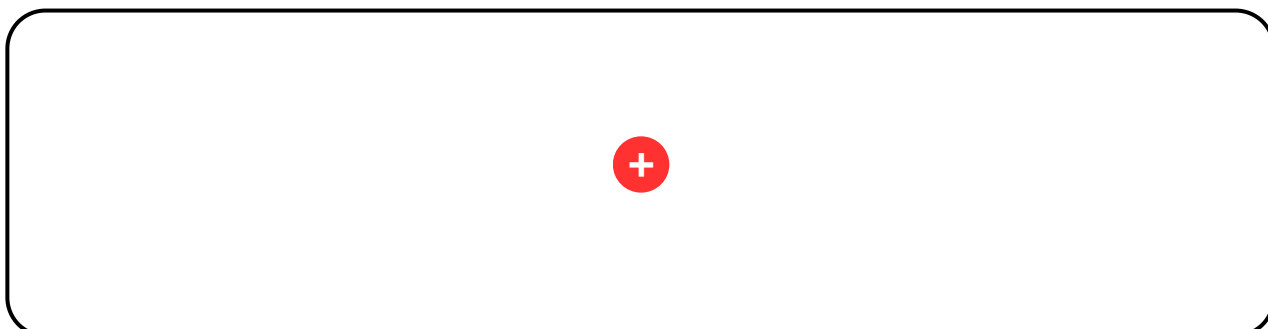
Se tiverem dúvidas, não hesitem em consultar outros colegas. A colaboração é a chave para o sucesso da turma nesta atividade.

Questão 1 - Observe a figura abaixo, nela está representada uma carga elétrica pontual positiva de valor desconhecido, que chamaremos de $+Q$.

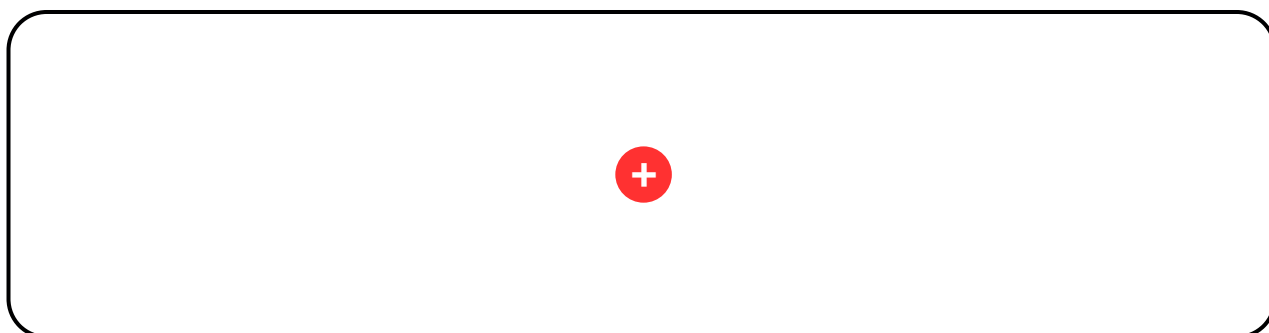
A) Com base em seu conhecimento sobre eletrostática, desenhe as linhas de campo elétrico geradas pela carga $+Q$ sobre a figura. Use régua e lápis para obter a maior precisão possível.



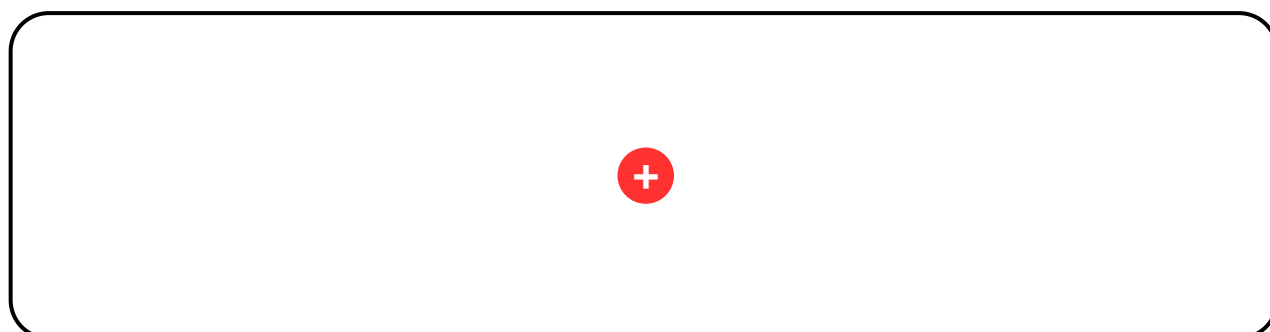
B) Marque um ponto no espaço, localizado próximo a carga, que chamaremos de **P**. Agora, queremos analisar o vetor campo elétrico que atua nesse ponto, representado por \vec{E} . Desenhe esse vetor no espaço abaixo, mostrando claramente sua orientação. Use régua e lápis para obter a maior precisão possível.



