



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física

Ensino de Óptica a Partir de Fenômenos Atmosféricos

Bruno Cezar Leandro Gimenez

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador: Reinaldo Faria de Melo e Souza

Rio de Janeiro
Agosto de 2023

Ensino de Óptica a Partir de Fenômenos Atmosféricos

Bruno Cezar Leandro Gimenez

Orientador: Reinaldo Faria de Melo e Souza

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Aprovada por:

Dr. Reinaldo Faria de Melo e Souza - UFF [Membro Interno] (Presidente)

Dr. José Augusto Oliveira Huguenin - UFF [Membro Externo]

Dra. Malena Osório Hor-Meyll - UFRJ [Membro Externo]

Dra. Marta Feijó Barroso - UFRJ [Membro Interno]

Rio de Janeiro
Agosto de 2023

FICHA CATALOGRÁFICA

G491e Gimenez, Bruno Cezar Leandro

Ensino de Óptica a Partir de Fenômenos Atmosféricos /
Bruno Cezar Leandro Gimenez. – Rio de Janeiro: UFRJ/IF,
2023.

x, 217 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Reinaldo Faria de Melo e Souza.

Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Física /
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2023.

Referências Bibliográficas: f. 215-217.

1. Ensino de Física. 2. Óptica Geométrica. 3. Óptica
Ondulatória. I. Melo e Souza, Reinaldo de. II. Universidade
Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de
Pós-Graduação em Ensino de Física. III. Ensino de Óptica a
Partir de Fenômenos Atmosféricos.

Esta dissertação é dedicada aos meus filhos Vicente e Joaquim.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Reinaldo, por ter acreditado e não ter desistido do meu trabalho. Por vezes pensei em desistir, mas seu acolhimento e compreensão foram fundamentais para a realização desta dissertação. Sempre serei grato por isso.

Ao professor Carlos Farina, pelas contribuições iniciais deste trabalho.

Ao amigo Vitor, vulgo Pet, que muitas vezes me ajudou a criar e editar figuras e imagens, além de me ajudar na edição dos vídeos gravados para este trabalho.

Aos colegas de turma do mestrado, pela camaradagem durante o período de realização de matérias.

À minha mãe, Ludmarci, e ao meu pai, José Luiz, por todas as privações que tiveram na vida para investir na minha educação.

Aos meus irmãos, Isabelle e Bento, responsáveis por momentos de amor e ódio na minha vida.

Aos meus avós, Yomar e Nilcynéa, por todo o apoio ao longo da minha vida acadêmica.

Aos meus filhos, Vicente e Joaquim, por todos os momentos mágicos que a paternidade me proporcionou.

E, obviamente, à Fernanda, minha esposa, por todo o apoio, suporte e amor que foram dedicados à nossa família. Sem você nada disso seria possível.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

RESUMO

Ensino de Óptica a Partir de Fenômenos Atmosféricos

Bruno Cezar Leandro Gimenez

Orientador: Reinaldo Faria de Melo e Souza

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Este estudo aborda a transição da óptica geométrica para a óptica ondulatória no ensino de física no nível médio, utilizando como contexto motivador os fenômenos atmosféricos. O objetivo principal foi desenvolver materiais voltados para os discentes e os docentes, fornecendo uma compreensão contextualizada dos princípios e fenômenos relacionados à luz. A dissertação apresenta uma estrutura composta por três tópicos principais: Princípio de Fermat, Arco-Íris, e Óptica Ondulatória. Cada tópico foi cuidadosamente elaborado para envolver os alunos em perguntas através de imagens de fenômenos ópticos, promovendo a compreensão das bases teóricas e suas aplicações práticas. Em paralelo a isso, foram desenvolvidas video-aulas que podem ser utilizadas por docentes para a prática de metodologias ativas como a sala de aula invertida e a instrução por pares. Espera-se que esse material contribua para fortalecer o ensino de óptica no ensino médio, despertando o interesse dos alunos através da compreensão dos princípios fundamentais da óptica e sua aplicação no estudo dos fenômenos naturais e com isso desenvolvam habilidades de investigação científica e pensamento crítico.

Palavras chave: Ensino de Física, Óptica Geométrica, Óptica Ondulatória.

Rio de Janeiro
Agosto de 2023

ABSTRACT

Teaching Optics through Atmospheric Phenomena

Bruno Cezar Leandro Gimenez

Supervisor: Reinaldo Faria de Melo e Souza

Abstract of master's thesis submitted to Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, in partial fulfillment of the requirements for the degree Mestre em Ensino de Física.

This study addresses the transition from geometric optics to wave optics in the teaching of physics at the high school level, using atmospheric phenomena as a motivating context. The main objective was to develop materials aimed at students and teachers, providing a contextual understanding of the principles and phenomena related to light. The dissertation presents a structure composed of three main topics: Fermat's Principle, Rainbow, and Wave Optics. Each topic was carefully designed to engage students through questions using optical phenomenon images, promoting the comprehension of theoretical foundations and their practical applications. In parallel, video lessons were developed that can be used by teachers to implement active learning methodologies such as flipped classrooms and peer instruction. It is expected that this material will contribute to strengthening the teaching of optics in high school, sparking students' interest through the understanding of the fundamental principles of optics and their application in the study of natural phenomena. As a result, students will develop skills in scientific inquiry and critical thinking.

Keywords: Physics education, Geometric Optics, Wave Theory of Optics.

Rio de Janeiro
Agosto de 2023

Sumário

1	Introdução	1
2	Princípio de Fermat	5
2.1	Hipótese da luz preguiçosa	5
2.2	Hipótese da luz apressada	8
2.2.1	A salva-vidas e o menino se afogando	11
2.2.2	Minimização do tempo para trajetórias luminosas	21
2.3	Hipótese da luz apressada e preguiçosa	24
2.4	Miragem	30
3	Arco-Íris	36
3.1	Formação do Arco-Íris	36
3.2	As cores do arco-íris	38
3.3	A posição do Sol e o Arco-Íris	41
3.4	Posição do Arco-Íris em Relação a um Observador	44
3.4.1	Deflexão de um raio de luz por uma gota esférica	47
3.4.2	Análise gráfica do ângulo de deflexão	51
3.4.3	Obtenção analítica do ângulo do arco-íris	60
3.4.4	Arcos-íris de ordens superiores e a faixa escura de Alexander	64
3.5	Arcos-íris de ordem zero e halos solares	71
4	Óptica ondulatória	79
4.1	O Experimento de Young	82
4.2	Elementos de física ondulatória	87
4.3	Comprimento de onda e frequência para a luz	90
4.4	As cores da luz	96
4.4.1	Interferências coloridas em nosso cotidiano	99
4.5	Céu azul	107
4.5.1	Corpo negro e o espectro da irradiação solar	109
4.5.2	O espalhamento da luz	115

4.5.3	A visão humana	119
4.5.4	Como enxergamos o céu	120
4.6	Escalas	123
5	Material produzido e sua aplicação	125
5.1	O material sobre o Princípio de Fermat	126
5.1.1	A aplicação do material do princípio de Fermat	127
5.2	O material sobre o Arco-íris	130
5.2.1	A aplicação do material sobre o Arco-Íris	130
5.3	O material sobre a óptica ondulatória	132
5.3.1	A aplicação do material sobre a óptica ondulatória	133
6	Considerações Finais	134
A	Funções trigonométricas para argumentos pequenos	136
B	Material para o Docente	139
B.1	Introdução	141
B.2	O Princípio de Fermat	143
B.2.1	Como a luz se propaga em um meio homogêneo?	145
B.2.2	Ao mudar de meio, a luz continua se propagando por um caminho mais curto, ou seja, em linha reta?	147
B.2.3	Se a luz elege a trajetória que minimiza o tempo, como podemos ver a imagem de um objeto e o próprio objeto simultaneamente?	155
B.2.4	Como podemos explicar as miragens?	160
B.3	O Arco-íris	164
B.3.1	Por que o arco-íris não é visto a todo momento? O que é necessário para a ocorrência deste fenômeno?	164
B.3.2	Como são formadas as cores do arco-íris?	166
B.3.3	O arco-íris só é visto em uma certa hora do dia? A posição do Sol influencia na ocorrência do fenômeno?	168
B.3.4	Por que um arco?	172
B.3.5	Por que vemos o arco-íris sendo um arco e não uma circunferência inteira?	183
B.3.6	O que são e como se formam os arco-íris secundários?	184
B.3.7	Por que não vemos o arco-íris de ordem zero?	187
B.4	A Óptica Ondulatória	191
B.4.1	Se a luz é uma onda, como ela se propaga no vácuo?	194
B.4.2	Se a luz é uma oscilação, por que não a vemos piscando e sim como algo contínuo?	195

B.4.3	O diferencia as cores?	198
B.4.4	Por que o céu é azul?	202
B.4.5	E no amanhecer e anoitecer, por que o céu se apresenta alaranjado?	207
B.4.6	Quando a descrição da óptica geométrica é boa?	207
C	Apresentações para os alunos	209
D	Links para as aulas gravadas	212
	Referências bibliográficas	215

Capítulo 1

Introdução

No estudo da óptica, no ensino médio, é possível verificar uma certa dificuldade em encontrar uma sequência didática que faça uma transição coesa da óptica geométrica para a óptica ondulatória. Em minha pequena experiência de magistério, me deparei com escolas que seguem variados planejamentos nessa área, sendo o mais comum o começo pela óptica geométrica e posteriormente se segue para a parte de ondulatória. Entretanto, é possível encontrar planejamentos em que é feito o sentido contrário, começando por óptica ondulatória e finalizando com óptica geométrica. No momento da criação deste trabalho, estava lecionando em duas instituições que seguiam planejamentos diferentes sobre esses tópicos. Esse foi o primeiro fator que me motivou a escrever essa sequência didática.

Independente da ordem que se trabalha, a transição do ensino da luz óptica geométrica/ondulatória, em qualquer sentido, não é vista de forma sequencial nas mais famosas bibliografias utilizadas no Ensino Médio no Rio de Janeiro. Por exemplo, em um dos livros mais utilizados neste seguimento, Fundamentos da Física [1] dos autores Ramalho, Nicolau e Toledo, a luz é apresentada na introdução do estudo da óptica geométrica, se propagando de forma retilínea em meios homogêneos. Já ao chegar na parte de ondulatória, ao distinguir a diferença de ondas mecânicas e eletromagnéticas, a luz é apresentada como uma onda eletromagnética, sem qualquer tipo de análise prévia. Esse caminho é o mesmo utilizado pela apostila do Sistema Ari de Sá,

um dos maiores produtores de materiais escolares do Brasil. Fizemos uma pesquisa dentre renomados livros didáticos e apostilas, e apenas os livros Física Conceitual [2] do autor P.G. Hewitt, Tópicos de Física [3], dos autores Villas Bôas, Doca e Biscuola e Física - Ensino Médio [4], dos autores B. Alvarenga e A. Máximo fazem abordagens que explicam os motivos, mesmo que de forma simples, pelos quais a propagação da luz pode ser estudada pela óptica ondulatória.

Essa falta de suavidade na transição da óptica geométrica para a óptica ondulatória encontrada em muitos livros e apostilas foi minha segunda e maior motivação para escrever essa sequência. Com o intuito de amenizar essa transição e torná-la mais palpável e agradável para os jovens que se encontram na educação básica, me desafiei a produzir este material que busca, a partir de fenômenos atmosféricos, explicar até que ponto a óptica geométrica é satisfatória e quais situações exigem uma análise ondulatória da luz. Pretendo, através de imagens que serão colocadas ao longo do material, estimular o debate sobre os mais diversos fenômenos atmosféricos como o arco-íris, a câmara escura, as miragens, o céu azul, entre outros; e a partir disso, fazer uma suave transição da óptica geométrica para a óptica ondulatória. Além disto, o próprio ensino de óptica geométrica é em geral baseado em postulados, colocando-se sem motivação as leis da reflexão e da refração. Também foi um forte propulsor para este trabalho buscar uma forma de ensinar a óptica geométrica na qual os principais conceitos aparecessem de uma forma mais natural.

Os temas dos materiais produzidos neste trabalho foram: Princípios de Propagação da Luz, Arco-Íris e Óptica Ondulatória. Para cada um destes temas foram produzidos um material instrucional para os alunos e um material capacitador aos docentes que desejem utilizá-los. Esses produtos têm como finalidade trazer uma abordagem alternativa sobre o estudo da luz. Vale ressaltar que esse trabalho não tem como qualquer objetivo mensurar com alguma aplicação se o aluno aprendeu de modo mais significativo com este material desenvolvido do que com qualquer outra sequência desenvolvida por outros autores, ficando esta como uma perspectiva para trabalhos futuros. Apesar disso, durante a aplicação desses materiais foram feitos al-

guns questionamentos aos alunos única e exclusivamente para saber se de fato conseguiram compreender os fenômenos explicados durante a aplicação.

No Capítulo 2 dessa dissertação buscamos compreender como a luz se propaga. Nosso objetivo será estabelecer o princípio de Fermat, que raramente é abordado no ensino médio. Para tanto, exploraremos uma sequência de exemplos de forma que cheguemos da forma mais natural possível em uma formulação deste princípio. Começaremos investigando a propagação da luz em meios homogêneos e em seguida o que ocorre com ela ao mudar de meio. Evocaremos aqui uma analogia com um problema de cinemática para motivar o fato de que a luz busca minimizar o tempo ao mudar de meio. Nosso problema consistirá em uma salva-vidas tentando socorrer um menino se afogando no mar. Veremos que apenas com matemática do ensino médio conseguimos estabelecer que a trajetória que a salva-vidas deve seguir satisfaz a uma equação totalmente análoga a lei de Snell. Após estabelecermos o princípio de Fermat, discutiremos de uma forma introdutória o fenômeno da miragem.

No Capítulo 3 discutimos a formação dos arco-íris. Apesar de serem citados os mais diversos tipos de arco-íris, o foco principal se dá para o arco-íris primário, aquele que se forma com apenas uma reflexão dentro de uma gotícula de água. O fenômeno do arco-íris, além de ser fascinante, envolve tanto os fenômenos da reflexão quanto da refração e encapsula em si boa parte dos conceitos centrais do ensino de óptica geométrica. Neste capítulo é desenvolvida uma forma de se chegar no ângulo formado entre o arco-íris e os raios incidentes sem a necessidade de conhecer o conceito de derivada e limite.

No Capítulo 4 começamos abordando fenômenos ópticos que não podem ser explicados pela óptica geométrica. A partir desse ponto desenvolvemos um raciocínio que sugere o caráter ondulatório da luz. Nessa hipótese, conseguimos explicar, pela teoria ondulatória, diversos fenômenos, como a supernumerária de um arco-íris, o Experimento de Young e até mesmo o motivo de o céu ser azul. Veremos, ainda, que a análise ondulatória é necessária para a compreensão de fenômenos bem presentes em nosso cotidiano como as cores das asas de borboletas.

O Capítulo 5 é dedicado a explicar como foi feita a aplicação de cada material desenvolvido para este trabalho. É especificado o público para qual foi feita cada aplicação, pequenos comentários proferidos durante cada apresentação e como os alunos responderam a um pequeno questionário antes e depois da instrução.

O Capítulo 6 traz as considerações e ponderações finais deste trabalho. Nos anexos estão disponíveis os produtos produzidos e os vídeos demonstrando uma forma de os utilizar. Apesar de nos vídeos estarmos simulando uma aula remota, estes materiais também podem visar uma aula presencial.

Capítulo 2

Princípio de Fermat

Seguindo a ordem proposta pela grande maioria das bibliografias utilizadas no ensino médio, o primeiro contato ao se estudar a propagação da luz se dá pela óptica geométrica. Por esse caminho, em muitas vezes, é postulado que a luz, em um meio homogêneo, se propaga em linha reta. No entanto, o debate por trás dessa postulação é deixado de lado. Neste capítulo será debatido a forma de propagação da luz a partir do estudo de Pierre de Fermat. Uma das grandes vantagens de fazê-lo é que além de se ganhar intuição sobre a propagação em meios homogêneos, conseguimos também antecipar feições importantes da propagação luminosa em meios heterogêneos e na incidência da luz em interfaces, conceitos que exploraremos bastante nessa dissertação. A partir de fotos, imagens e alguns questionamentos, este capítulo se desenvolve até chegar, de forma didática e lúdica, ao famoso Princípio Fermat que define, de forma geral, a propagação da luz na física clássica.

2.1 Hipótese da luz preguiçosa

Nosso objetivo neste capítulo é estudar a propagação de um raio luminoso. É interessante abrir o tópico de óptica geométrica com este questionamento uma vez que estabelece uma continuidade conceitual com os tópicos de mecânica anteriormente estudados, na qual a pergunta central era como prever o movimento dos objetos. As leis newtonianas fornecem a fundamentação

teórica que nos permite investigar esta questão - conhecidas as posições e velocidades iniciais dos corpos que compõem um sistema, e também das forças presentes no sistema, podemos prever o movimento dos corpos. No caso de nosso questionamento na óptica a primeira pergunta que se coloca é “o que devemos saber a fim de podermos prever a trajetória de um raio de luz?” Antes de aprofundarmos esse ponto, vejamos uma sequência baseadas em imagens de nosso cotidiano que nos permitam ir progressivamente e paulatinamente respondendo a esse questionamento. Começando a análise da propagação da luz, é possível inferir a partir das figura 2.1 (a) e 2.2 (a) de qual maneira se propaga um feixe de luz?



Figura 2.1: (a) Feixes de luz se propagando entre as folhas e troncos de árvores. (b) linhas que auxiliam o aluno a perceber a propagação retilínea. - Retirado de <https://wallhere.com/> - Acessado em Abril de 2023.

Fazendo algumas marcações, como é representado nas figuras 2.1 (b) e 2.2 (b), é possível perceber que a luz se propaga, entre dois pontos, em linha reta. Note que a fonte luminosa, o sol ou a lâmpada nos exemplos descritos acima, emite infinitos raios luminosos. Desta forma, para prevermos a trajetória do feixe luminoso não basta fornecer a sua posição inicial. À exemplo da mecânica, poderíamos fornecer a posição inicial e a direção inicial de saída do raio - que faria aqui o papel de velocidade inicial¹. Contudo, em vez disso,

¹Uma diferença importante entre a mecânica e nosso objeto atual de estudo é que enquanto lá estávamos interessados muitas vezes na função horária de movimento dos objetos, que atribui a cada instante de tempo sua posição, na óptica estamos na esmagadora maioria das situações interessados apenas na trajetória do raio luminoso em decorrência

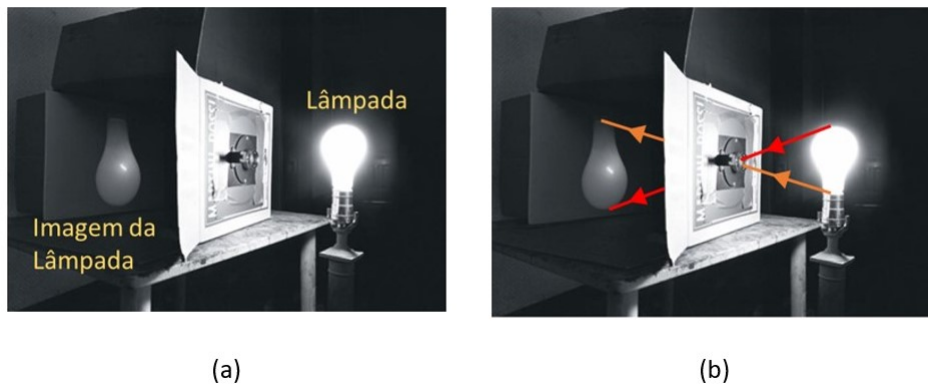


Figura 2.2: (a) Imagem de um objeto em uma câmara escura. (b) linhas que auxiliam o aluno a perceber a propagação retilínea. - Retirado de <https://metodologiavisualdesign.wordpress.com/2012/04/22/abelardo-morell-o-fotografo-da-camara-obscura/> - Acessado em Abril de 2023.

o mais usual é formularmos a pergunta na forma:

Pergunta central da óptica geométrica:

Dado dois pontos do espaço, qual a trajetória do raio que passa por eles?

Em muitas situações de interesse esta pergunta tem uma resposta e ela é única. Porém, conforme discutiremos adiante, há casos em que não há nenhum raio que passe pelos pontos em consideração, ou pode haver mais de um raio que satisfaça a essa condição. O mesmo ocorre em mecânica. Embora para uma dada velocidade inicial e posição inicial o movimento de um corpo esteja univocamente definido, estabelecer apenas duas posições não determina, em geral, o movimento. Contudo, para a óptica geométrica, é vantajoso colocar a pergunta na forma acima, afinal frequentemente o que desejamos é determinar os raios que saem de uma fonte e chegam a um dado ponto, como, por exemplo, nos olhos de um observador. Inclusive, a unicidade geralmente não é relevante. Para a formação de imagem, infinitos raios que saem da mesma fonte convergem para uma mesma região do espaço e da velocidade de propagação do raio luminoso ser na prática infinita para a maior parte das aplicações.

tipicamente estamos interessados na formação de imagens em si e não na trajetória específica de cada raio. Este ponto é interessante para o ensino de física, pois vemos que podemos motivar o ensino de óptica a partir de semelhanças com a mecânica, porém as diferenças fazem com que o *fraseamento* e a própria forma de colocar as questões centrais difiram de uma para a outra.

Busquemos uma primeira resposta para a pergunta central posta acima. Para tanto, retornemos às figuras 2.1 e 2.2. Considerando esse tipo de propagação em linha reta e, trazendo da geometria, que a reta é a menor distância entre dois pontos, como mostra a figura 2.3, é possível, inicialmente, propor a seguinte hipótese:

“Dentre todos os caminhos possíveis entre dois pontos, a luz elege aquele que minimiza a distância entre eles”

Essa hipótese explica o nome desta seção, em que é dito que a luz é preguiçosa, já que ela escolhe sempre o caminho mais curto.

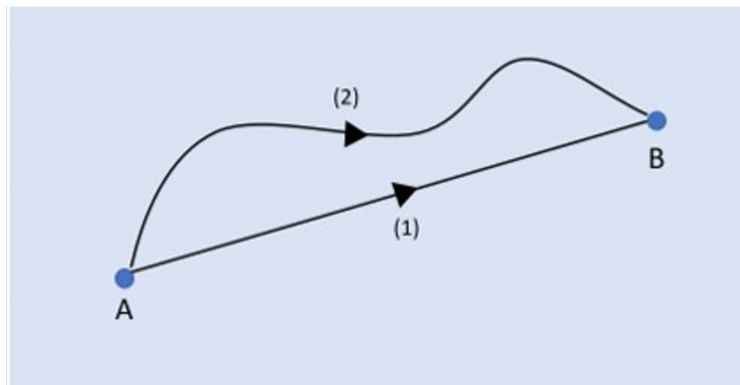


Figura 2.3: O caminho (1), que é uma reta, é o menor caminho possível entre os pontos A e B. Qualquer outro caminho na vizinhanças, como o que é representado em (2), terá uma trajetória maior do que a de (1).

2.2 Hipótese da luz apressada

Até agora, nos dois casos vistos nas figuras 2.1 e 2.2, a hipótese da “luz preguiçosa” é satisfeita. No entanto, podem ter certas situações que colocam

em xeque a tese de que a luz se propaga em linha reta. Por exemplo, ao imergir um lápis em um copo de água, como na figura 2.4, se tem a impressão de que o mesmo está quebrado na separação entre o ar e a água. Porém, ao se retirar o lápis de dentro da água, como é visto na figura 2.5, pode se verificar que sua integridade não foi danificada. Isso sugere que o feixe de luz que é refletido pela parte do lápis que se encontra imersa em água pode ter sofrido um desvio ao passar para o ar, fenômeno que é conhecido como refração. Esse desvio aparente ocorre porque o olho humano não é capaz de enxergar o desvio feito pela luz, tendo-se por isso a impressão de que a parte submersa do objeto está em uma localização diferente da qual é vista - isto é, a percepção da posição dos objetos ao nosso redor é construída pelo nosso cérebro assumindo o princípio da luz preguiçosa enunciada na seção anterior. A figura 2.6 representa esquematicamente essa situação. Contudo, esta é uma evidência apenas indireta de que a luz muda de direção. É possível visualizarmos diretamente a trajetória do raio luminoso, como vimos por exemplo na figura 2.1? Sim, com o auxílio de um *laserpoint* que se propaga inicialmente no ar e posteriormente adentra na água, como mostrado na figura 2.7 é possível ver que, de fato, a luz sofre um desvio ao mudar de meio.

Ao observar o desvio sofrido pelo raio de luz ao mudar de meio, representado nas figuras 2.6 e 2.7, é possível continuar afirmando que a luz minimiza a distância entre dois pontos? A luz que é refletida pela parte imersa do lápis segue uma linha reta até o observador? Para essa situação de mudança de meio, a luz não segue mais uma reta entre dois pontos, o que refuta a teoria da luz preguiçosa vista na situação da câmara escura e dos feixes entre as árvores na seção 2.1. Ou seja, não é uma regra geral que a luz não se propaga minimizando distâncias. É possível formular uma hipótese que satisfaça tanto o caso da luz se propagando em linha reta em meios homogêneos quanto da luz sofrendo desvio ao mudar de meio? Voltando a situação das figuras 2.1 e 2.2, onde foi observado os feixes de luz se propagando em linha reta, se pode chegar a uma outra conclusão que foi ignorada em um primeiro momento. Em um meio homogêneo esperamos, por simetria, que o feixe não tenha sua velocidade alterada durante a propagação. Assim, a linha reta



Figura 2.4: A parte imersa do lápis parece estar torta em relação à parte emergente.

observada na seção anterior é compatível tanto com um princípio de minimização de distância quanto de tempo. Contudo, caso pensemos nessa segunda possibilidade, quando a luz muda de meio é razoável imaginar que isto implique uma mudança em sua velocidade, fazendo por exemplo que a direção de propagação possa mudar ao trocar de meio, conforme observado nesta seção. Essa análise possibilita que seja formulada uma segunda hipótese:

“Dentre todos os caminhos possíveis entre dois pontos, a luz elege aquele que minimiza o tempo entre eles.”



Figura 2.5: Provada a integridade do lápis.

Denominamos esta última como a hipótese da luz apressada. Para investigarmos esta hipótese podemos tentar prever matematicamente como a direção da luz varia ao mudar de um meio para a outro. Para tanto, recorreremos a uma analogia lúdica vinda da mecânica.

2.2.1 A salva-vidas e o menino se afogando

Na figura 2.8, é vista a situação de uma salva-vidas, na areia, avistando um menino se afogando no mar. Nesta situação, é razoável dizer que o caminho mais eficiente, ou seja, o mais rápido, para salvar o menino seja uma linha reta, como representado na figura 2.9?

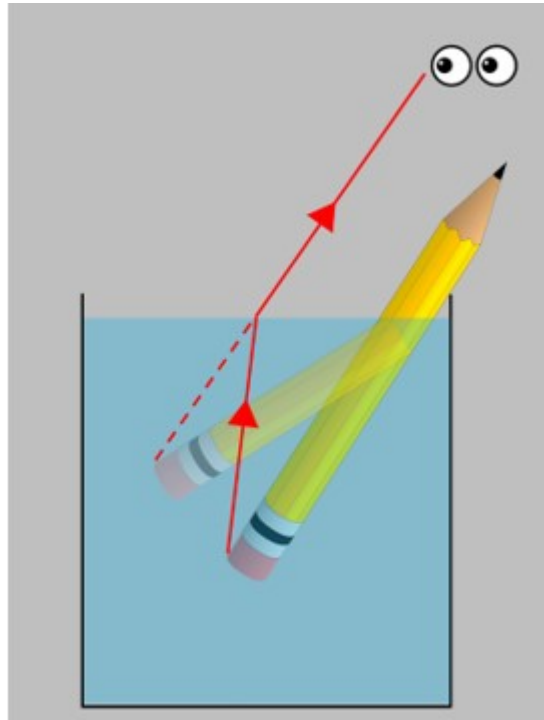


Figura 2.6: O desvio sofrido pela luz ao passar da água para o ar e como isso é visto pelo olho humano.

De fato o caminho representado na figura 2.9 é o menor possível, mas não é possível afirmar que é o mais rápido, já que é bem coerente inferir que a velocidade da salva-vidas correndo na areia (V_1) é maior que a velocidade dela nadando na água (V_2). Portanto, onde seria o ponto de entrada que minimizaria tempo levando em consideração essa diferença de velocidade da salva-vidas nos diferentes meios? Este é um exercício comum em livros de cálculo diferencial, em virtude de envolver um problema de minimização. Contudo, veremos nesta seção que com um pouco de geometria podemos empregá-lo em sala de aula no ensino médio.

Primeiramente, note que para minimizar o tempo de percurso tanto na água quanto na areia a trajetória deve ser retilínea. Portanto, o problema de minimização consiste em descobrir em que ponto na interface que separa a areia da água deverá a salva vidas entrar. Supõe-se inicialmente que a salva-vidas adentra a água, partindo do seu ponto inicial, de modo que sua

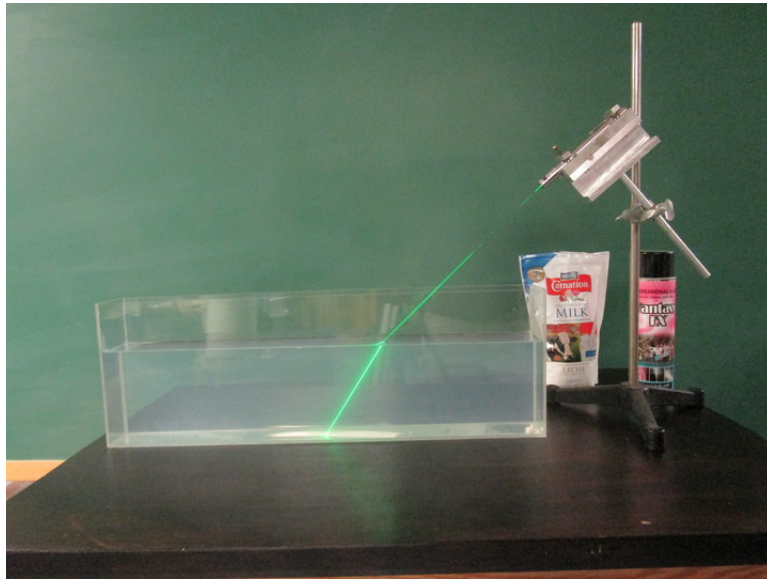


Figura 2.7: A luz emitida por um *laser* e sofrendo desvio ao adentrar a água. - Retirado de <https://physicslectureprep.umasscreate.net/optics/6a42-20-refraction-tank-and-laser/> - Acessado em Abril de 2023.

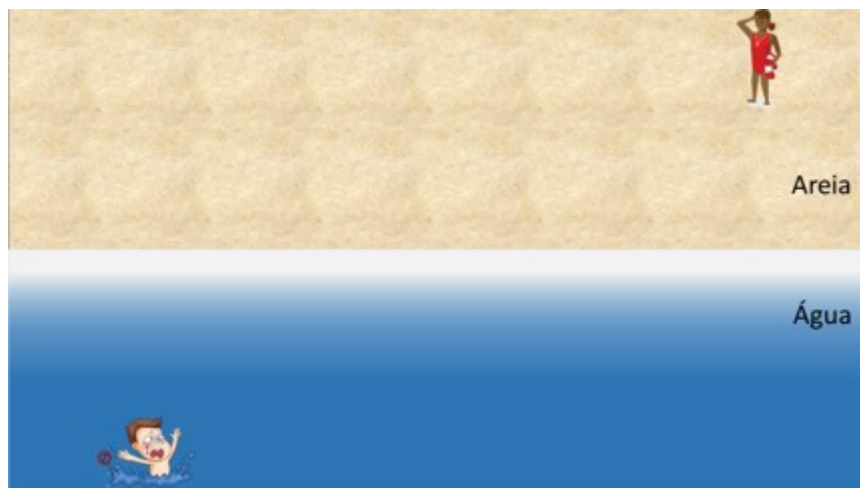


Figura 2.8: Situação que representa o menino se afogando e a salva-vidas o avistando

trajetória seja uma linha reta perpendicular a separação entre a interface areia-água. A partir desse ponto de entrada, siga uma linha reta em direção ao menino. Na figura 2.10, é vista essa situação e o referido ponto de entrada

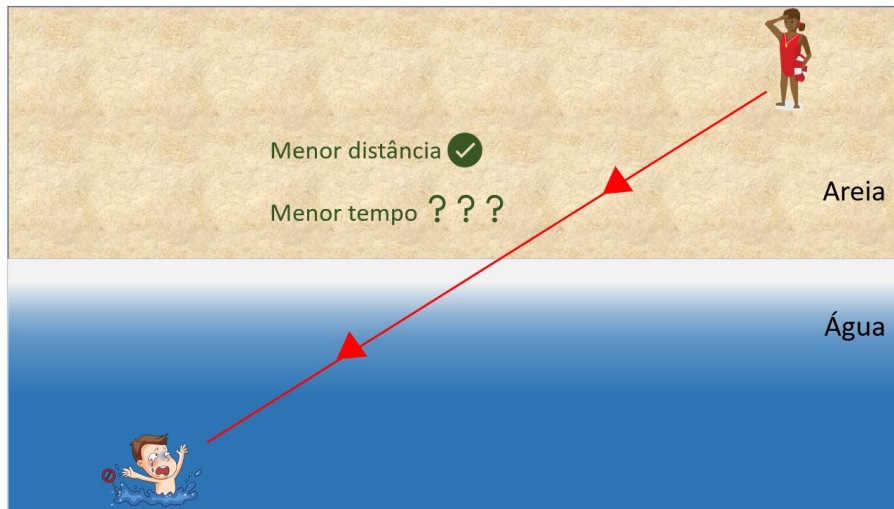


Figura 2.9: Representação da menor distância entre a salva-vidas e o menino

é chamado de B . Para esta trajetória é definido que o tempo gasto até chegar ao menino é t_B . Note que para qualquer ponto de entrada à direita do ponto B , o tempo de resgate é maior que t_B . Isso ocorre porque tanto a distância percorrida na areia, quanto na água, aumentam em relação ao ponto B . Esta situação é mostrada na figura 2.11.

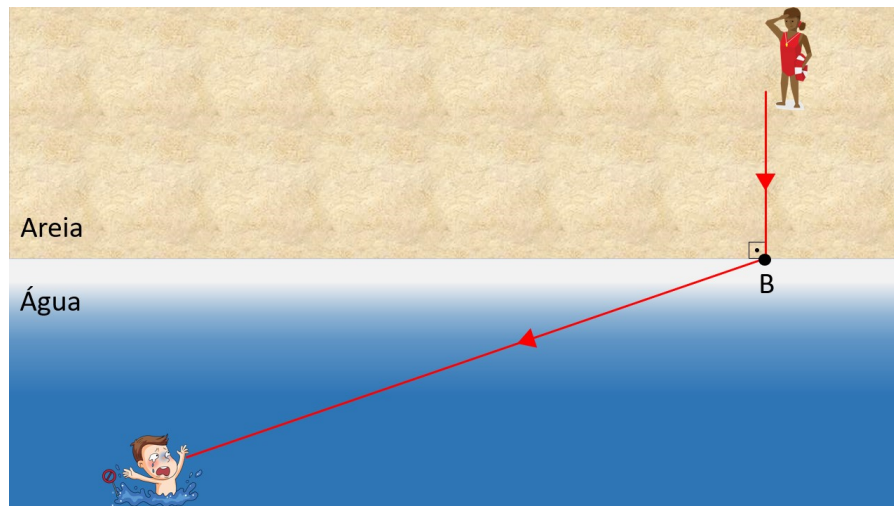


Figura 2.10: Trajetória da salva-vidas entrando no mar em um ponto B

Agora, colocando a salva-vidas para adentrar a água em um ponto que

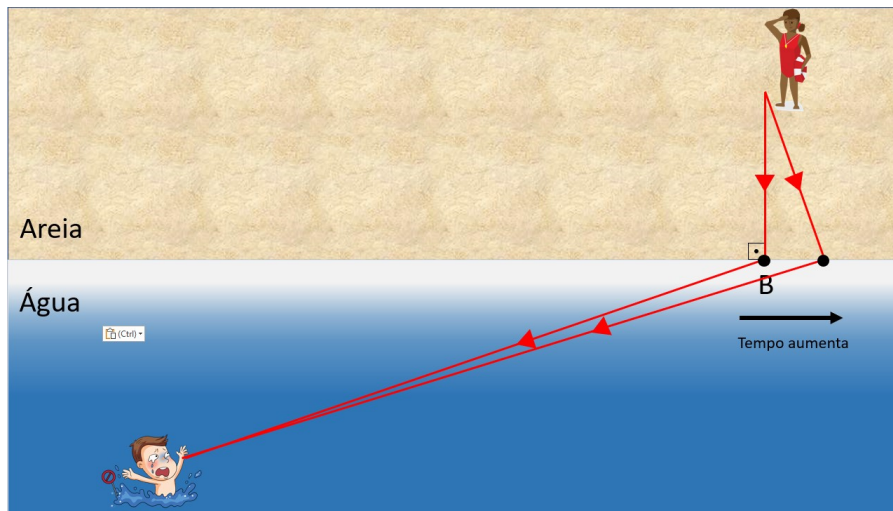


Figura 2.11: Demonstração de como trajetórias a direita do ponto B fazem aumentar o tempo.

torne a trajetória feita na água, até chegar ao menina, uma reta perpendicular a interface areia-água. A figura 2.12 ilustra essa situação e denomina esse ponto de entrada na água de ponto A. Para esta trajetória é definido que o tempo gasto até chegar ao menino é t_A . Analogamente ao que foi visto na situação anterior, é possível inferir que qualquer ponto a esquerda do ponto A fará que o tempo de resgate seja maior que t_A , já que as distâncias percorridas na água e areia também aumentam em relação àquelas percorridas quando a entrada é feita no ponto A. Pode-se ver essa situação na figura 2.13.

Utilizando como referências os pontos A e B das figuras 2.12 e 2.10, respectivamente, é possível deduzir que, se o tempo aumenta do ponto B para a direita, mas também aumenta do ponto A para a esquerda, há pelo menos um ponto de entrada entre os pontos A e B que minimiza o tempo da salva-vidas ao menino que está se afogando. O gráfico mostrado na figura 2.14, demonstra essa situação dos tempos.

Agora, com a certeza de que há pelo menos um ponto ótimo, entre A e B, para que a salva-vidas entre na água e salve o menino, é possível fazer uma análise um pouco mais detalhada e tentar chegar a um modelo matemático para isso. Para tal, é pressuposto que esse ponto de entrada ótimo seja no ponto C, como representado na figura 2.15.

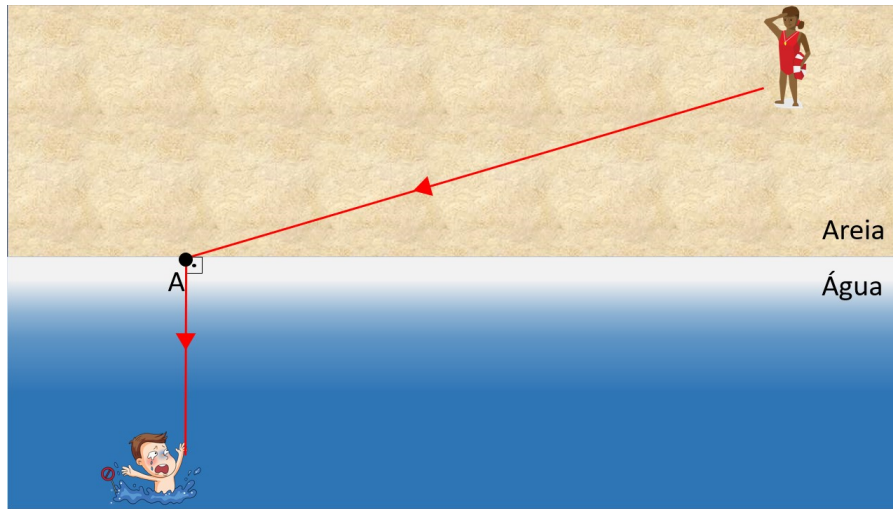


Figura 2.12: Trajetória da salva-vidas entrando no mar em um ponto A.

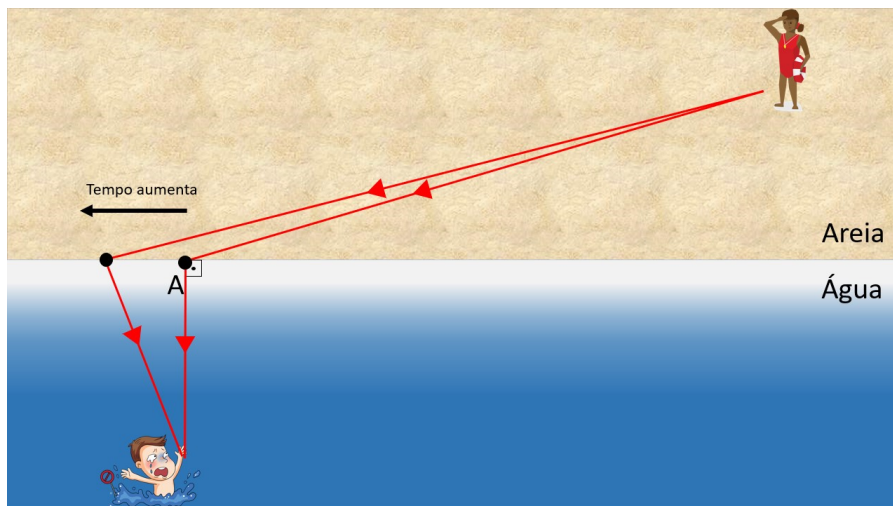


Figura 2.13: Demonstração de como trajetórias a esquerda do ponto A fazem aumentar o tempo.