C) Tendo em mente como cargas elétricas interagem, imagine agora que uma pequena carga positiva, que chamaremos de q , seja colocada exatamente sobre o ponto **P**. O mesmo do item anterior. Qual será a direção e o sentido da força elétrica \vec{F} que essa nova carga, q , experimenta nesse ponto? Desenhe um diagrama representando o vetor força no espaço abaixo. Use régua e lápis para obter a maior precisão possível.



D) Considere agora que a pequena carga q no ponto **P** seja negativa, ao invés de positiva. Neste caso, qual seria a direção e o sentido da força elétrica \vec{F} que a carga q experimentaria em **P**? Desenhe um novo diagrama representando o novo vetor força no espaço abaixo. Use régua e lápis para obter a maior precisão possível.



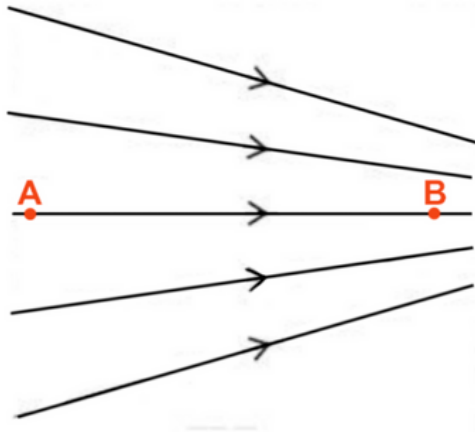
E) Compare os diagramas dos vetores força \vec{F} para as cargas positiva e negativa nos itens **C)** e **D)**. Explique com suas palavras como o sinal da q , chamada carga de prova, influencia na direção e no sentido da força eletrostática que ela experimenta.



De olho no vestibular:

Volta e meia, linhas de campo elétrico surgem como tema em vestibulares por todo Brasil.

Questão 2 - A figura representa as linhas de campo de um campo elétrico.
(UFSM-2014/Adaptada)



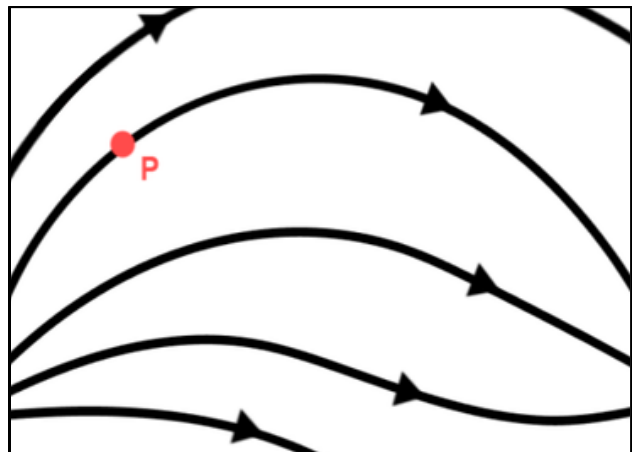
Assim, complete as afirmativas:

- A)** O campo elétrico é mais intenso na região ____ pois a _____ de linhas de linhas de campo é _____ em torno desse ponto.
- B)** Uma única carga de sinal _____ pode ser a fonte desse campo localizada a _____ da imagem.
- C)** Se abandonarmos uma carga elétrica com sinal negativo no ponto A, ela sofrerá uma força que aponta para a _____.