O ponto chave agora é nos perguntarmos como descobrir o ponto C . Para tanto, note que no gráfico vemos que para pontos que estejam longe do mínimo nós temos que pequenas variações na posição de entrada geram grandes variações no tempo de saída. Contudo, quanto mais próximo do mínimo da função, menos o tempo varia para uma mesma variação da posição de entrada. Para formalizarmos isso, podemos usar o conceito de reta tangente ao

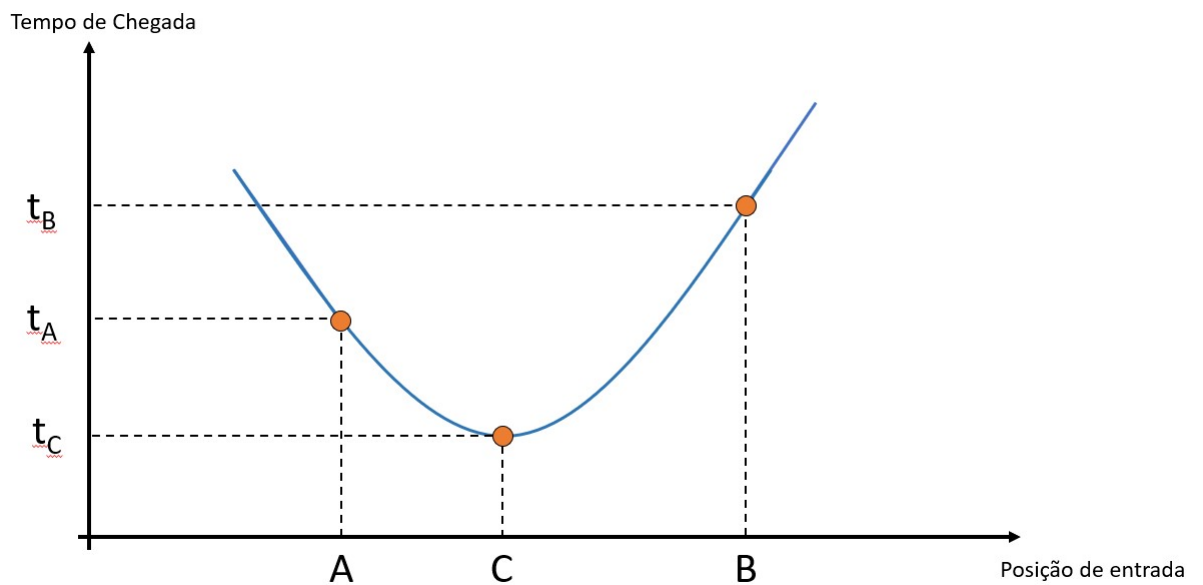


Figura 2.14: Esboço qualitativo de um gráfico do tempo gasto pela salva-vidas até chegar ao menino em função do ponto de entrada dela no mar.

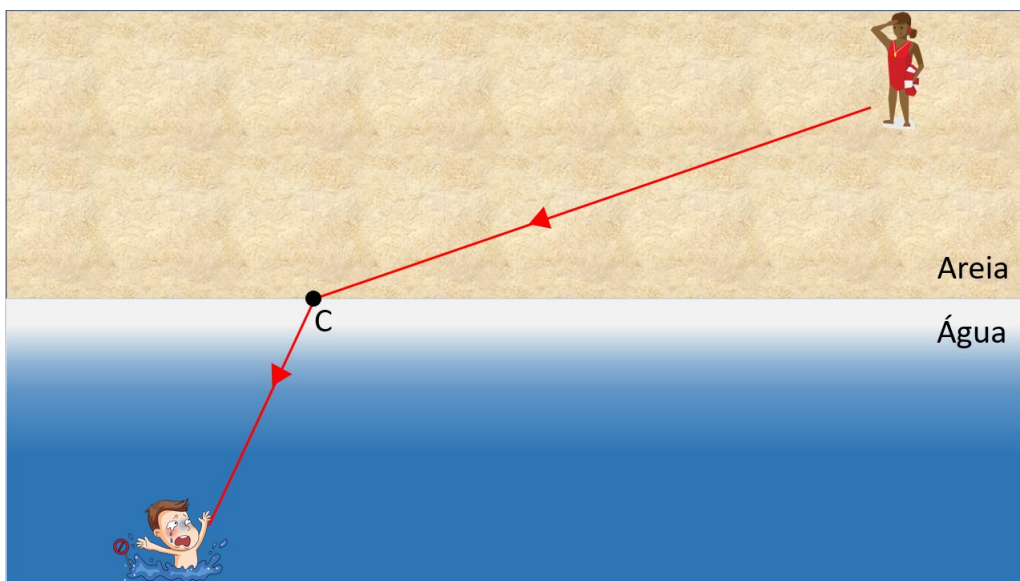


Figura 2.15: Trajetória da salva-vidas entrando no mar em um ponto C, o que minimiza o tempo.

gráfico da função, como representado na figura 2.17.

Por exemplo, para um pequeno desvio Δx no ponto de entrada a partir

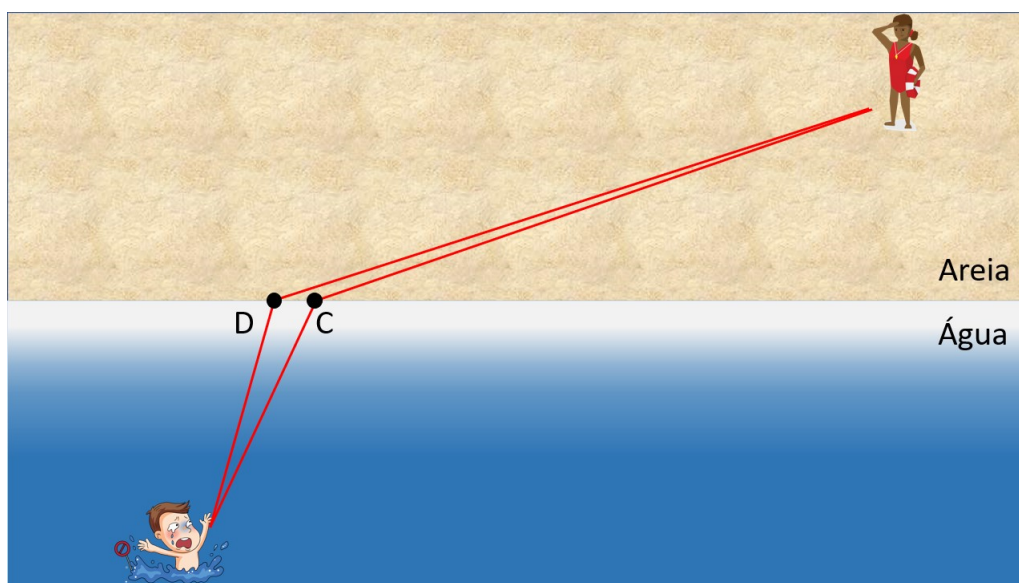


Figura 2.16: Desvio pequeno em relação ao ponto de entrada em C.

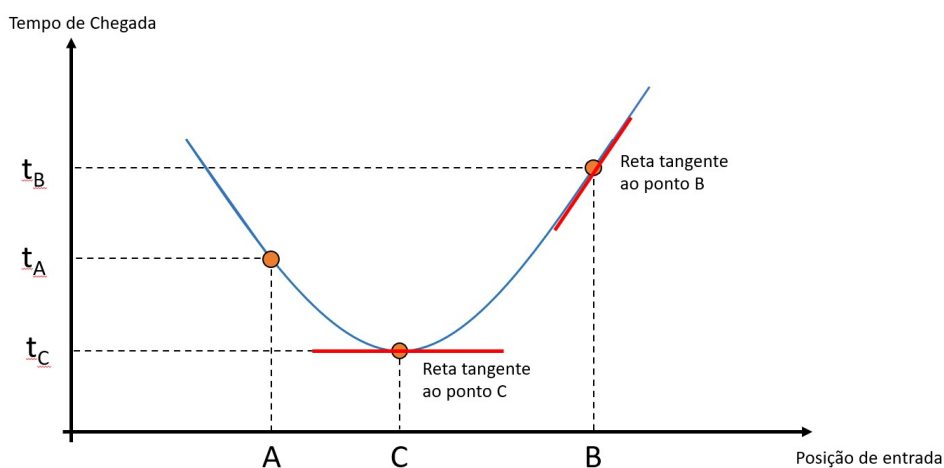


Figura 2.17: Retas tangentes referentes aos pontos de entrada em B e C.

do ponto B, temos que a variação no tempo é dada por $\Delta t = m\Delta x$, na qual m é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da figura 2.17 no ponto B. Como este coeficiente é positivo, isso significa que ganharemos tempo em nossa trajetória ao escolhermos $\Delta x < 0$, isto é, ao entrarmos em um ponto à esquerda do ponto B, como podemos ver pelo gráfico e como havíamos motivado anteriormente. Análise análoga pode ser feita para o ponto A. Já

para o ponto C , temos que a reta tangente é horizontal, fazendo com que o coeficiente angular da reta se anule neste ponto. Assim, nesta primeira aproximação, um pequeno desvio no ponto de entrada a partir de C leva a um $\Delta t \approx 0$. Fisicamente, isso significa que o ponto que minimizará o tempo será aquele para o qual um pequeno desvio no ponto de entrada, por exemplo para à direita na figura 2.15 fará com que o tempo economizado na areia seja em uma primeira aproximação exatamente o tempo gasto a mais na água. Reciprocamente, para um pequeno desvio para a esquerda no ponto de entrada a partir de C o tempo economizado na água é perdido na areia. Formalmente - e essa é a ideia a ser trabalhada em cursos de cálculo diferencial - o ponto de mínimo de uma função é um ponto no qual a variação da função é pelo menos quadrático com o deslocamento, diferentemente de todos os outros pontos da função, à exceção de pontos de máximo, cuja existência já descartamos em nosso caso por argumentos conceituais. Todavia, não necessitaremos desta formalização para nossos propósitos. Tudo o que precisamos trabalhar em sala de aula é que o ponto desejado que minimiza o tempo da salva-vidas e confere uma esperança máxima para a criança é aquele para o qual pequenos desvios do ponto de entrada não gera em uma primeira aproximação mudança no tempo total gasto. Considerando esse ponto C o de menor tempo de resgate, definimos que o tempo que a salva-vidas leva na areia até chegar ao referido ponto é t_1 e deste ponto até ao menino é t_2 . Pela nossa discussão anterior vemos que para um pequeno deslocamento a partir do ponto de entrada que minimiza o tempo devemos ter

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 = 0 \tag{2.1}$$

Na figura 2.16, é mostrado como seria um desvio pequeno a esquerda do ponto C , de modo que o ponto de entrada se dê no que definimos como ponto D . Com isso, a salva-vidas passa ter uma trajetória em que tempo na areia aumenta em relação a situação do ponto C . No entanto, ao entrar na água pelo ponto D , a salva-vidas fica com uma trajetória menor na água, logo o tempo na água é inferior ao caso do ponto C . Vale salientar que como, para esta situação, o tempo na areia aumenta, Δt_1 assume um valor positivo. No

entanto, como o tempo na água se reduz, Δt_2 assume um valor negativo.

Ampliando o desvio desta situação, como visto na figura 2.18, é possível analisar geometricamente o que ocorre. Tomando que tal desvio é extremamente pequeno, se leva em consideração que os caminhos feitos desde a posição inicial da salva-vidas na areia até os pontos C e D são paralelos. Logo, a diferença da distância percorrida na areia entre essas duas trajetórias é dada pela distância indicada por d_1 na figura 2.18. Fazendo comparação análoga em relação à trajetória na água, se chega que a diferença entre os dois caminhos nesse meio é a distância denotada por d_2 na mesma figura. Chamando os ângulos entre a normal do ponto D e a trajetória da areia de θ_1 e entre a normal do ponto D e a trajetória na água de θ_2 vemos na figura 2.18 que

$$d_1 = d \sen \theta_1 \quad (2.2)$$

$$d_2 = d \sen \theta_2 \quad (2.3)$$

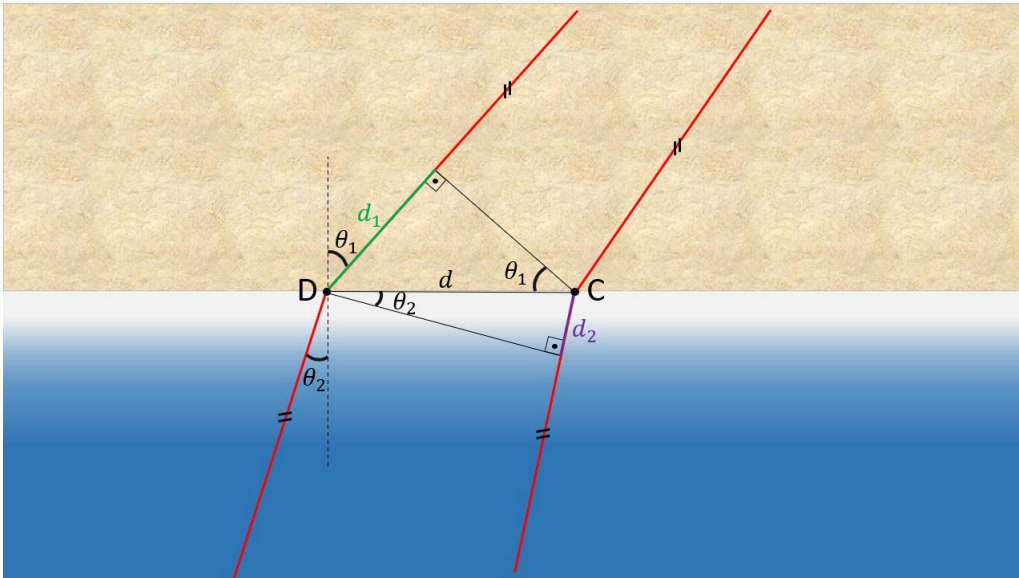


Figura 2.18: Análise geométrica da figura 2.16.

Ainda pela mesma figura, vemos que $\Delta t_1 = d_1/V_1$, na qual V_1 denota a velocidade da salva-vidas na areia. Da mesma forma, $\Delta t_2 = -d_2/V_2$,

com sinal negativo uma vez que para o caminho que passa pelo ponto D a salva-vidas passa um tempo menor na água, do que se entrasse pelo ponto C . Na expressão anterior, V_2 denota a velocidade da salva-vidas na água. Empregando as expressões (2.2) e (2.3) e substituindo o resultado na equação (2.1) obtemos

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{V_1} = \frac{\text{sen } \theta_2}{V_2}. \quad (2.4)$$

Esta é nossa expressão final e de posse dela podemos obter a mudança na direção da trajetória ao passar de um meio para o outro. Alguns casos particulares são interessantes de mencionarmos. Para $V_1 = V_2$ obtemos $\theta_1 = \theta_2$, donde não há mudança na trajetória. Com efeito, neste caso temos efetivamente um meio homogêneo donde minimizar o tempo equivale à minimizar a distância percorrida, fazendo com a que trajetória seja retilínea como vimos na seção anterior. Além disso, caso $V_1 \gg V_2$, então $\theta_2 \rightarrow 0$ e a trajetória que minimiza o tempo é muito próxima da trajetória 2.12. Por fim, note que embora em nossos desenhos tenhamos assumidos $V_1 > V_2$, nada em nossa demonstração empregou esta hipótese, que vale portanto também caso $V_1 < V_2$. A única alteração a ser feita na figura 2.15 é que ao passar do meio 1 para 2 neste caso a trajetória deveria se afastar da normal em vez de se aproximar. Por fim, destacamos que, caso se deseje, é possível encontrar o ponto C empregando-se a equação (2.4). Contudo não o faremos uma vez que o caso de nosso interesse é o da óptica, no qual o que temos acesso não é o ponto inicial e final, mas sim justamente a mudança de direção da luz ao mudar de meio.

2.2.2 Minimização do tempo para trajetórias luminosas

Após a digressão da seção anterior, voltemos ao problema de como a luz se propaga. Comparando a figura 2.7 com a figura 2.15 vemos algo qualitativamente similar. Desta forma, podemos agora extrair uma previsão quantitativa para testar a hipótese que fizemos denominada hipótese da luz

apressada. Não é fácil um teste direto em virtude da dificuldade de medir a velocidade da luz. Contudo, é simples medirmos o ângulo de refração em função do ângulo de incidência, por exemplo usando o aparato ilustrado na figura 2.7. Ao fazê-lo, observa-se que a razão entre o seno do ângulo de incidência e o seno do ângulo de transmissão é essencialmente constante², mostrando que nossa previsão teórica encapsulada na equação 2.4 é compatível com a observação desde que a razão V_2/V_1 seja independente do ângulo de incidência.

Na realidade, repetindo o experimento para diferentes fontes e intensidade da luz observa-se que a razão entre os senos fornece sempre a mesma constante, indicando que a velocidade de propagação da luz em um meio é uma propriedade do meio. Experimentos envolvendo as medidas dos ângulos de incidência e de transmissão de raios luminosos a fim de investigar o fenômeno são feitos desde a Grécia antiga, por exemplo com os trabalhos de Claudio Ptolomeu (ver referência [5] para uma discussão pedagógica), e culminaram, após o esforço coletivo de diversos cientistas, no que hoje conhecemos e ensinamos como lei de Snell-Descartes (para uma discussão histórica remetemos o leitor à [6]). Esta lei capturava a observação de que a razão entre os senos dos ângulos de incidência e de transmissão era uma constante que dependia apenas dos meios em questão. O que nossa hipótese da luz apressada indica é que esta constante que depende dos meios se dá pela razão entre as velocidades em cada meio. A ideia de que a velocidade da luz é uma propriedade do meio é extremamente profunda e sugere fortemente algo sobre a natureza da luz. Afinal, é bem sabido que fenômenos ondulatórios se propagam a uma velocidade determinada pelo meio, como ondas viajando em uma corda ou o som viajando no ar, para citar alguns exemplos. O fato da velocidade de propagação da onda ser determinada pelo meio é intuitivo fisicamente haja visto que é a própria vibração do meio material que enseja o próprio transporte de energia ao qual chamamos onda. Todavia, fosse a onda constituída por corpúsculos que se propagam pelos meios, como explicar

²Em sala de aula nossa ideia é de fato realizar este experimento. Aqui, por questões de tempo, nossa aplicação em sala de aula se restringiu aos aspectos teóricos de nossa abordagem pedagógica.

tal constância? Nos movimentos de partículas a nossa volta - nas próprias moléculas que constituem os gases que respiramos - há uma distribuição de diferentes velocidades e seria extremamente anti-intuitivo que em diferentes experimentos, sob diferentes condições e situações, os corpúsculos de luz teimassem em andar sempre a uma mesma velocidade. Assim, a hipótese que construímos para compreender a propagação cinemática dos raios luminosos curiosamente coloca um ingrediente interessante para debatermos em sala de aula a própria natureza da luz. Além disso, o fato dos raios luminosos se aproximarem da normal ao passar do ar para outros meios indica que a velocidade da luz deve ser maior no ar. Por outro lado, é possível mostrar que a visão corpuscular prediz o oposto, tendo sido a medida em meados do século XIX da velocidade da luz na água amplamente considerada o marco do reconhecimento de que a luz é de fato uma onda [6, 7], embora houvesse outros indícios anteriores, alguns dos quais discutiremos no capítulo 4 desta dissertação.

Antes de encerrarmos esta seção, gostaríamos de destacar que pelas razões postas no parágrafo anterior a expressão (2.4) não é a forma mais usual de exprimirmos a lei da refração. O mais comum é introduzirmos o conceito de índice de refração relativa entre os meios, de modo que a lei da refração assume a forma

$$\text{sen } \theta_1 = n_{21} \cdot \text{sen } \theta_2, \quad (2.5)$$

na qual, como discutido anteriormente, o índice de refração relativo é dado por $n_{21} = V_1/V_2$. É muito comum convencionarmos que o vácuo possui índice de refração absoluto igual à unidade, de forma que definimos o índice de refração de cada meio como sendo seu índice de refração relativo ao vácuo, onde a velocidade da luz é denotada por c , de forma que o índice de refração absoluto de um meio é definido por $n = c/V$, no qual V é a velocidade de propagação da luz no meio em questão. Em termos do índice de refração absoluto temos que o índice de refração relativo entre quaisquer dois meios pode ser escrito na forma $n_{21} = n_2/n_1$, deixando a lei de Snell-Descartes em

sua forma mais usual dada por

$$n_1 \text{sen } \theta_1 = n_2 \text{sen } \theta_2 . \quad (2.6)$$

Para materiais usuais temos que o índice de refração é um número positivo maior do que 1, sendo 1 no vácuo. Contudo, modernamente é de grande interesse materiais com propriedades ópticas exóticas, como o caso de materiais com índice de refração negativo. Foge ao escopo desta dissertação investigar estes materiais, para uma introdução didática conferir [8].

Por mais que a refração da luz pareça comprovar nossa hipótese da luz preguiçosa, observações adicionais a serem exploradas na próxima seção nos indicarão que esta hipótese ainda é imprecisa, o que nos levará a refiná-la na próxima seção.