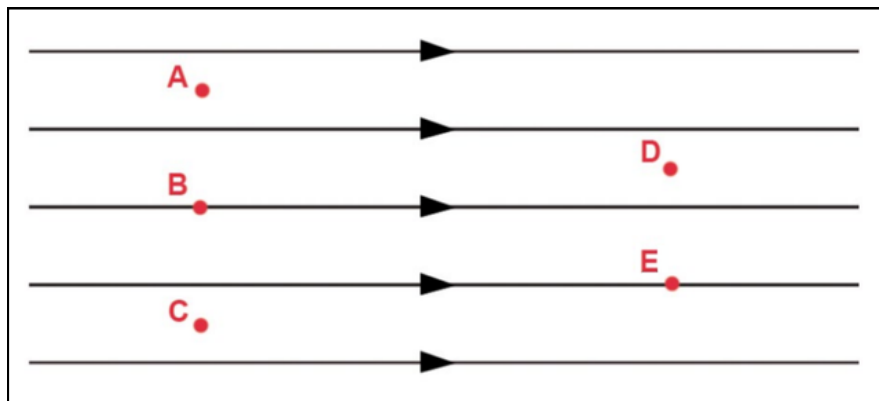
Questão 3 - A imagem abaixo revela o recorte de uma região repleta de linhas de campo que foram geradas por uma configuração de cargas elétricas desconhecida.

Represente no desenho o vetor campo elétrico E sobre ponto P, e também represente a força elétrica F que uma carga negativa q sofreria se fosse colocada exatamente em P.

Dica: Desenhe os vetores Campo Elétrico e Força Elétrica com canetas de cores diferentes.



Questão 4 - Observe o diagrama de linhas de campo abaixo e localize o ponto onde o campo elétrico é mais intenso. Indetifique também os pontos onde os campos elétricos são iguais, considerando sua direção, sentido e intensidade.



Explique a sua resposta com suas próprias palavras:

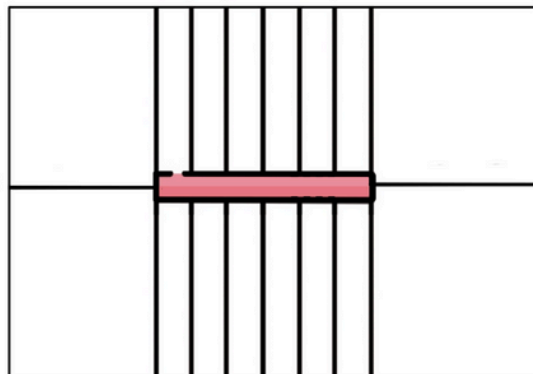
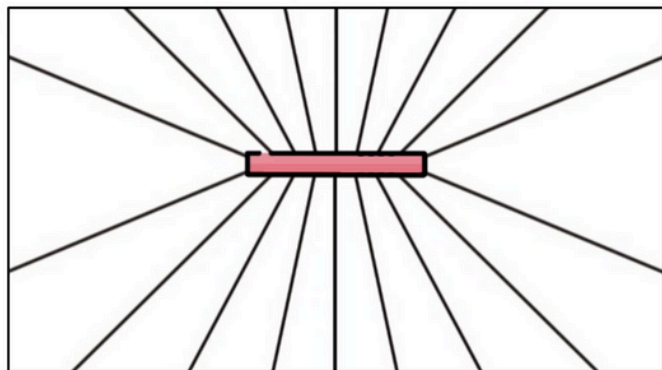
Questão 5 - Como vimos, quando eletrizamos um canudo de plástico por atrito ele ganha a capacidade de atrair pequenos pedaços de papel – se não fez antes, teste aí na sua mesa. No questionário que vocês responderam havia a seguinte pergunta:

“Que tipo de interação foi possível observar entre o tubo e o papel, e de que maneira a distância entre estes objetos está relacionada com essa interação?”

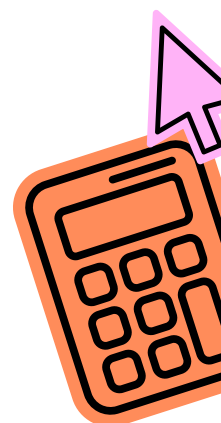
E a resposta dada por vocês foram as seguintes:

- Atração, **quanto mais perto, mais forte**;
- O papel grudou no tubo. A distância interfere, pois, de longe não gruda, **mas chegando perto sim**;
- Atração, **quanto mais perto mais atração**;
- Atração. **Quanto mais perto, mais atraído** o papel se torna;
- **Quanto mais perto, mais atração** entre os dois corpos;
- Eles se atraíram, **quanto mais próximo mais se atraem**.

Hoje sabemos que o canudo adquiriu carga elétrica e essas cargas, por sua vez, geram linhas de campo. Agora observe atentamente as duas figuras abaixo, compare com os trechos destacados em negrito das respostas na página anterior e identifique qual das imagens abaixo melhor representam as linhas de campo elétrico do canudo.



Justifique a sua escolha com suas próprias palavras. De que maneira a imagem escolhida está relacionada com as repostas da turma?