2.3 Hipótese da luz apressada e preguiçosa

A segunda hipótese proposta se mostra satisfatória no caso da luz se propagando em apenas um meio e também passando de um meio para o outro. Entretanto, a hipótese de que a luz escolhe a trajetória que minimiza o tempo ainda pode conter algumas incoerências. Na figura 2.19 é possível analisar como um observador externo consegue ver a luz que é refletida pelo cachorro e vai direto aos seus olhos, mas também como é possível ver outros feixes de luz que, antes de chegarem ao observador, são refletidos pelo espelho. A figura 2.20, que representa esquematicamente o caminho percorrido pelos feixes de luz da 2.19, mostra um feixe de luz que é refletido pelo cachorro e chega até os olhos do observador maneira direta, representado pelo caminho 1 e o outro feixe que é refletido pelo cachorro e posteriormente pelo espelho até chegar também ao observador, representados respectivamente pelos caminhos 2 e 3.

Nesta situação a luz chega até o observador de duas maneiras, o que contraria parcialmente a hipótese da luz apressada, já que é claro que a trajetória formada pelos caminhos 2 e 3 da luz é maior do que a trajetória 1. Juntando isso ao fato de a velocidade da luz ser constante, chega-se que



Figura 2.19: Um cachorro e sua reflexão. - Retirado de <https://www.akc.org/expert-advice/lifestyle/do-dogs-have-self-awareness/> - Acessado em Abril de 2023.

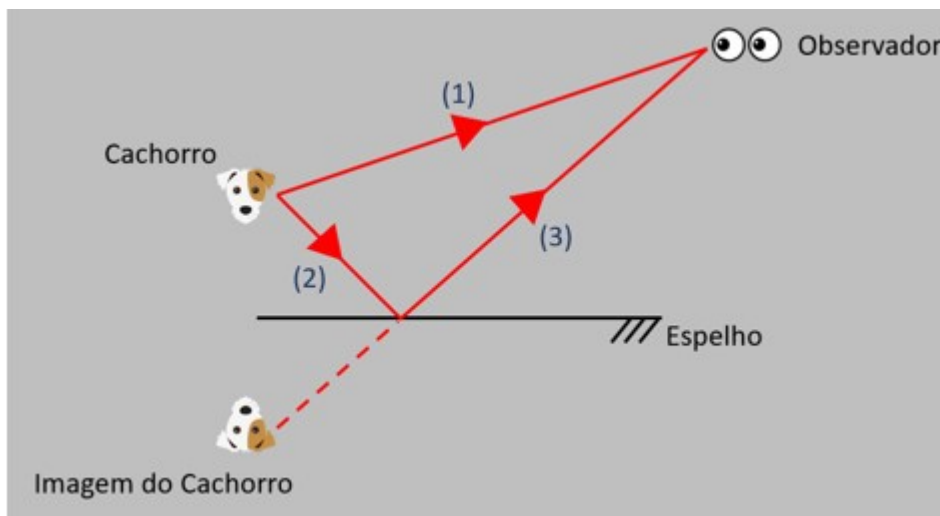


Figura 2.20: Situação que mostra os raios de luz que são vistos pelo observador da figura 2.19.

os tempos serão diretamente proporcionais às distâncias percorridas, ou seja, o tempo gasto pela luz pelo caminho 1 é menor do que pelo caminho 2 e 3. No entanto, o que se vê são duas imagens do cachorro, mesmo com tempos diferentes decorridos pelos raios até chegar aos olhos do observador.

Então a hipótese de que a luz percorre o caminho que minimiza o tempo está equivocada? Não completamente. O que ocorre é que a luz elege o caminho que minimiza localmente o tempo na sua trajetória entre dois pontos, ou seja, na vizinhança destas trajetórias não existe nenhum outro caminho que faça a luz chegar mais rápido que os raios representados na figura 2.20. Com essa última observação se chega a terceira e última hipótese, a Hipótese da Luz Apressada-Preguiçosa, já que apressadamente a luz segue a trajetória que minimiza o tempo, mas busca preguiçosamente apenas uma pequena vizinhança de cada trajetória. Atualmente esta hipótese é conhecida como Princípio de Fermat³.

“Dentre todos os caminhos possíveis entre dois pontos, a luz elege aquele que minimiza, *localmente*, o tempo entre eles.”

Para resumir a evolução das hipóteses de acordo com as figuras e situações mostradas neste capítulo, é apresentado o fluxograma da figura 2.21.

De posse desta formulação do princípio de Fermat podemos inclusive obter a lei de reflexão, assim como fizemos anteriormente para a lei de Snell-Descartes.

Em um meio homogêneo, um feixe de luz é emitido de um ponto A e, ao ser refletido por um espelho, chega a um ponto B , como mostrado na figura 2.22. Desejamos determinar qual o caminho seguido pela luz, isto é, em que ponto do espelho o raio de luz refletirá? Com a teoria de que a luz percorre o caminho que minimiza localmente o tempo será possível responder a esta pergunta. Pelo que fizemos anteriormente, sabemos que a trajetória descrita pelo raio de luz entre o ponto A e o espelho tem de ser uma linha reta, uma vez que o meio é homogêneo, e o mesmo vale para a propagação entre o espelho e o ponto B .

De posse desta informação, tudo o que devemos descobrir é qual será o

³De forma mais rigorosa, a luz busca trajetórias para as quais o tempo de percurso é estacionário frente a pequenas variações [9]. Embora em geral a trajetória seguida pelo raio luminoso seja de fato um mínimo (uma intuição é que sempre podemos aumentar o tempo ao escolher uma trajetória bem próxima mas em “zig-zag”, aumentando a distância percorrida com essencialmente a mesma velocidade), há casos em que a trajetória escolhida não é um mínimo local [10], [11]

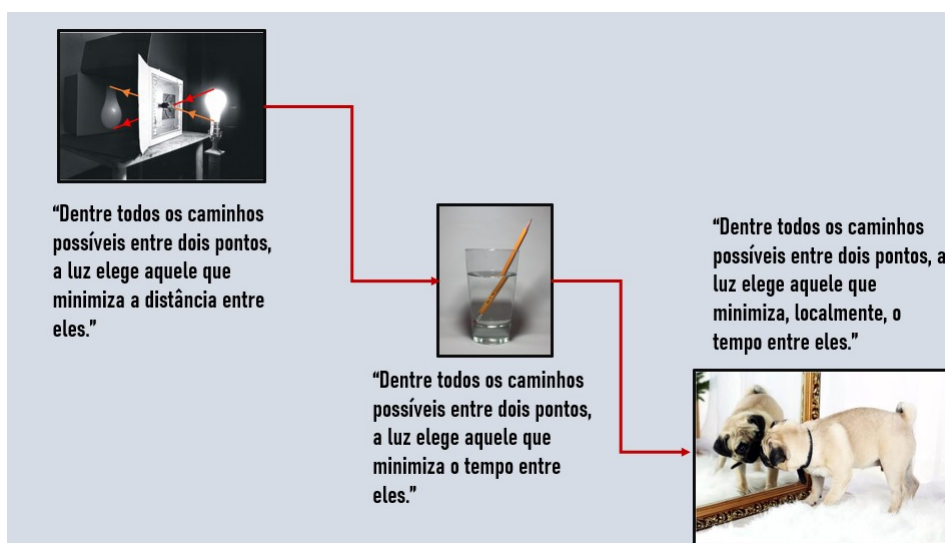


Figura 2.21: Fluxograma com a evolução da sequência didática para o ensino do Princípio de Fermat para a propagação da luz visto nesse capítulo.

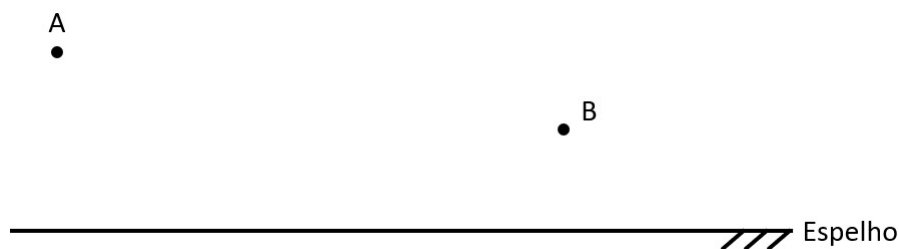


Figura 2.22: Pontos da trajetória de um feixe de luz antes e depois da reflexão.

ponto de incidência no espelho. Na figura 2.23 estão ilustrados dois caminhos vizinhos entre si. Onde deve estar o ponto D para que ele seja um mínimo local para o tempo de percurso da luz? Como a luz viaja sempre no mesmo meio, minimizar o tempo equivale a minimizar o espaço percorrido. Desta forma, podemos usar um argumento geométrico para obter a nossa resposta. Por exemplo, imagine que desejamos determinar o caminho total percorrido pela luz caso o ponto de incidência seja o ponto D ilustrado na figura 2.24.

Definamos o ponto A' , que denotaremos imagem de A , como sendo o ponto que está na linha que passa por A e é perpendicular ao espelho, de modo que A e A' equidistem do espelho. Note que, por semelhança de triân-

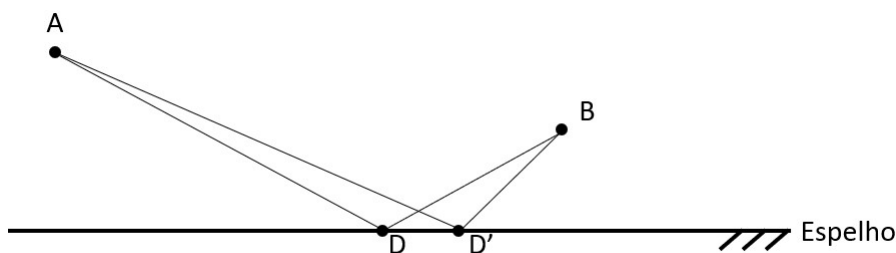


Figura 2.23: Possíveis caminhos da luz na reflexão.

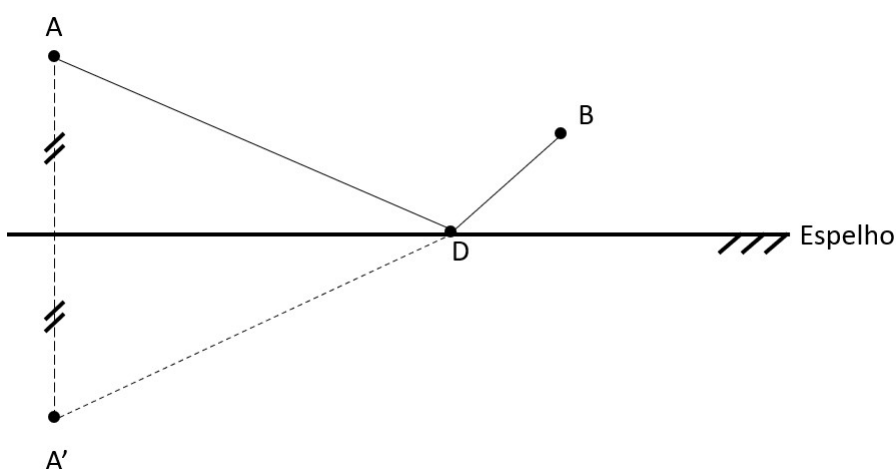


Figura 2.24: Utiliza-se a imagem do ponto A para auxiliar na minimização da trajetória.

gulos, temos que a distância \overline{AD} equivale à distância $\overline{A'D}$. Assim, a distância total percorrida pela luz vale $\overline{A'D} + \overline{DB}$. Portanto, vemos que para descobrir o ponto D , devemos descobrir por qual ponto a luz deve incidir no espelho para que a distância entre $\overline{A'D} + \overline{DB}$ seja a menor possível. Vemos que isto ocorre para o ponto D no qual a reta $\overline{A'B}$ intercepta o plano do espelho. Qualquer pequeno desvio deste ponto de entrada acarretará um acréscimo do caminho percorrido, donde com esta construção mostramos não apenas que de fato existe um mínimo local para um raio indo de A para B refletindo no espelho como também mostramos como podemos obter este ponto. O mais comum, no entanto, não é falarmos explicitamente no ponto de incidência, mas sim nos ângulos de incidência e de reflexão.

Analisando a figura 2.25, podemos considerar o ângulo de incidência, ou seja, o ângulo entre raio de luz que incide no ponto C e a normal em relação ao espelho como θ . Agora, analisando o triângulo $AA'C$, podemos notar que o ângulo $C\hat{A}A'$ deste triângulo é um alterno interno de θ , logo ele também vale θ . Ainda analisando este mesmo triângulo, é possível verificar que se trata de um triângulo isósceles, já que o segmento de reta \overline{AC} tem mesmo tamanho que $\overline{A'C}$, com isso, o ângulo $AA'\hat{C}$ também vale θ . Por fim é possível verificar, por alternos internos, que o ângulo entre o feixe de luz refletido no ponto C e a normal é igual ao ângulo $AA'\hat{C}$: θ . Com isso é possível provar que o ângulo de incidência é igual ao de reflexão. E esta é a forma pela qual usualmente expressamos a lei de reflexão. Em vez de nos referirmos ao ponto do espelho no qual a luz incide, dizemos que na reflexão o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

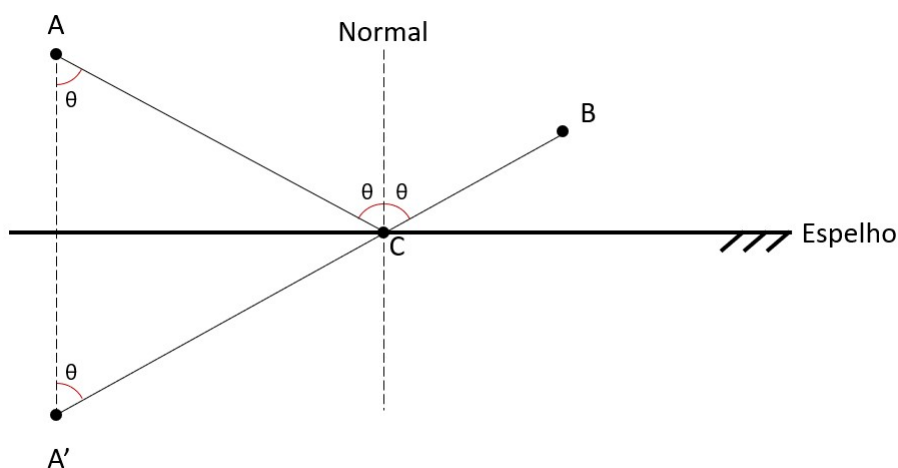


Figura 2.25: Trajetória que minimiza o tempo.

$$\theta_i = \theta_r \quad (2.7)$$

De posse do princípio de Fermat, podemos entender qualitativamente e quantitativamente toda a óptica geométrica. Para além dos exemplos usualmente cobertos nos livros textos, acreditamos que o ensino de óptica pode ganhar consideravelmente se examinarmos em sala de aula fenômenos fascinantes ao nosso redor, cuja compreensão instiga e desafia os estudantes.

Escolhemos nossos exemplos a partir de fenômenos atmosféricos, compreendidos aqui de uma forma ampla - são fenômenos que não precisam ser feitos em experimentos no laboratório (embora também o possam) mas que são testemunhados pelos estudantes ao passear pelas ruas, olhando para o céu ou para o horizonte. No próximo capítulo estudaremos detalhadamente o arco-íris, mas antes de encerrar este capítulo discutiremos qualitativamente na próxima seção as fascinantes miragens.

2.4 Miragem

Agora que já temos uma teoria bem razoável para a propagação da luz, é possível explicarmos de maneira bem intuitiva como alguns fenômenos ópticos são descritos. Um dos fenômenos fascinantes que podemos explorar naturalmente é a miragem. No entanto, para termos uma compreensão mais completa, é necessário fazer uma pequena análise de como a densidade influencia no índice de refração do ar.

Como primeiro exemplo, consideremos um dia bem quente em um deserto. É bem sabido que a areia esquenta mais do que ar, dado o seu maior calor específico. Por continuidade, não se pode mudar abruptamente a temperatura da areia para o ar, de modo que esperamos que o ar próximo à areia fique mais quente do que o ar muito acima, compatível também com o fato de que o ar é um péssimo condutor de calor, permitindo com que a diferença de temperatura em suas diferentes camadas permaneça por um tempo apreciável. O ar, assim como qualquer gás, é muito compressível, de modo que uma temperatura maior leva a uma apreciável diminuição em sua densidade. Quanto menos denso o ar maior a velocidade com a qual a luz viaja nele. Um jeito intuitivo de pensar nisso é que quanto menos denso mais o ar fica parecido com o vácuo - onde a luz assume a sua maior velocidade. Em resumo, a velocidade de propagação da luz próximo ao solo tem velocidade maior que a luz que se propaga distante do solo. Além do exemplo do deserto, o mesmo raciocínio se aplica para estradas em dias muito quente. Os carros passando rapidamente pelo asfalto faz com que a temperatura do ar próximo ao solo esteja mais quente do que o ar em camadas superiores.

Já nos dias ensolarados, em locais com temperaturas muito baixas, a água, que possui elevada capacidade térmica, tem uma taxa de aquecimento muito baixa. Isso faz com que o ar que esteja na sua proximidade fique mais frio do que a porção que se encontra mais acima. Utilizando o raciocínio análogo ao da propagação da luz no deserto, pode-se concluir que a velocidade da luz na porção superior é maior que na porção que se encontra próximo a água.

Essas diferenças entre as densidades e dos índices de refração do ar são os fatores preponderantes para a formação das miragens. A grande diferença do caso abordado na questão anterior é que enquanto ali a mudança de velocidade da luz era abrupta, fruto de uma interface que separava dois meios distintos, aqui a mudança é contínua. No caso da miragem vista na figura 2.26, em um local desértico, é possível esquematizar os caminhos dos feixes de luz, como apresentado na figura 2.27.



Figura 2.26: Miragem em um deserto. O que se vê no chão é o azul do céu. - Retirado de <https://brasilecola.uol.com.br/fisica/miragens-no-alasca.htm> - Acessado em Abril de 2023.

Por conta da diferença dos índices de refração, é possível ter dois feixes de luz, 1 e 2, que se propagam por caminhos distintos e que demandam, localmente, o menor tempo para chegar aos olhos do observador. A ideia é que como próximo ao solo a luz viaja mais rapidamente, para trajetórias bem longas compensa aumentarmos o comprimento do percurso para que o feixe passe um tempo grande próximo ao solo, onde é rápido. Ou seja, é possível

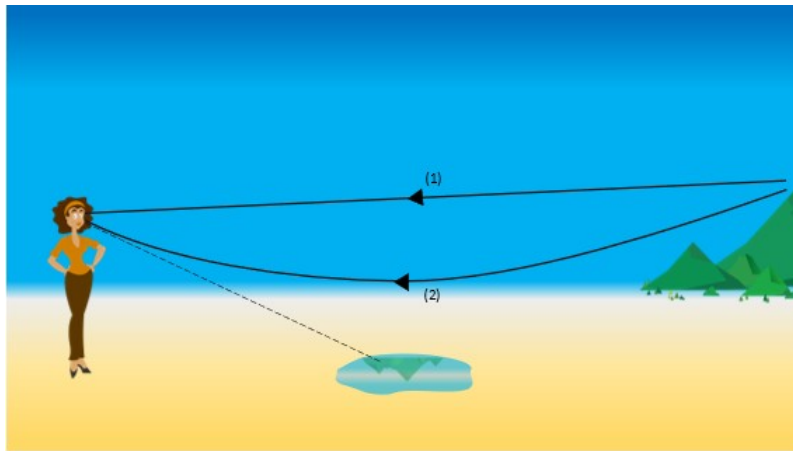


Figura 2.27: Raios de luz que formam a miragem no deserto.

ver a imagem da formação montanhosa e do céu como se estivessem vindos do solo. Essa miragem é muito comum em regiões desérticas e frequentemente confundida com água. Na figura 2.28 vemos uma foto onde é possível perceber o chão aparentemente molhado devido a um efeito de miragem.



Figura 2.28: Exemplo de miragem na qual o chão da estrada aparenta estar molhada. - Retirado de <https://en.wikipedia.org/wiki/Mirage> - Acessado em Julho de 2023.

Já no caso da miragem do barco no mar de uma região com temperaturas muito baixas, temos a chamada miragem superior, ilustrada na figura 2.29a. Na figura 2.29b estão ilustrados a trajetória de 2 raios que nos permitem compreender porque a imagem do barco se forma acima da água, dando a

impressão de ele estar flutuando.

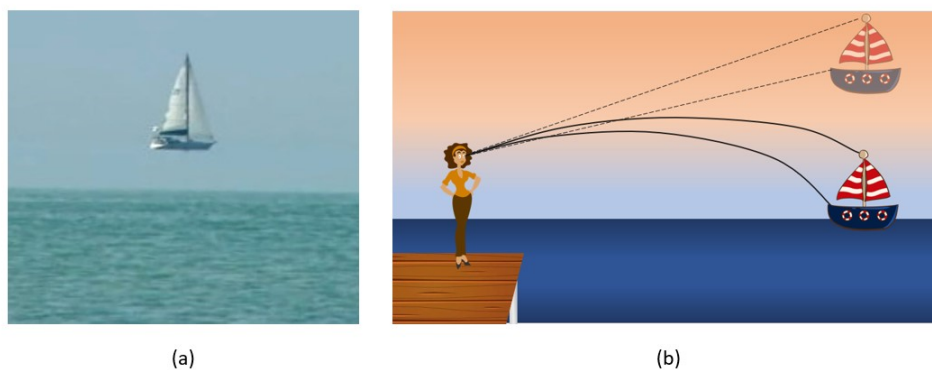


Figura 2.29: Exemplo de miragem superior. Em (a) temos uma foto na qual um barco aparenta estar flutuando, enquanto em (b) temos a representação de alguns raios que nos permitem entender a origem física da miragem. - Retirado de <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/atmos/mirage.html> - Acessado em Julho de 2023.

Em certos casos, podemos ter a impressão do barco estar de cabeça para baixo, como é mostrado na figura 2.30. Tal inversão corresponde a raios como os indicados na figura 2.31.



Figura 2.30: Miragem superior junto ao próprio navio. - Retirado de <https://www.abc27.com/news/photographer-captures-fata-morgana-on-lake-superior/> - Acessado em Abril de 2023.

Além dessas formações de imagens, existem outros fenômenos mais complexos que podem explicados embasados no Princípio de Fermat. O efeito hillingar, da figura 2.32 e o Sol em Ômega, da figura 2.33, são fenômenos

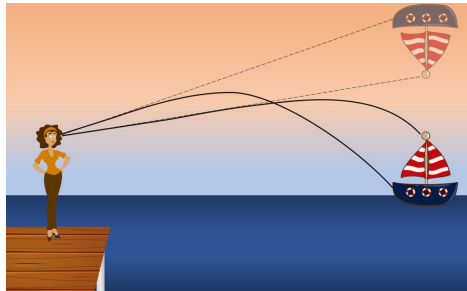


Figura 2.31: Raios de luz que formam a miragem invertida no mar.

que também envolvem a minimização local do tempo de propagação da luz entre dois pontos. Contudo são fenômenos mais complexos e foge dos nossos propósitos detalhar esta discussão.

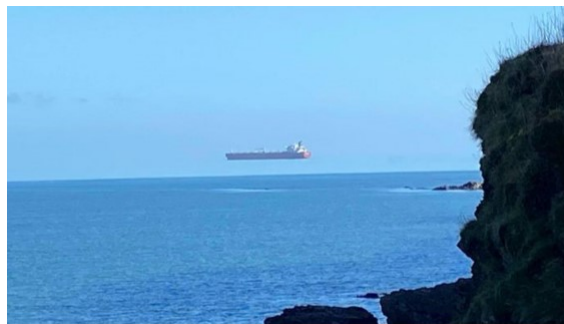


Figura 2.32: Efeito hillingar - Imagem de um navio que não aparece no horizonte. - Retirado de <https://www.abc27.com/news/photographer-captures-fata-morgana-on-lake-superior/> - Acessado em Abril de 2023.



Figura 2.33: "Sol em ômega". - Retirado de <https://science.nasa.gov/omega-sunrise> - Acessado em Abril de 2023.

Capítulo 3

Arco-Íris

O arco-íris é um fenômeno óptico que apresenta uma beleza única e que é possível ser visto com uma certa frequência em nosso cotidiano. Além disso, este é um fenômeno que envolve diretamente reflexão e refração, dois fenômenos corriqueiramente estudados no ensino médio. Entretanto, pouco é discutido sobre o que há por trás das cores do arco-íris e esse será o objetivo principal deste material. Não apenas o assunto é pouco discutido, como pesquisa recente na área de ensino de física detectou que a compreensão por parte de jovens professores é bem incompleta sobre este tema [12]. Produzimos uma sequência didática voltada para professores do ensino médio a fim de tratar do ensino de arco-íris. Ao final desta sequência, esperamos que os alunos do ensino médio, bem como os professores possam olhar para o arco-íris de outra forma.

3.1 Formação do Arco-Íris

Por que o arco-íris não é visto a todo momento? O que é necessário para a ocorrência deste fenômeno? Essa pergunta é respondida de maneira imediata pela maioria das pessoas, visto que desde pequenos aprendemos que a formação do arco-íris depende de haver chuva e raios solares. Inclusive, o nome em inglês do arco-íris, *rainbow*, ainda reforça a ideia já que a tradução livre desta palavra é arco da chuva. Entretanto, não é somente com a

associação da chuva propriamente que é formado o arco-íris, mas sim de gotículas de água, independentemente de onde seja proveniente. Nas figuras 3.1 e 3.2, são mostrados arco-íris formados em uma cachoeira e um em chafariz, respectivamente.



Figura 3.1: Arco-íris formado em um chafariz.



Figura 3.2: Arco-íris formado nas Cataratas do Iguazu

Em suma, é possível constatar que para a formação do arco-íris bastam a existência de raios de sol e gotículas de água, quaisquer sejam suas origens.

3.2 As cores do arco-íris

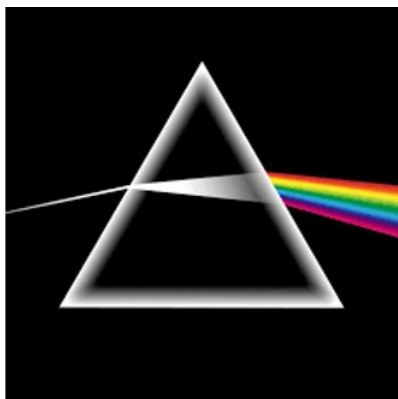


Figura 3.3: Capa do álbum *The Dark Side of the Moon* da banda inglesa *Pink Floyd*.

A capa do disco *Dark Side of the Moon*, da banda inglesa *Pink Floyd*, mostrado na figura 3.3 retrata exatamente o que ocorre com um feixe de luz branca desde a entrada no prisma até que se chegue as cores do arco-íris. Só que na capa do disco, é utilizado um prisma e não uma gota de água, como acontece na formação do arco-íris que foi visto na seção anterior.

Eis que surge uma questão: como surgem as cores? Elas são criadas a partir do prisma ou se originam da luz branca? Na figura 3.4 é possível ver uma luz vermelha oriunda de um *laser* incidindo em um prisma. Neste caso, em toda a trajetória da luz, verifica-se que somente a cor vermelha está presente, o que refuta a possibilidade das cores serem criadas pelo prisma.

Já na figura 3.5, é possível ver que um feixe de luz branca que incide em um prisma similar ao da figura 3.4 e dá origem a diversas cores, que são exatamente as mesmas e com a mesma ordem do arco-íris.

A partir dessa análise, infere-se que as cores não são oriundas do prisma, mas todas elas já estão contidas na luz branca. Entretanto, todas essas cores quando estão juntas, aglutinadas, são interpretadas como uma única cor pelo olho humano: a cor branca. Porém, quando a luz branca passa de um meio para o outro, ela sofre o fenômeno da refração. Como vimos, isso significa que a velocidade da luz se altera ao entrar e ao sair do prisma. O que expe-

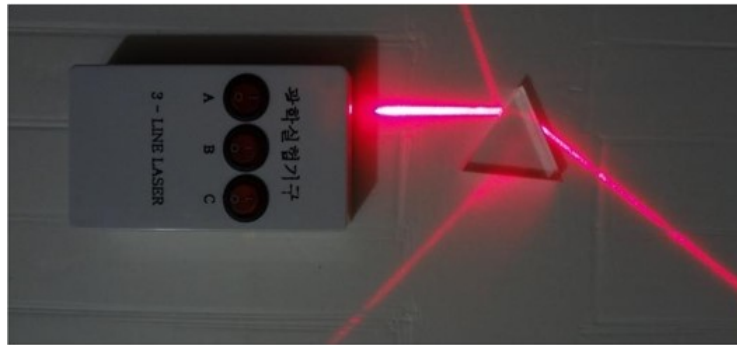


Figura 3.4: Laser emitindo luz monocromática vermelha sobre um prisma.

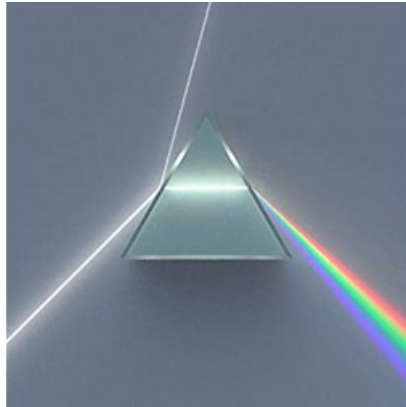


Figura 3.5: Prisma dispersando um feixe de luz branca.

rimentos como o ilustrado na figura 3.5 indicam é que cada cor se propaga em uma velocidade diferente, o que faz com que o ângulo de refração para cada cor seja diferente, conforme podemos ver na equação (2.4). Pela mesma equação vemos que para observarmos este efeito o feixe incidente luminoso não pode incidir perpendicularmente à interface, o que é diretamente verificado nas figuras 3.4-3.5. Esse fenômeno também é conhecido por dispersão da luz e estudos importantes sobre este tema foram feitos pelo Isaac Newton, como testemunha a ilustração contida na figura 3.6.

Matematicamente, dizemos que o índice de refração de um material é uma função da frequência, e percebemos, portanto, que a equação 2.6 na realidade deve ser aplicada separadamente para cada frequência. Isto significa que se

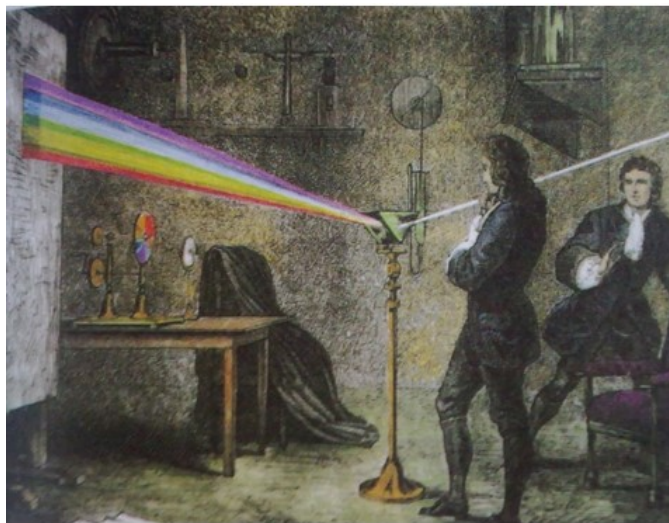


Figura 3.6: Ilustração que retrata como teria sido o experimento original feito por Isaac Newton.

um feixe policromático incide com ângulo θ_1 em uma interface temos

$$n_1(\omega) \operatorname{sen} \theta_1 = n_2(\omega) \operatorname{sen} \theta_2(\omega). \quad (3.1)$$

Mais formalmente, e conforme explorado em cursos mais avançados, vemos que a interação da luz com a matéria na presença de dispersão é mais simples de ser estudada no espaço de Fourier - após analisarmos cada modo de Fourier separadamente podemos obter o feixe se propagando como função do tempo a partir de uma transformada de Fourier inversa. Foge ao escopo desta dissertação ir nesta direção, contudo gostaríamos de destacar que mesmo em exemplos bem cotidianos e corriqueiros já vemos a necessidade de estudar a interação entre a luz e a matéria para componente de Fourier separadamente, componentes essas que em linguagem corrida e para o espectro visível denominamos *cor*.

Agora que estudamos introdutoriamente o fenômeno da dispersão podemos aprofundar nossa investigação acerca dos arcos-íris.

3.3 A posição do Sol e o Arco-Íris

O arco-íris só é visto em uma certa hora do dia? A posição do Sol influencia na ocorrência do fenômeno? Enquanto os pontos levantados nas duas seções anteriores estão mais enraizados em experiências prévias e cotidianas, a pergunta desta seção já remete a aspectos que muitas pessoas não observam espontaneamente. Primeiramente, é importante salientar o fato de que embora não haja uma hora específica para a ocorrência do arco-íris, a posição do Sol influencia em sua formação. O arco-íris só ocorre quando o Sol está posicionado atrás do observador, ou seja, o observador sempre vai estar em um ponto localizado entre o Sol e o arco-íris. Isso fica bem claro ao se analisar as figuras 3.7 e 3.8. Nessas imagens é possível ver as sombras dos objetos sempre projetadas em uma direção que aponta para o centro do arco-íris, o que indica que o observador está posicionado entre o Sol e o arco-íris. Um esquema dessa situação é mostrado na figura 3.9.



Figura 3.7: Arco-íris formada em uma região litorânea.

Levando em consideração que a luz parte de trás do observador, vinda do



Figura 3.8: Arco-íris em uma região rural.

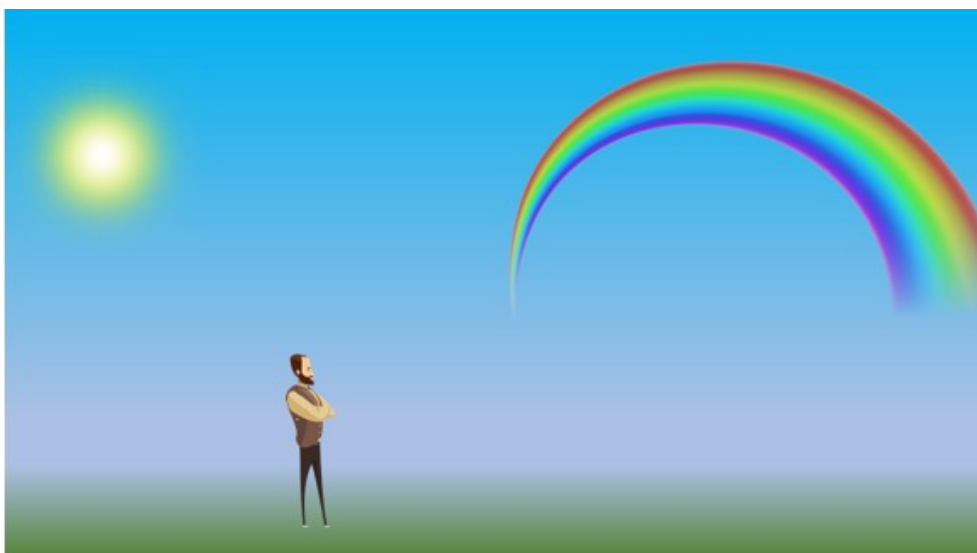


Figura 3.9: Posição de um observador ao ver um arco-íris.

sol e retorna até seus olhos, infere-se que o arco-íris é formado por raios de luz solar que adentram na gotícula de água e, de alguma maneira, retornam até os olhos do observador. Na figura 3.10 é mostrado o caminho de um feixe de luz de cor vermelha que adentra uma gotícula e chega aos olhos do observador. Desta forma, o surgimento do arco-íris envolve tanto o conceito de refração, para luz mudar de meio e adentrar na gota, quanto de reflexão, além da dispersão já mencionada anteriormente.

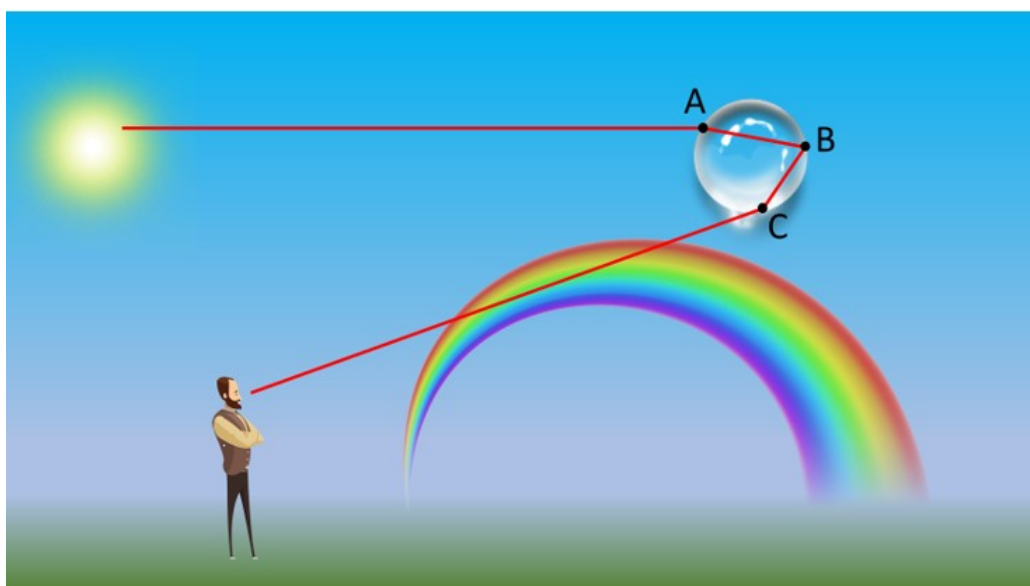


Figura 3.10: Caminho de um feixe de luz monocromática vermelha ao se propagar do Sol até o olho de um observador, sendo refletido dentro de uma gota.

Durante a ocorrência da refração, em geral, parte da luz também é refletida, bem como na subsequente reflexão parte é refratada, mas para explicar a formação do arco-íris nesse momento é considerado apenas a parte que é responsável pela ocorrência do fenômeno em cada interface. Como é esquematizado na figura 3.10, o feixe de luz monocromática vermelha incide no ponto A e a parte dela que adentra a gotícula, ou seja, a parte refratada, segue até o ponto B. Neste ponto, parte da luz é refletida e, por fim, no ponto C a luz é refratada novamente. Nesse caso, é mostrado apenas o que ocorre com um feixe de luz monocromática vermelha. Insta salientar que a luz que chega do Sol é uma luz branca, então, por analogia, pode-se dizer que este processo acontece para todas as demais cores. A reflexão não discrimina frequências, pois a todas cabe refletir com o mesmo ângulo de incidência, fato que decorre diretamente do princípio de Fermat. De fato, embora cada frequência viaje com uma velocidade diferente na gota d'água, ao refletir a mesma velocidade se mantém, fazendo com que a minimização local do tempo de percurso requeira a lei da reflexão 2.7 para todas as frequências.

Portanto, a abertura do branco nas belas cores que o arco-íris nos oferece é decorrente apenas da refração, contudo só recebemos esta luz a partir da reflexão na gota de água, uma vez que o sol deve estar atrás do observador do arco-íris. Mais adiante neste capítulo veremos porque isto ocorre. Antes de encerrar esta seção, gostaríamos apenas de destacar que ao longo desta e das próximas seções nos referiremos ao Sol e às gotas d'água mas como vimos no início do capítulo podemos fazer arco-íris com outras fontes de luz e materiais refrativos, e nossas conclusões a seguir valerão para estes casos também. Escolhemos frasar a discussão em termos do Sol e das gotas d'água como recurso didático.

3.4 Posição do Arco-Íris em Relação a um Observador

É possível estar embaixo do arco-íris? A resposta para essa pergunta é bem curta: não! Assim como não é possível chegar no final do arco-íris e encontrar o tão sonhado pote de ouro. A justificativa para essa resposta é algo um pouco mais complexo e exige domínio de alguns conceitos ópticos e matemáticos. Para iniciar o estudo deste questionamento, deve se levar em consideração que na atmosfera não há apenas uma gota de água, mas que há uma infinidade delas. Portanto, há, em princípio, diferentes direções para as quais a luz vermelha, por exemplo, atinge o olho do observador. Na figura 3.11 estão ilustradas três gotas distintas nas quais após a luz do sol refratar, refletir e refratar novamente, dá origem a um feixe vermelho indo em direção ao olho do observador. Por que, neste caso, dentre as três, apenas a gota 2 fornece uma cor vermelha percebida pelo observador? Em outras palavras, porque o observador não vê a cor vermelha em outras direções ao olhar para o céu. E, já que este argumento vale para outras cores também, por que ele não vê tudo azul, como o céu a sua volta?