Lendo as linhas de campo na palma da sua mão



Nomes: _____

Para começar:

Nesta atividade seu grupo receberá 3 peças distintas, denominadas pelo(a) professor(a) como A, B e C, todas representam **cargas pontuais positivas**.

I - Identifique quais são as peças A, B e C;

II - Brinque com as peças e as explorem;

III - Com uma caneta ou marcador, cada um do grupo deve desenhar um grande círculo sobre a palma da mão. Essa área servirá como referência de medida durante a atividade.

Com relação à **Peça A**, responda:

Questão 1 - Qual é a direção e o sentido de suas linhas de campo?

Questão 2 - Quantas linhas de campo conseguem ficar dentro do círculo quando cada membro do grupo abraça a peça com a mão marcada?

Questão 3 - Qual é a distância entre o centro da carga e a palma da mão?

Com relação à **Peça B**, responda:

Questão 1 - Quando os membros do grupo seguram agora a peça B, quantas linhas de campo ficam dentro da área delimitada?

Questão 2 - Qual razão entre o número de linhas que passam pela mesma palma da mão quando se segura a Peça B e quanto se segura a Peça A?

Questão 3 - De que maneira essa relação se reflete no mundo real, isto é, o que essa diferença nos diz sobre os valores das cargas A e B?

Questão 4 – As peças representam cargas que geram um vetor de campo elétrico em cada ponto da palma da mão. A intensidade desse campo pode ser determinada pela concentração das linhas de campo ao redor de cada ponto. Sabendo disso, como o valor da intensidade do campo elétrico (E) está ligado ao valor da carga elétrica (Q)?

Com relação à **Peça C**, responda:

Questão 1 - Por fim, envolvam a peça C com a palma da mão que foi marcada - como nas questões anteriores - e digam o número de linhas que atravessam essa região.

Questão 2 - Qual é a diferença entre o número total de linhas de campo que sai da peça A e o número total de linhas que sai da peça C? O que essa diferença nos dá de intuição sobre o valor das cargas elétricas representadas pela peça A e C?

Questão 3 - Ainda comparando a Peça C com a Peça A, determine a distância entre o centro da esfera na peça C e a palma da mão.

Questão 4 - Imaginem agora que aconteceria se as linhas de campo desta peça ficassem cada mais compridas? O valor da carga aumentaria? E como isso afetaria a quantidade de linhas de campo que cabem na palma da mão?

Questão 5 - Como foi feito com a peça anterior, busquem agora encontrar como o valor da do vetor campo elétrico (E) está relacionado com distância da carga à palma da mão (d)?

Conclusão

Levando em conta as relações matemáticas que discutimos nos itens anteriores, transforme a intensidade do vetor campo elétrico (E) em uma equação matemática que relacione o valor da carga (Q) e a distância (d)?

Referências Bibliográficas

- [1] Sass, H.-M., “Albert Einstein in 1935 on Electrosmog and Fake News”, *Eubios Journal of Asian and International Bioethics*, **29**, n. 3 (2019), p. 93–94.
- [2] Chabay, R., Sherwood, B., “Restructuring the introductory electricity and magnetism course”, *American Journal of Physics*, **74**, n. 4 (2006), p. 329–336.
- [3] Hesse, M. B., *Forces and Fields: The Concept of Action at a Distance in the History of Physics*, Dover Publications, 2005.
- [4] Feynman, R. P., Leighton, R. B., Sands, M., *The Feynman Lectures on Physics*. New Millennium Edition. California Institute of Technology, 2010.
- [5] Purcell, E. M., *Electricity and Magnetism*, 2^a ed., McGraw-Hill, Berkeley Physics Course, Vol. 2, 1985.
- [6] Nussenzveig H. M., *Curso de Física Básica: Eletromagnetismo*, 2^a ed., Blucher, Volume 3, 2015.
- [7] Chabay R. W., Sherwood B. A., *Matter and Interactions*, 4^a ed., Wiley, 2015.
- [8] Wolf, A., “Electric field line diagrams don’t work”, *American Journal of Physics*, **64**, n. 6 (1996), p. 674-678.
- [9] Biskamp, D., “Magnetic reconnection”, *Physics Reports*, **237**, n. 4 (1994), p. 179-247.
- [10] Chen, F., Cheung, M. C. M., Rempel, M., Chintzoglou, G., “Data-driven Radiative Magnetohydrodynamics Simulations with the MURaM Code”, arXiv, 2023. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2301.07621>. Acesso em: 21 nov. 2024.