Posto de outra forma, na figura 3.12 vemos dois raios de luz que chegam aos olhos do observador na mesma direção, um vermelho e outro violeta. No entanto, o raio vermelho (1) chega aos seus olhos, faz parte do arco-íris que

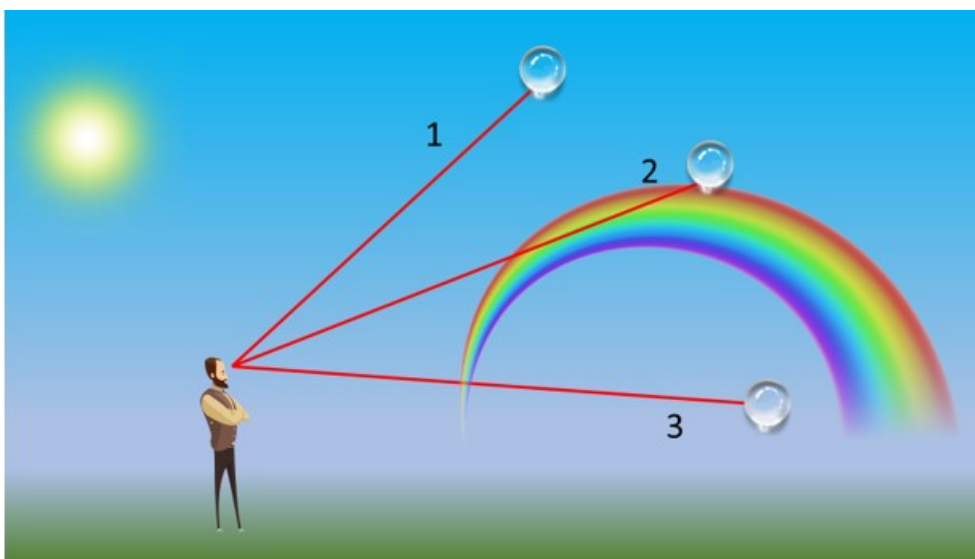


Figura 3.11: Raios de luz de cor vermelha chegando a um observador de várias direções.

ele observa e o raio violeta (2) de alguma maneira acaba sendo ofuscado. Por que o raio vermelho se sobrepõe ao violeta?

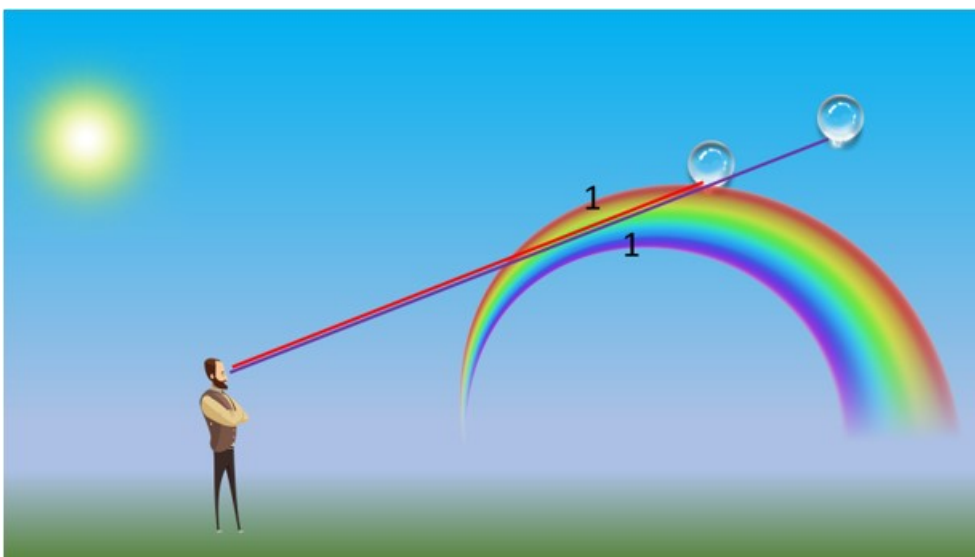


Figura 3.12: Dois feixes, um de cor vermelha e outra de cor violeta, chegando aos olhos de um observador.

Nestes dois casos, pode se supor que os raios de luz de diferentes cores

chegam ao observador com intensidades diferentes, já que uma cor se sobrepõe a outra. Isto significa que há um acúmulo de raios de uma certa cor. Por conta disto, é necessário que se faça uma abordagem quantitativa para que se elucide o motivo de se ter concentrações de feixes de luz em uma certa direção. Apresentaremos abaixo um modelo simples que contemplará não apenas de todos os questionamentos acima quanto será capaz de responder à seguinte pergunta: por que vemos um arco de círculo e não outra forma geométrica?

Nosso modelo partirá da hipótese de que cada gota de água na atmosfera é perfeitamente esférica e homogênea. Estas são em geral boas hipóteses e, como veremos, suficientes para compreendermos os mecanismos físicos principais do fenômeno do arco-íris. Faremos a análise inicialmente considerando que o feixe que incide sobre a gota é monocromático e posteriormente generalizaremos nossos resultados. Nas figuras 3.13 e 3.14 são retratados os caminhos de feixes de luz monocromática desde o momento em que incidem na gotícula até o momento que saem dela para diferentes pontos de entrada do feixe na gota, supondo que haja apenas uma reflexão na gota (na seção 3.4.4 analisaremos a contribuição de raios que sofrem mais de uma reflexão no interior da gota antes de deixá-la). Em princípio, a luz que vem do sol atinge cada gota em um contínuo de pontos da superfície e desejaremos entender o caminho seguido pelo raio de luz após entrar por cada ponto da superfície da gota. Suporemos que os raios que chegam do Sol são paralelos entre si. Denotamos o ângulo do raio incidente em relação a normal como o ângulo de entrada, θ_E , e o ângulo formado pelo raio que sai da gota com uma reta paralela ao raio incidente de ângulo de saída θ_S . Fisicamente, $180^\circ - \theta_S$ corresponde ao ângulo de deflexão do raio de luz produzido pela gota. Como vemos pelas figuras 3.13 e 3.14 ao variarmos o ponto no qual o feixe de luz incide na superfície alteramos θ_E e θ_S . Nosso objetivo é determinar a função que fornece θ_S para cada θ_E . Conforme veremos, o conhecimento desta função será o ingrediente essencial para respondermos a todas as perguntas que colocamos desde o início deste capítulo. Isso explica o motivo pelo qual os feixes de luz violeta e vermelho da figura 3.12 podem sair na mesma direção, já que existem infinitos raios adentrando uma gotícula em diversos ângulos

de entrada e, para cada um destes, existe um ângulo de saída. Portanto, é necessário determinar esta relação que coloca θ_S uma função de θ_E para que o questionamento desta seção, o motivo de não se poder estar embaixo do arco-íris, seja respondido satisfatoriamente. Na subseção a seguir será demonstrado como se chega a essa função a partir de relações geométricas utilizando a lei de Snell-Descartes e a lei da reflexão.

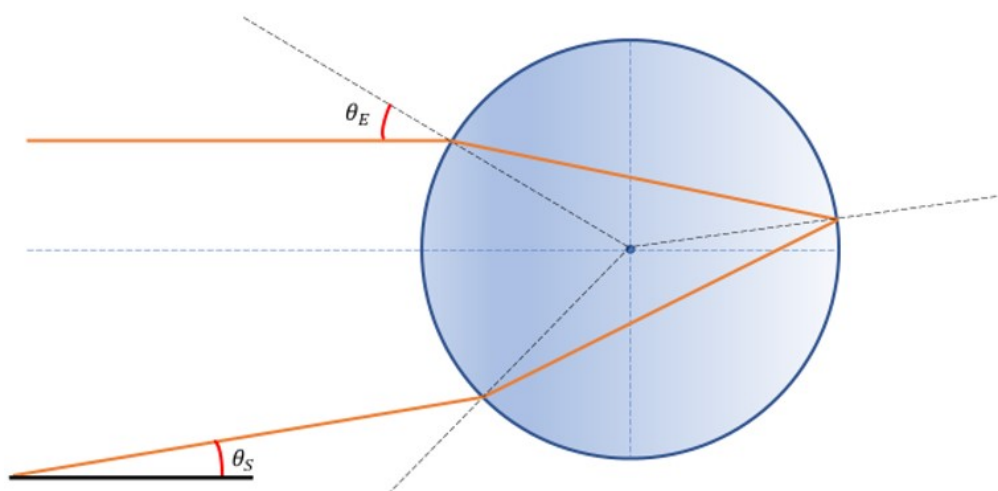


Figura 3.13: Caminho de um raio de luz dentro de uma gotícula

3.4.1 Deflexão de um raio de luz por uma gota esférica

Suponha que um raio de luz incida em uma gota de água esférica formando um ângulo θ_E com a direção da reta normal à interface, como ilustrado na figura (3.15). Ao incidir no ponto A ilustrado na figura, uma parte do feixe é refletida e uma parte refratada. Como a reflexão se dá igual para todas as frequências, apenas a última contribuirá para o fenômeno do arco-íris. Assim, analisaremos apenas o raio que refrata em A . O ângulo de refração, denotado por α na figura (3.15), é função como vimos do índice de refração $n(\omega)$ da água relativo ao ar. Nesta subseção analisaremos apenas uma componente de frequência fixa do feixe incidente, isto é, começaremos com o caso monocromático. Por essa razão e para não sobrecarregarmos a notação, omitiremos a dependência de n com a frequência nos cálculos

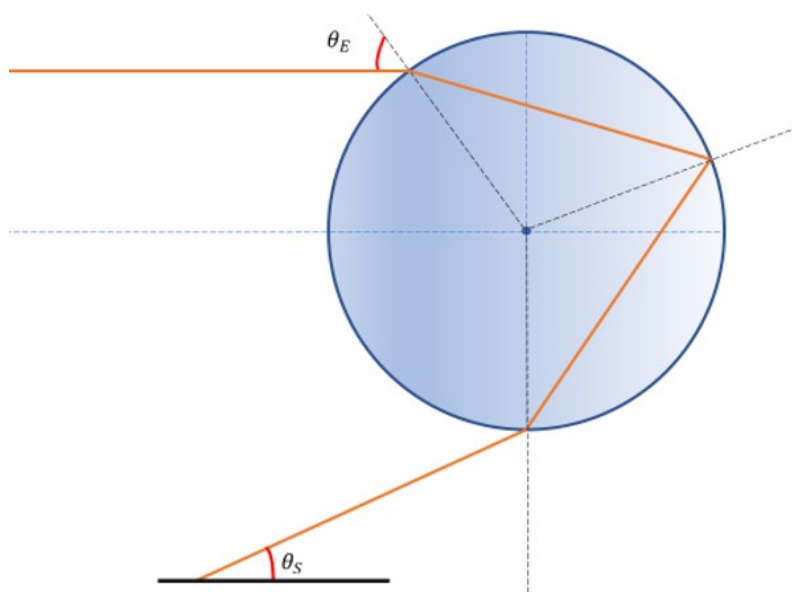


Figura 3.14: Caminho de outro raio de luz dentro de uma gotícula, com diferente parâmetro de impacto em relação a figura 3.13.

abaixo. Quando o raio de luz atinge novamente a superfície da gota, agora internamente, novamente teremos uma parte do feixe que é refratada e outra que é refletida. Note que apesar do ângulo de reflexão ser independente da frequência, a própria posição do ponto B depende do ângulo da refração α e, portanto, da frequência. Como vimos que a fonte luminosa que provoca o arco-íris está atrás do observador, analisaremos apenas o raio de luz que reflete em B , mas posteriormente voltaremos neste ponto para analisar o que ocorre com a parte do feixe que refrata neste ponto. Por fim, o raio incide novamente na superfície da gota no ponto C , onde consideraremos apenas a parte refratada que irá para os olhos do observador. Como a cada reflexão perde-se energia (tanto por absorção quanto pela parte que é refratada), imaginamos que reflexões subsequentes serão menos perceptíveis. Voltaremos neste ponto adiante. Por fim, o raio de luz que sai em C faz um ângulo θ_S com a direção original de propagação do raio. Nosso objetivo nesta subseção é determinar θ_S como função de θ_E e do índice de refração. Este por si só é um ótimo exercício de óptica geométrica no ensino médio, pois contempla não apenas todas as princípios fundamentais desta teoria que ensinamos, como

um raciocínio geométrico bem rico.

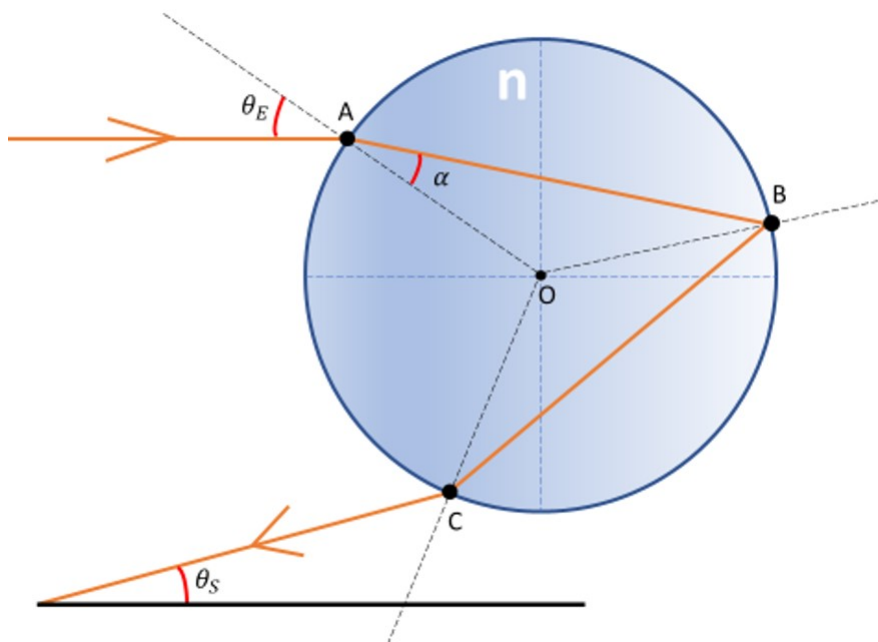


Figura 3.15: Representação de um feixe de luz que entra e sai da gota sofrendo uma única reflexão interna

A partir da situação descrita e observada na figura 3.15, é possível começar a análise geométrica. O triângulo AOB tem os lados AO e OB iguais ao raio da gota esférica, e, portanto, é isósceles. Com isso, é possível afirmar que o ângulo $A\hat{B}O$ deste triângulo é α , por ser igual ao ângulo $O\hat{A}B$. Note que aqui fica claro a simplicidade e conveniência de assumirmos uma gota esférica. A parcela do raio que reflete em B terá ângulo de reflexão igual ao de incidência em relação a normal, dada pela reta OB . Como o triângulo BOC é isósceles, o ângulo $O\hat{C}B$ é igual ao ângulo $O\hat{B}C$. Logo, $O\hat{C}B$ vale α . Por fim, pelo princípio da reversibilidade, pode se afirmar que no ponto C , onde o ângulo de incidência é α , o ângulo refratado será o mesmo do ângulo de incidência em A , θ_E . Na figura 3.16 atualizamos a figura 3.15 com os resultados que desenvolvemos neste parágrafo.

Para determinar θ_S comecemos observando que ele corresponde ao quanto a direção do raio que deixa a gota está rodado com relação à direção original.

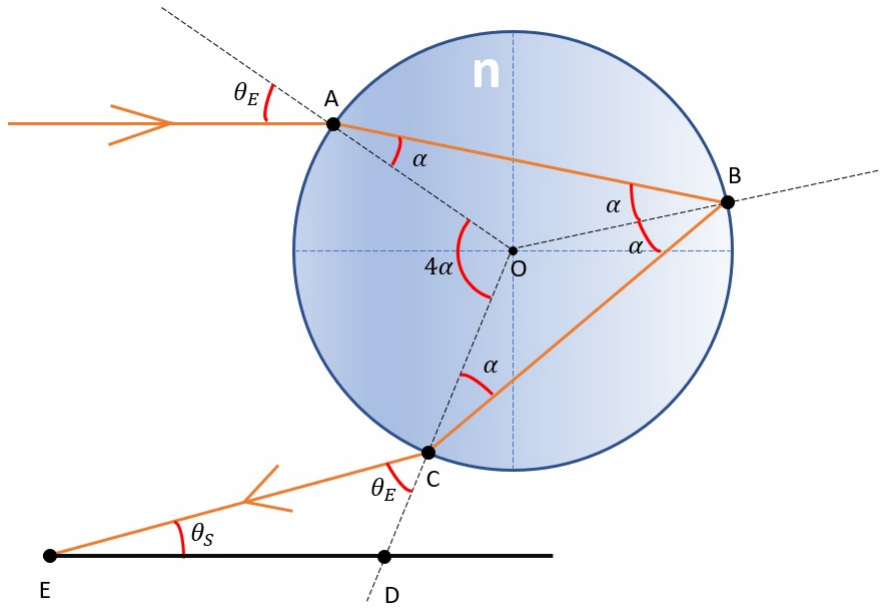


Figura 3.16: Marcação dos ângulos de incidência, reflexão e refração que ocorrem no interior da gota. Note que $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$, portanto os triângulos AOB e AOC são isósceles.

Note que o ângulo interno \hat{O} do quadrilátero $AOBC$ vale $2\pi - 4\alpha$, donde a reta normal entre o ponto de entrada A e o ponto de saída C foi rodada por 4α após a refração em A e a reflexão em B . Apesar de termos rodado a direção da reta normal por 4α , este não é o ângulo de deflexão do raio. Como visto na figura 3.16, caso giremos o raio de incidência por 4α obteríamos a reta tracejada à direita da normal. Vemos, portanto, que o raio de luz girou um ângulo $2\theta_E$ a menos do que a normal, donde concluímos que

$$\theta_S = 4\alpha - 2\theta_E. \quad (3.2)$$

Resta apenas determinarmos α como função de θ_E . Sendo n o índice de refração da água relativa ao ar, temos pela equação 2.6 que

$$\alpha = \arcsen\left(\frac{\text{sen } \theta_E}{n}\right). \quad (3.3)$$

Substituindo 3.3 em 3.2, chega-se a:

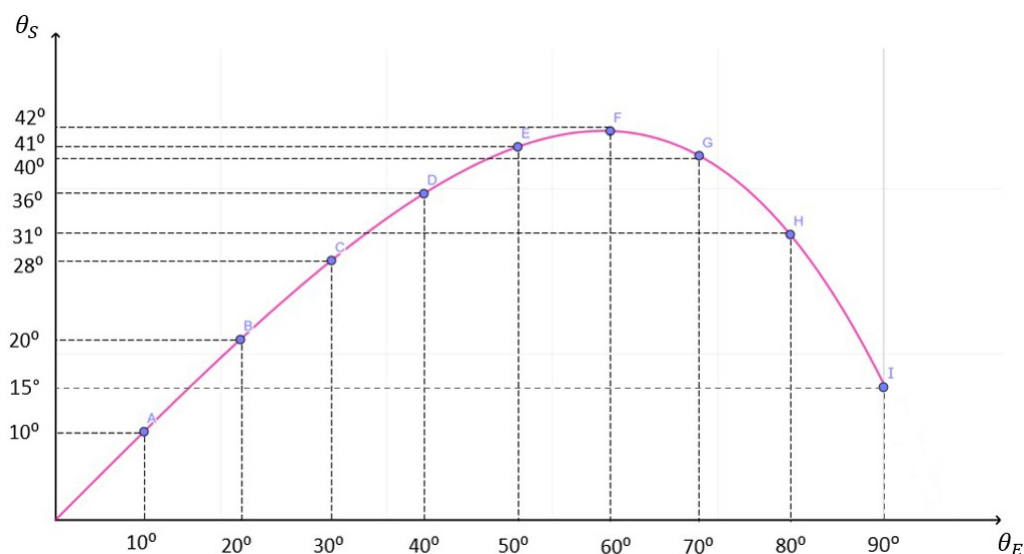
$$\theta_S = 4 \arcsen \left(\frac{\text{sen } \theta_E}{n} \right) - 2\theta_E. \quad (3.4)$$

A expressão acima é extremamente rica e contém em si toda a física necessária para compreender os principais aspectos da formação do arco-íris. Um aspecto notável deste resultado é a independência do ângulo de deflexão com respeito ao raio da esfera. Isto decorre justamente da hipótese de gota esférica e poderia ser antecipado por análise dimensional. Caracteriza a esfera apenas uma escala de comprimento, enquanto o ângulo de deflexão é adimensional. Com uma só escala de comprimento disponível não podemos obter uma grandeza adimensional. Caso analisássemos um gota elipsoidal, por exemplo, ou qualquer outro formato com duas ou mais escalas de comprimento, p.ex. a e b , o ângulo de espalhamento poderia ser função da razão a/b .

Note que embora tenhamos empregado apenas ferramentas elementares usualmente estudadas no ensino médio, a função que obtivemos não possui nada de elementar e é de difícil análise por parte dos estudantes. Argumentamos, contudo, que do ponto de vista pedagógico este é um ponto forte e não fraco da presente abordagem. Com as ferramentas computacionais e elaboradas calculadoras científicas hoje presentes, é muito fácil o estudante fazer o gráfico de uma função qualquer. Veremos que é na interpretação deste gráfico que jaz toda a compreensão física do fenômeno do arco-íris. Desejamos, desta forma, trabalhar a interpretação de gráficos por parte dos estudantes, o que faremos na próxima subseção. Uma abordagem semelhante para o ensino deste tema foi recentemente defendida em [13, 14].

3.4.2 Análise gráfica do ângulo de deflexão

De posse da equação 3.4 podemos esboçar um gráfico de θ_S x θ_E , que será a ferramenta utilizada para responder aos questionamentos colocados ao longo deste capítulo. Utilizando o *Geogebra*, é possível plotar o gráfico da equação 3.4 considerando o índice de refração da luz vermelha na água ($n_{\text{VERMELHO}} = 1,33141$) e verificar que ele assume a forma da figura 3.17.


 Figura 3.17: Gráfico θ_S x θ_E para a luz vermelha.

No gráfico da figura 3.17 é possível analisar, com a marcação de alguns pontos, os valores dos ângulos de saída em função dos ângulos de entrada. Para a primeira análise, toma-se o trecho do gráfico delimitado pelos pontos A , B e C . Neste trecho é visto que para um intervalo de 20° para os ângulos de entrada (de 10° a 30°) os valores dos ângulos de saída se concentram em um intervalo de 18° (de 10° a 28°). Entretanto, ao se analisar o trecho delimitado pelos pontos E , F e G , se vê que, para o mesmo intervalo de 20° para o ângulo de entrada (de 50° a 70°), se obtém ângulos de saída concentrados em um intervalo de apenas 2° (de 40° a 42°). Isso dá uma ideia de que muitos raios, que entram de formas diferentes acabam se reunindo em uma faixa de ângulos de saída específico. Este ângulo de saída em que há a concentração de raios com diversos ângulos de entrada, para a luz vermelha, é de aproximadamente 42° , justamente o ponto que fornece o máximo de θ_S . Aqui temos uma interpretação bonita e que pouco aparece no ensino médio do extremo de uma função. A região em torno do extremo de uma função é uma região no qual a imagem varia muito pouco. Esta é a base do conceito de derivada enquanto aproximação linear de uma função não linear e tangencia a discussão que fizemos no capítulo anterior para encontrar a lei

de Snell. Todavia, neste caso com o auxílio do *Geogebra* não é necessário empregarmos nenhuma técnica de cálculo para discutir com os estudantes o que está ocorrendo. Vemos por argumentos bem gerais que próximo ao ângulo 42° sai muita luz vermelha. Enfim temos um argumento para entender porque embora haja luz vermelha espalhada em um contínuo de diferentes direções, como mostrado no gráfico 3.17, há uma direção especial na qual vemos mais vermelho do que em outras, compatível com nosso testemunho do fenômeno do arco-íris. Isso explica o motivo do arco-íris ser de fato um arco. É como se houvesse um compasso girando com uma abertura de 42° , em que a ponta seca foi fincada na direção em que um raio de luz passa pela mesma altura dos olhos do observador. Neste ângulo, estará presente a cor vermelha do arco-íris. A figura 3.18 ilustra esta situação descrita. O centro do arco está no prolongamento dos raios luminosos que vem do sol e denominamos este ponto de anti-solar. De modo complementar a análise do gráfico, podemos também representar diversos raios adentrando na gota. Ao fazermos isto, veríamos muitos raios se concentrando em uma só direção. Para uma abordagem nesta linha remetemos o leitor à referência [15], na qual o autor emprega programas de computador para obter imagens precisas de uso para o ensino da óptica.

Ainda em posse da equação 3.4, é possível fazer o gráfico $\theta_S \times \theta_E$ para a cor violeta, que é o outro extremo do arco-íris e cujo índice de refração na água é $n_{\text{VIOLETA}} = 1,34451$. Novamente o gráfico é plotado no *Geogebra*, como é visto na figura 3.19. Para esta cor, os raios de luz tem uma concentração maior quando o ângulo de saída está na faixa entre 37° e 40° , que é o ângulo no qual é vista essa cor no arco-íris. Isso explica o fato de as cores do arco-íris terem aquela ordem, o vermelho na extremidade de cima e o violeta na extremidade de baixo, com o restante das cores entre as duas. Vemos, portanto, que há uma rica física e matemática por detrás do surgimento do arco-íris. Note que fizemos a análise através do espalhamento da luz por uma só gota de água, mas o que nosso resultado indica é que todas as gotas presentes na atmosfera que espalhem uma dada cor na direção do ângulo que determinamos acima contribui para a imagem do arco-íris. Assim, não há uma distância bem definida onde o arco se forma, é um conjunto

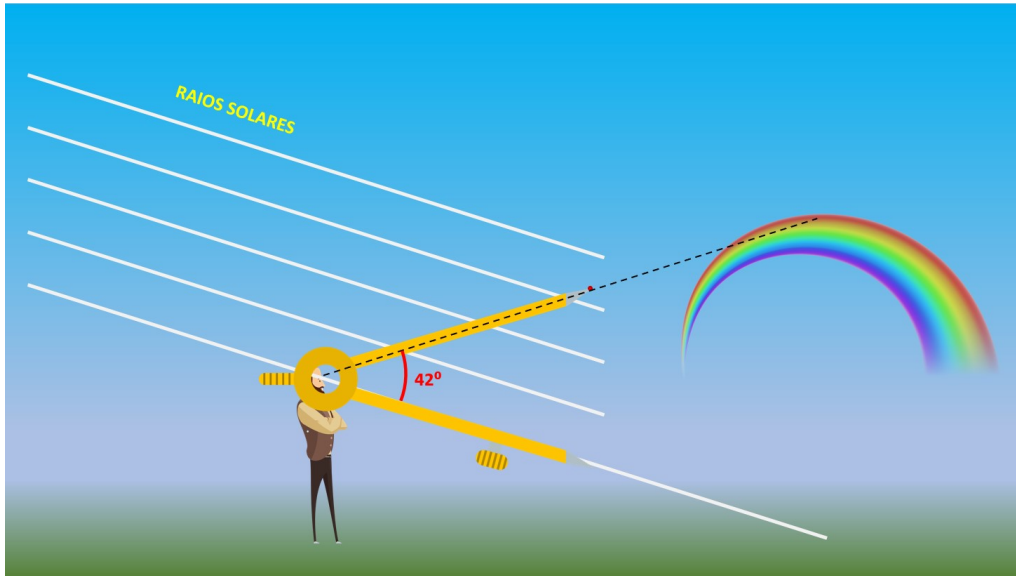


Figura 3.18: Abertura de 42° para a cor vermelha de um arco-íris.

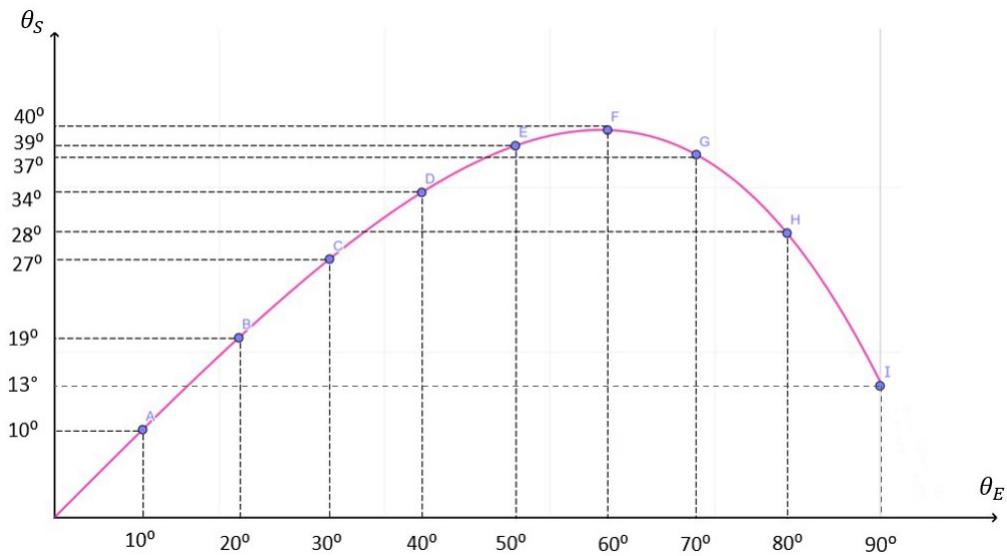


Figura 3.19: Gráfico $\theta_S \times \theta_E$ para a luz violeta.

grande de gotas que conjuntamente jogam cada cor em nossos olhos. Pela mesma razão, não conseguiremos estar embaixo do arco-íris. Inclusive, note que para diferentes observadores são diferentes as gotas que espalham a luz na sua direção, fazendo com que o arco-íris que cada um percebe não seja

exatamente o mesmo. Porém, a abertura do cone é a mesma para cada cor, independentemente do observador.

Por fim, agora que entendemos os aspectos centrais responsáveis pelo fenômeno do arco-íris podemos compreender outras características que observadores atentos podem perceber em seu cotidiano e que geram discussões interessantes em sala de aula. Primeiramente, é mais comum vermos arcos-íris no início ou no final do dia. Agora podemos entender o porquê. Nestes horários o sol está próximo ao horizonte e uma boa parte do círculo está para fora da Terra. Contudo, próximo ao meio-dia, a ponto anti-solar estará dentro da Terra, deixando muito pouco ou nada do arco para fora da Terra. Note que este ponto anti-solar não é precisamente definido, uma vez que não há uma distância precisa para o arco-íris - como vimos são muitas as gotas que espalham a luz na direção de nossos olhos para que vejamos o arco-íris. O ponto é que próximo ao meio dia temos muito menos gotas espalhando a luz do sol na direção de máxima intensidade, fazendo com que o arco-íris não tenha intensidade suficiente para ser percebido. Claro que se estivermos a uma boa altura com relação ao solo, por exemplo observando através da janela de um avião, conseguimos ver bem o arco-íris mesmo ao meio-dia como é visto na figura 3.20.



Figura 3.20: Figura retirada de <https://www.metoffice.gov.uk/weather/learn-about/weather/optical-effects/rainbows/full-circle-rainbow> (consultado em 30/05/2023) na qual é possível ver um arco-íris com Sol a pino.

Para finalizar este parágrafo comentaremos alguns aspectos adicionais mais avançados mas que podem ser trabalhados de forma qualitativa. Primeiramente, a equação (3.4) não depende do raio da gota, como vimos por análise dimensional. Contudo, isto não significa que o raio da gota seja irrelevante para o fenômeno do arco-íris, mas tão somente que o raio não influencia no ângulo do arco. De fato, em gotas pequenas não há espaço suficiente para as cores abrirem muito, e fica mais difícil de perceber a dispersão. Um efeito análogo para o prisma pode ser observado na figura 3.5, onde dentro do vidro ainda não conseguimos observar as distintas cores, ainda muita superpostas.

Antes de encerrarmos esta subseção gostaríamos apenas de enfatizar um ponto conceitual que já mencionamos de forma breve anteriormente. Apesar de nas figuras desta seção representarmos apenas raios que sofrem uma reflexão na gota não quer dizer que a reflexão seja uma reflexão total - há raios que refratam no ponto B ilustrado na figura 3.16, isto é, apenas uma fração da intensidade da luz incidente em B é refletida. Na realidade, de posse da geometria que discutimos nesta seção podemos inclusive garantir que para gotas esféricas a reflexão não é total. De fato, vemos na figura 3.16 que a condição para que a reflexão em B seja total é $n \sin \alpha > 1$. Porém, o formato esférico da gota garante que o ângulo de incidência em B é idêntico ao ângulo de refração em A, que satisfaz $n \sin \alpha = \sin \theta_E \leq 1$. Em outras palavras, em um gota esférica se um raio entrou, então ele pode sair! Todavia, os estudantes ficam frequentemente com a impressão de que na formação do arco-íris há uma reflexão total na gota. Uma busca rápida da internet nos forneceu dois fóruns em que os usuários perguntavam se havia reflexão interna total na formação do arco-íris, bem como encontramos um tutorial que afirmava que havia reflexão interna total [16]. Neste tutorial, constava a frase (tradução nossa) “As propriedades da luz responsáveis pelo arco-íris são dispersão, reflexão interna total e refração”. A seguir, eles ilustravam a formação do arco-íris destacando incorretamente a existência de reflexão total, conforme reproduzimos na figura 3.21 Por ser uma confusão frequente entre estudantes, um professor recentemente publicou uma breve nota apenas para ressaltar que não há reflexão total na formação do arco-íris [17]. A própria referência [12], que faz um trabalho extremamente interessante,

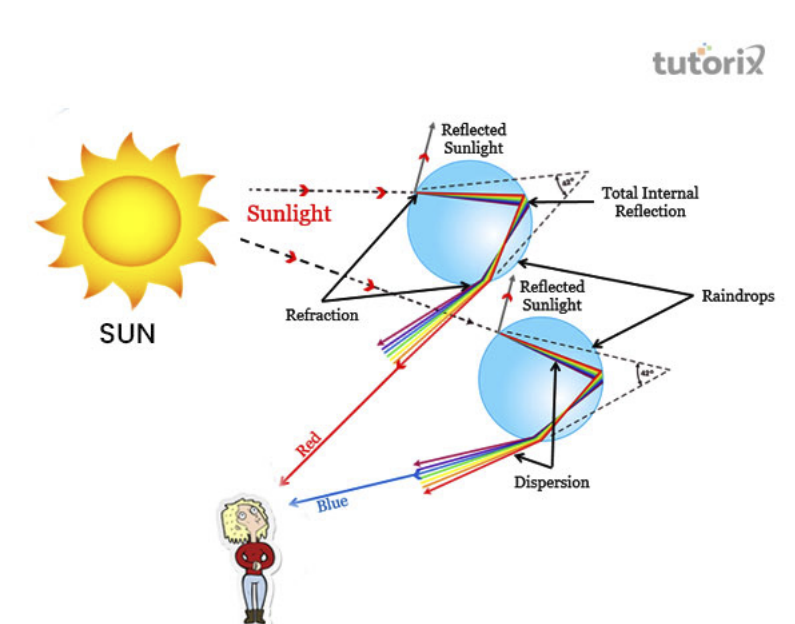


Figure 3: Rainbow formation

Figura 3.21: Figura retirada de <https://www.tutorialspoint.com/rainbow> (consultado em 07/05/2023) na qual consta incorretamente a existência de uma reflexão interna total.

incorre em uma imprecisão nesta parte. Abaixo reproduzimos a pergunta 1 do questionário que eles passaram para professores estagiários sobre o ensino do arco-íris (grifos nossos, a figura 1 deles a qual se referem é análoga à nossa figura 3.15)

“The image opposite (figure 1) aims to explain ‘a minima’ the primary rainbow by describing the path of a ray of white light from the Sun during (one refraction, one **total reflection**, one refraction) and after its interaction with a drop of water. Snell–Descartes’ formulas for refraction and **total reflection** are assumed to be known, as well as the principle of the dependence of the water index on the frequency of the wave. To understand the primary rainbow, what additional explanations do you think are necessary for someone who already knows the formulas for refraction and **total reflection** and the principle of the dependence of the wa-

ter index on the wavelength? Please list (without expanding on them, i.e. by asking questions without solving them) these desirable additional explanations, in descending order of priority, for a first-year university student, regardless of whether you know the answer or not. For each suggested additional information, any comments are welcome. ”

Por que os estudantes e alguns professores são levados a imaginar que há uma reflexão total envolvida na formação do arco-íris? Nós conseguimos pensar em duas coisas, mas uma investigação mais detalhada teria de ser conduzida antes de podermos afirmar algo conclusivamente. Primeiramente, e acreditamos que essa seja a razão principal, ao representarmos apenas raios que refletem na gota, damos a impressão de que não há outros raios presentes - isto é, tudo seria refletido. Ironicamente, um recurso pedagógico que empregamos, de representar apenas os ingredientes essenciais responsáveis pelo fenômeno a ser estudado, recurso em geral de extrema valia no ensino, ao mesmo tempo engendra erros conceituais que não seriam cometidos caso fosse empregada uma representação um pouco mais completa do que ocorre. Há, contudo, também uma segunda razão que nos ocorre, mais sutil porém bem rica conceitualmente. Ela é baseada no fato de que a explicação para o surgimento do arco-íris é deveras complicada. A ideia de que há um máximo no ângulo de espalhamento com respeito ao ângulo de entrada, e que extremos de função reforçam a intensidade percebida é uma ideia na verdade bem sofisticada. Com efeito, embora a humanidade reflita sobre o arco-íris desde a aurora da civilização, até onde sabemos o primeiro a propor a explicação nesta linha foi René Descartes. Na figura 3.22 reproduzimos o desenho original conforme presente em [18]. Se não tivermos a compreensão envolvendo o papel do extremo da função de $\theta_S(\theta_E)$ como poderíamos entender por que a reflexão em certos ângulos seja percebida enquanto em outros ângulos não o é? Uma explicação razoável é a de que em certos ângulos a luz reflete mais! Eis que surge então a reflexão total como candidata natural. Esta é a segunda razão pela qual imaginamos que a confusão conceitual pudesse se colocar.

A discussão anterior, contudo, inaugura uma nova dimensão para o de-

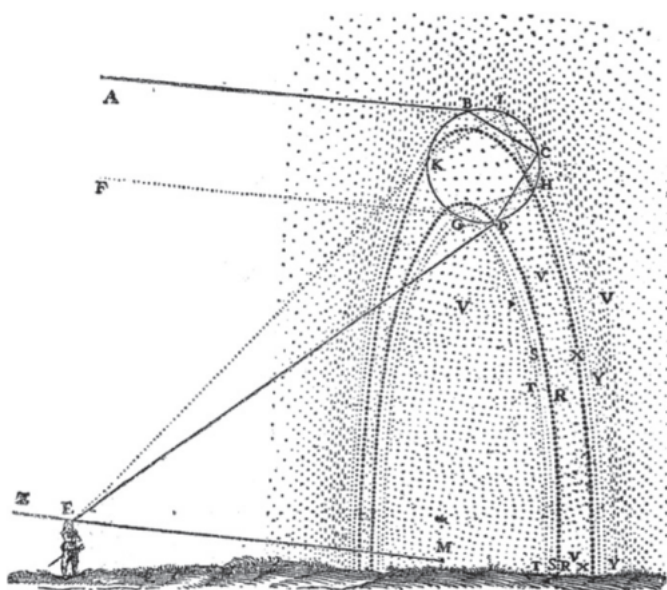


Figura 3.22: Figura retirada de [18], mostrando o esboço original de Descartes para explicar o surgimento do arco-íris.

bate sobre a física do arco-íris. Embora não haja reflexão total possível em uma gota esférica, como demonstramos acima, é verdade que a fração refratada e refletida é uma função do ângulo de incidência, algo que deixamos totalmente de lado em nossa discussão anterior. De fato, esta dependência é facilmente percebida em nosso cotidiano. Ao olharmos para nossos pés dentro de uma piscina - ângulos de incidência próximos da normal, vemos nossos pés com facilidade, testemunhando uma boa intensidade transmitida na interface. Contudo, ao olharmos por ângulos mais próximos à rasante, por exemplo na beira de um lago, vemos muita reflexão. Nossa explicação focou apenas em aspectos geométricos, mas uma análise completa deveria incluir o cálculo da intensidade que chega em nossos olhos como função do ângulo de incidência, a qual é uma combinação de 2 fatores: o geométrico que discutimos, e um dinâmico, que diz a fração da intensidade que é refletida e transmitida. Este último pode ser determinada a partir das equações de Maxwell que rege a dinâmica da interação da luz com a matéria e nos permite obter os chamados coeficientes de Fresnel [9] que quantificam as frações refletidas e transmitidas

como função do ângulo de incidência. Claro que foge ao escopo da discussão em sala de aula discutir os coeficientes de Fresnel, mas acreditamos que seja interessante ao final de uma aula sobre arco-íris chamar atenção dos estudantes de que deixamos de fora de nossa modelagem esta discussão dinâmica. Isto suscita um debate rico relativo à prática de fazer ciência. Há sempre inúmeros aspectos que acabamos não cobrindo. Porém uma vez que fizemos um modelo que prevê quantitativamente o ângulo onde vemos o arco-íris em nosso cotidiano, a comparação modelo-experimento já nos permite esperar que esta correção dinâmica não afete substancialmente nosso resultado. De qualquer forma, de posse dos coeficientes de Fresnel é possível calcularmos a intensidade como função do ângulo de entrada, contemplando tanto aspectos geométricos quanto dinâmicos. Isto foi recentemente feito em um artigo de ensino [19] e de fato a correção dinâmica é bem menor do que o efeito geométrico que trabalhamos. Recomendamos a leitura deste artigo pois aprofunda diversos tópicos cobertos neste capítulo, analisando, por exemplo, gotas não esféricas. Na figura 3.23 reproduzimos o gráfico da intensidade levando em conta os aspectos dinâmicos e geométricos.

Com o que desenvolvemos até aqui vimos como podemos qualitativamente entender o surgimento do arco-íris. Vimos também que calculadoras gráficas permitem que obtenhamos quantitativamente o ângulo no qual cada cor será vista. Podemos obter matematicamente este ângulo ao buscar o máximo valor possível para θ_S na expressão (3.4). Uma forma de fazê-lo é empregando técnicas de cálculo diferencial, afastando a possibilidade dos alunos no ensino médio. Veremos na próxima seção que é possível descobrir o ponto de máximo sem a necessidade de empregar cálculo diferencial.