- [11] Campos, E., Zavala, G., Zuza, K., Guisasola, J., “Electric field lines: The implications of students’ interpretation on their understanding of the concept of electric field and of the superposition principle”, *American Journal of Physics*, **87** (2019), p. 660-667.
- [12] Maxwell, J. C., “On Physical Lines of Force”, in *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, ed. W. D. Niven, Cambridge University Press, 2011, p. 451–513.
- [13] Belcher, J. W., Olbert, S., “Field line motion in classical electromagnetism”, *American Journal of Physics*, **71**, n. 3 (2003), p. 220-228.
- [14] Hadad, Y., Cohen, E., Kaminer, I., Elitzur, A., “Covariant electromagnetic field lines”, *Journal of Physics: Conference Series*, **880** (2017).
- [15] Hunter, J. D., Matplotlib Development Team. *Matplotlib: streamplot* [software]. Versão 3.4.3. Python Software Foundation, 2023. Disponível em: https://matplotlib.org/stable/api/_as_gen/matplotlib.pyplot.streamplot.html. Acesso em: 11 nov. 2024.
- [16] Duck, Thomas J. Electrostatics [repositório GitHub]. Versão 0.2.0. 2019. Disponível em: <https://github.com/tomduck/electrostatics>. Acesso em: 11 nov. 2024.
- [17] Moreira, M. A., “Desafios no ensino da física”, *Revista Brasileira De Ensino De Física*, **43** (2021).
- [18] Song, Y., et al., “Visualization of electromagnetic fields in a circular waveguide using Mathematica”, *European Journal of Physics*, **45**, n. 5 (2024).
- [19] Fuke, L. F., Kazuhito, Y., *Física para o Ensino Médio*, 3ª ed, Saraiva, 2010.
- [20] Secretaria de Estado da Educação do Paraná, *Física: Ensino Médio*, 2ª ed., SEED-PR, 2006. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/livro_didatico/fisica.pdf. Acesso em: 11 nov. 2024.
- [21] Piaget, J., Inhelder, B., Cajado, O. M., *A psicologia da criança*. Série Saber Atual. Bertrand Brasil, 2003.
- [22] Silveira, M. V., *O ensino de Física e a deficiência visual: uma pesquisa sobre os desafios e uma proposta de ensino remoto emergencial de Laboratório de Eletromagnetismo para um estudante cego de Engenharia*,

- durante a pandemia de 2020*, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, 2021.
- [23] Camargo, E. P., *Saberes docentes para a inclusão do aluno com deficiência visual em aulas de física*, Editora UNESP, 2012.
 - [24] Molena, J. C., Andrade, P. G., Veraszto, E. V., “Indicadores da inclusão de alunos surdos em salas de aula regulares”, *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, **16**, n. 2 (2017), p. 257–279.
 - [25] Vargas, J. S., *Elaboração de uma proposta de sinais específicos para os conceitos de massa, força e aceleração em Libras*, Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) – Instituto de Física, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Campo Grande, p. 118. 2014.
 - [26] HEALPix Team. HEALPix. Página inicial. Disponível em: <https://healpix.sourceforge.io/>. Acesso em: 03 de fev. de 2025.
 - [27] Fonseca, A., Penello, G. M., “Análise de um circuito de corrente constante através dos conceitos da eletrostática”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, **44** (2022).
 - [28] Das, A., Ferbel, T., *Introduction to nuclear and particle physics*, 2^a ed, World Scientific Publishing Company, 2003.
 - [29] Courant, R., Robbins, H., Stewart, I., *What Is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*, Oxford University Press, 1996.
 - [30] Lekner, J., “Electrostatics of two charged conducting spheres”, *Proceedings of the Royal Society A*, **468**, 2829–2848 (2012).
 - [31] Ball, P., “Like attracts like?”. *Nature News and Views* (2012).
 - [32] Griffiths, D. J., *Introduction to Electrodynamics*, Pearson Education, 2014.
 - [33] Landau, L.D., Lifshitz, E.M., *The classical theory of fields*, 4^a ed., Butterworth-Heinemann, 1980.
 - [34] Terra, P.P., *Alguns problemas instigantes de mecânica: das tautócronas à montanha-russa caipira*, Dissertação (Mestrado em Ensino de Física) – Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, p. 108. 2016.

- [35] Hofmann, A., *The Physics of Synchrotron Radiation (Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology)*, Cambridge University Press, 2004.
- [36] Autodesk Fusion for personal use, <https://www.autodesk.com/products/fusion-360/personal>