3.4.3 Obtenção analítica do ângulo do arco-íris

Como foi visto na subseção anterior, a equação (3.4) contém parte essencial da física para compreender a formação do arco-íris. Vimos que calculadoras gráficas permitem que exploremos esta equação com os números de interesse (índice de refração da água para as frequências do visível) para perceber que há um pequeno intervalo do ângulo de saída, dependente da

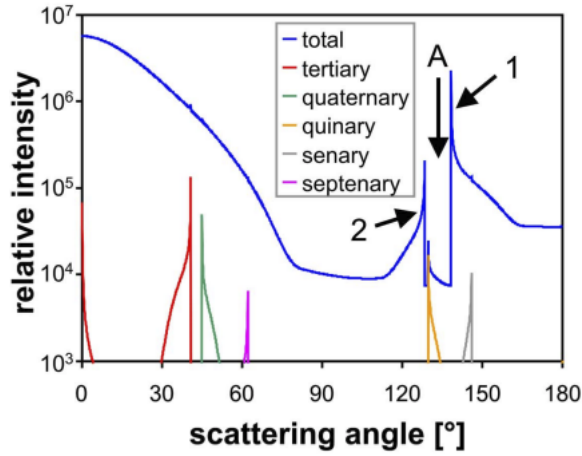


Figura 3.23: Figura retirada de [19]. A seta 1 aponta o arco-íris primário que discutimos nesta seção. Note que há um pico intenso na intensidade total (em azul) em ângulos da ordem dos que obtivemos nesta seção (o ângulo de espalhamento usado pelo autor é $\pi - \theta_S$). A seta 2, bem como as linhas de outras cores se referem à arcos-íris de ordem superior que discutiremos mais para a frente neste capítulo.

frequência, que concentra boa parte da luz que entra na gota. É interessante complementarmos a discussão mais qualitativa com uma análise mais geral da equação (3.4). Isto nos permitirá responder a perguntas como: há um máximo para qualquer n ? Qual o ângulo em que vemos o arco-íris como função de $n(\omega)$? Para respondermos a estas perguntas, serão utilizados alguns conceitos de cálculo infinitesimal, porém sem de fato utilizar as aplicações diretas de limite e derivada. Essa é uma demonstração que pode ser dada em sala de aula até mesmo para nível médio, na mesma linha do que fizemos no capítulo anterior para a demonstração da lei de Snell. Partindo da equação 3.2, é possível considerar, analisando as figuras 3.18 e 3.19, que no ponto máximo do gráfico, uma pequena variação no ângulo de entrada θ_E praticamente não altera o valor do ângulo de saída θ_S . Ou seja, nesse ponto, pode se considerar para essa situação que $\Delta\theta_S = 0$. Com a aplicação deste conceito, utilizando como base a equação 3.2, chegamos em

$$2\Delta\alpha = \Delta\theta_E, \quad (3.5)$$

na qual α é dada na equação (3.3). Trabalhar com pequenas variações do arco seno não é muito acessível para alunos do ensino médio, mas podemos extrair tudo o que precisamos trabalhando diretamente com o $\sin \alpha$. Considerando que uma variação muito pequena $\Delta\theta_E$ no ângulo de entrada θ_E também vai ocasionar uma pequena variação $\Delta\alpha$ no ângulo refratado α , temos que

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \Delta\alpha) &= \frac{\sin(\theta_E + \Delta\theta_E)}{n} \Rightarrow \\ \sin \alpha \cdot \cos \Delta\alpha + \sin \Delta\alpha \cdot \cos \alpha &= \frac{\sin \theta_E \cdot \cos \Delta\theta_E + \sin \Delta\theta_E \cdot \cos \theta_E}{n}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Como é mostrado no Apêndice A, para ângulos muito pequenos podemos fazer a aproximação $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$ e que $\cos \theta \approx 1$. Aplicando-se essas aproximações, chega-se à equação

$$\cos \alpha \Delta\alpha = \frac{\Delta\theta_E \cos \theta_E}{n}, \quad (3.7)$$

na qual usamos a equação (3.3). Substituindo a condição que havíamos obtido para o máximo, dado na equação (3.5) na última equação obtemos

$$\cos \theta_E = \frac{n \cos \alpha}{2}. \quad (3.8)$$

A expressão acima já é a relação desejada. O ângulo θ_E que satisfaz à condição acima é o ângulo de entrada para o qual o ângulo de espalhamento é máximo. O mais conveniente é expressá-lo diretamente em termos do índice de refração, o que pode ser feito empregando novamente a equação (3.3). Para tanto basta escrevermos $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_E / n^2} = \sqrt{1 - (1 - \cos^2 \theta_E) / n^2}$. Substituindo esta relação em (3.8) e isolando $\cos \theta_E$ obtemos

$$\theta_E = \arccos \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}}. \quad (3.9)$$

Pela expressão acima vemos que θ_E está bem definido apenas para $1 \leq n \leq 2$. Para o caso em que estamos sobretudo interessados, luz visível incidindo a partir do ar em gotas de água este é o caso. Mas nossos resultados

são mais gerais do que isso, e uma das vantagens do tratamento analítico é justamente não ficarmos reféns dos números empregados em calculadoras gráficas. Vemos que quando a luz vai de um meio mais refringente para um menos refringente não é possível a formação de arco-íris. Isso poderia ser visto diretamente a partir das expressões (3.3) e (3.8). Para $n < 1$, θ_E deveria ter um seno e um cosseno menor do que α , algo impossível. Da mesma forma, para $n > 2$ o oposto, igualmente impossível, deveria ser verdade. Mesmo para n menor mas próximo de 2 já esperamos que seja difícil observar o arco-íris já que θ_E fica próximo de 90 graus, uma região onde há muita reflexão e pouca refração. Para $n > 2$ é até possível a formação do arco-íris desde que haja mais reflexões, como veremos na próxima seção. De qualquer forma, casos nos quais o índice de refração relativo é muito alto envolve muita reflexão o que por si só torna o efeito de formação do arco-íris bem fraco. Voltemos ao nosso caso central de interesse.

Substituindo o índice de refração da luz vermelha ($n_{\text{verm}} = 1,33141$) e da luz violeta ($n_{\text{viol}} = 1,34451$) (os extremos do espectro visível) na água na equação 3.9, se obtém os ângulos de entrada correspondem ao ângulo máximo de saída para cada cor, dados por

$$\theta_{E,\text{verm}} \approx 59,5^\circ (\text{Vermelho}) \quad (3.10)$$

e

$$\theta_{E,\text{viol}} \approx 58,7^\circ (\text{Violeta}) . \quad (3.11)$$

Substituindo esses valores dos ângulos de entrada na equação 3.4, se chegam aos seguintes valores para os máximos ângulos de saída do vermelho e do violeta.

$$\theta_{S,\text{verm}} \approx 42^\circ (\text{Vermelho}) \quad (3.12)$$

e

$$\theta_{S,\text{viol}} \approx 40^\circ (\text{Violeta}) . \quad (3.13)$$

O resultado encontrado confirma que os valores encontrados pela resolução algébrica são coerentes com os gráficos plotados pelo *Geogebra*.

3.4.4 Arcos-íris de ordens superiores e a faixa escura de Alexander

Arco-íris secundário

A discussão contida nas seções anteriores contém os ingredientes principais para a compreensão do arco-íris e constituem os resultados principais deste capítulo. Contudo, em nosso cotidiano observamos arcos-íris que não encontram sua explicação completa no que vimos até o momento. Na figura 3.8, por exemplo, além da formação do arco-íris principal, também chamado de primário, é possível ver a formação de um outro arco-íris mais externo e menos intenso, também denominado de arco-íris secundário. Esta formação se dá através dos feixes de luz que sofrem duas reflexões dentro das gotículas antes de serem refratados para o meio externo novamente, como mostrado na figura 3.24.

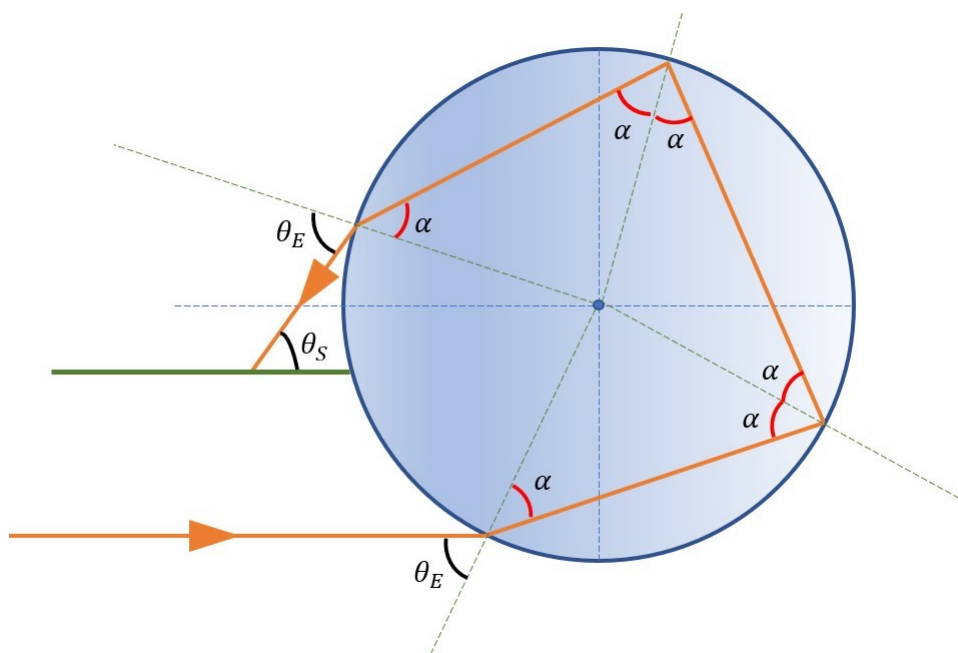


Figura 3.24: Representação dos feixes de luz que formam um arco-íris secundário

A razão dele ser menos intenso é que a cada incidência na gotícula, a intensidade da luz que permanece aprisionada por reflexão vai diminuindo,

pois parte da energia é também refratada. Já para entender o motivo dele ser mais externo, é necessário, de forma similar ao que foi feito no arco-íris primário, se obter uma equação que coloca o ângulo de saída em função do ângulo de entrada na gotícula. Para tanto, podemos fazer uma análise geométrica semelhante à anterior. Note que desta vez a normal após as duas reflexões roda por um ângulo $\pi - 6\alpha$. O raio de luz gira adicionalmente $2\theta_E$ com relação ao ângulo pelo qual a retar normal é girada. Desta forma, obtemos para θ_S a expressão

$$\theta_S = \pi - 6 \arcsen\left(\frac{\text{sen } \theta_E}{n}\right) + 2\theta_E. \quad (3.14)$$

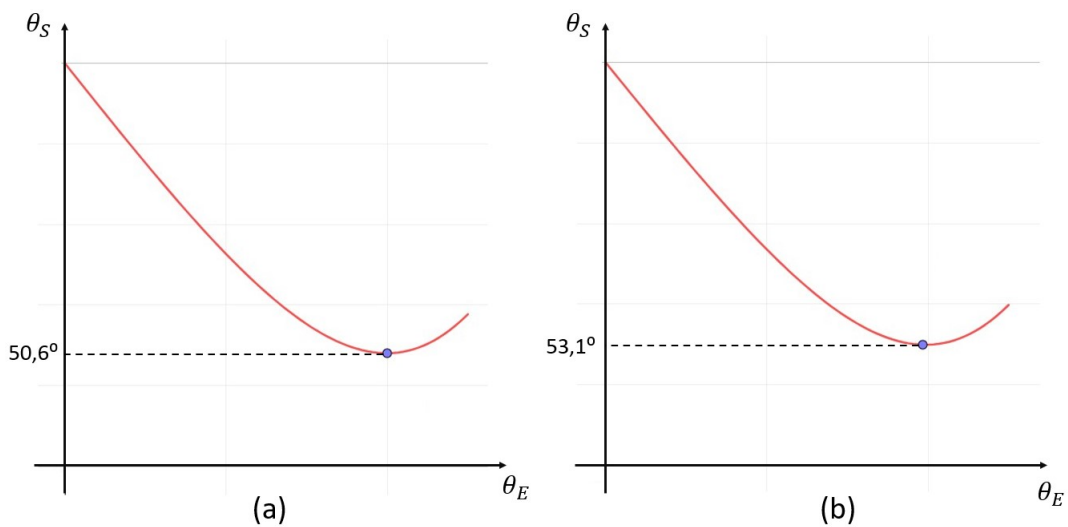


Figura 3.25: Gráfico θ_S x θ_E do arco-íris secundário para a luz: (a) vermelha (b) violeta.

Colocando essa equação no *Geogebra* se obtém em quais ângulos há maior concentração de feixes de luz na saída da gotícula. A figura 3.25 (a) mostra essa situação para a cor vermelha ($n = 1,33141$) enquanto a figura 3.25 (b) mostra para a cor violeta ($n = 1,34451$). Visualiza-se nessas figuras que a concentração máxima da saída dos feixes de luz das gotículas se encontram $50,3^\circ$ para a cor vermelha e $51,6^\circ$ para a cor violeta. Comparando estes valores com os obtidos para o arco-íris primário, dados no intervalo cujos

extremos estão nas equações (3.12) e (3.13), vemos que o arco-íris secundário é mais externo do que o primário, como de fato observado na figura 3.8. Isto explica ainda o motivo das cores serem invertidas.

A faixa escura de Alexander



Figura 3.26: Faixa Escura de Alexander entre os arcos-íris primário e secundário.

Observemos a figura 3.26. Além da presença do arco-íris primário e do secundário podemos perceber que a região entre os dois é nitidamente mais escura do que as demais. Esta região é conhecida como faixa escura de Alexander, e sua física já está na verdade contemplada nos resultados que obtivemos anteriormente. Para tanto, coloquemos no mesmo gráfico os ângulos de saída como função do ângulo de entrada para os raios que sofrem uma ou duas reflexões na gota. Destacamos que na figura o sol está atrás do observador, donde raios que refratam na gota sem reflexão não contribuem para a imagem mostrada (voltaremos a estes raios na próxima seção). No gráfico 3.27 observamos a existência de um máximo para θ_S no ramo correspondente a uma só reflexão. Vimos que é neste ângulo que se forma o arco relativo a esta cor. Contudo, para todos os ângulos abaixo do ângulo máximo θ_S está também saindo algum raio, incidente com algum θ_E . Isto explica por que abaixo do arco-íris primário (ângulos menores do que o ângulo θ_S máximo, está claro. Note, inclusive, que quanto mais próximo ao máximo mais

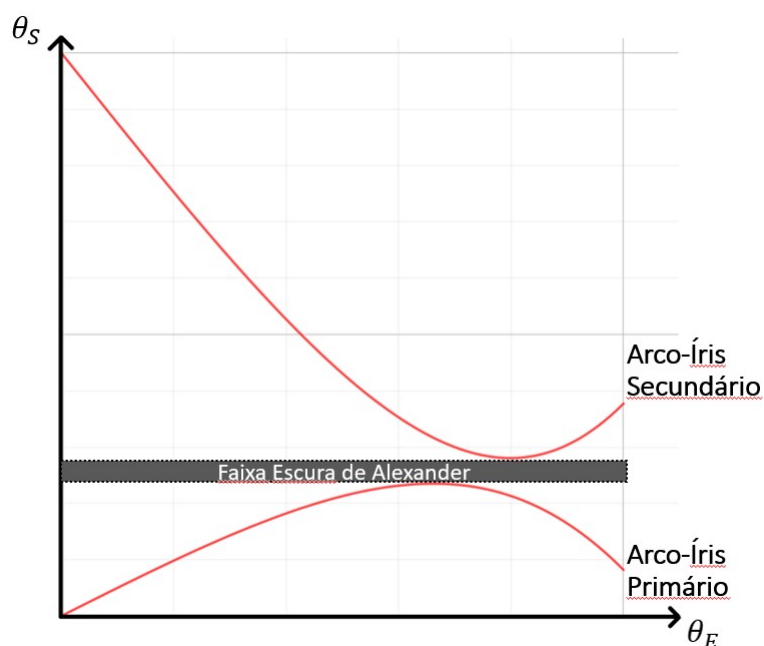


Figura 3.27: Gráfico θ_S x θ_E dos arcos-íris primário e secundário para a luz vermelha indicando onde se encontra a Faixa Escura de Alexander. O ramo inferior se refere ao θ_S resultante quando há apenas uma reflexão na gota, enquanto o superior ao caso de duas reflexões.

claro é o céu, uma vez que há uma concentração maior de raios saindo nesta região. Contudo, fora do máximo está concentração maior não é suficiente para que a reflexão e refrações na gota privilegie uma cor e predomina o azul usualmente reinante por ser mais espalhado (discutiremos o azul do céu no próximo capítulo). De forma análoga, vemos no gráfico 3.26 que para ângulos maiores do que o mínimo de θ_S do ramo correspondente aos raios que sofrem duas reflexões na gota também há luz saindo. Todavia, entre o máximo do ramo de baixo e o mínimo do ramo superior no gráfico 3.26 não há nenhum raio. Em outras palavras, qualquer que seja o ângulo de entrada de um raio de luz na gota de água, ou ele sairá com ângulo igual ou inferior ao máximo do θ_S do ramo inferior, no caso em que sofra apenas uma reflexão, ou sairá com um ângulo igual ou superior ao máximo do ramo superior, caso sofra duas reflexões. Por esta razão a região entre o arco-íris primário e o secundário é mais escura do que as demais. Dois comentários são aqui pertinentes.

Primeiramente, a região acima do arco-íris é mais escura do que a abaixo do arco-íris primário. Isto é uma consequência de raios sofrendo duas reflexões serem menos intensos do que os que saem após apenas uma reflexão, já que há energia perdida a cada reflexão, tanto por uma pequena absorção quanto sobretudo pela parte transmitida por refração. Por fim, destacamos que a zona escura de Alexander não é totalmente escura pois a gota de água não é a única responsável por direcionar raios solares para nossos olhos. Todas as moléculas da atmosfera espalham a luz para nós olhos, como testemunha o céu a nossa volta diariamente. Contudo, nas condições nubladas presentes na figura 3.26, comum em situações nas quais percebemos o arco-íris a contribuição que não decorre das gotas é menos intensa e na ausência do arco-íris veríamos um céu bem cinzento.

Antes de encerramos esta discussão, gostaríamos de destacar que a existência de zonas escuras, constituindo pontos cegos, em fenômenos de óptica geométrica está presente em diversas situações de nosso cotidiano. Por exemplo, são responsáveis pela recorrente observação de que peixes nadando em aquários curiosamente parecem desaparecer em certos momentos. A física envolvida é semelhante à apresentada acima. Remetemos o leitor interessado à referência [20]. Para mais exemplos e uma discussão bem detalhada conferir a dissertação [21].

Arcos-íris de ordens superiores

A discussão que fizemos até aqui dá conta de boa parte do que conseguimos na prática observar do fenômeno do arco-íris. Contudo, a análise que fizemos pode ser generalizada para o caso com n reflexões internas. Novamente, tudo o que devemos fazer é obter o ângulo de saída como função do ângulo de entrada e buscar por valores extremos desta função. Na figura 3.28 estão ilustrados os raios que dão origem aos arcos-íris de terceira até sexta ordem, no qual a n -ésima ordem é caracterizada por haver n reflexões internas do raio de luz dentro da gota antes de refratar novamente para o ar. Note que os arcos de terceira e de quarta ordem são recebidos por observadores que estejam virados para o sol, e não com o sol atrás de si, como era

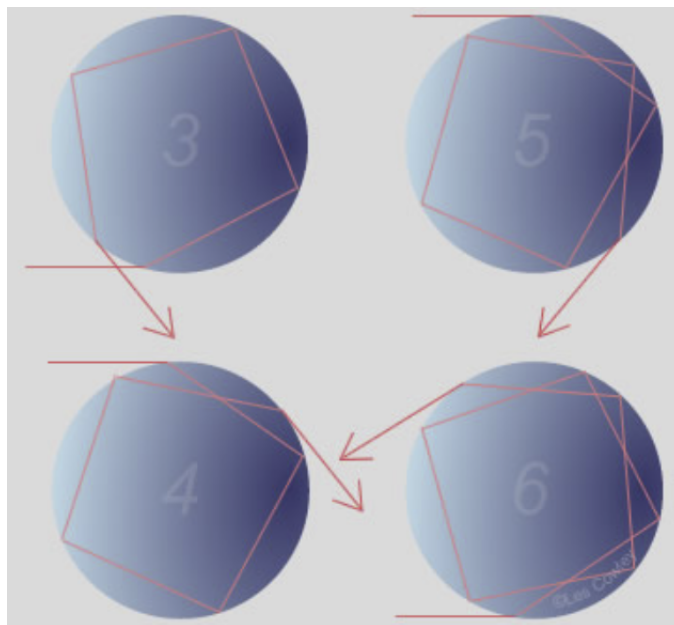


Figura 3.28: Figura retirada de <https://atoptics.co.uk/rainbows/orders.htm> (consultado em 04/06/2023) na qual temos os raios responsáveis pelos arcos-íris de terceira até sexta ordem.

o caso no arco-íris primário e secundário. Assim, além destes arcos serem muito menos intensos devido ao grande número de reflexões internas, eles ainda disputam com a claridade do próprio sol, dificultando enormemente a possibilidade de os visualizarmos. No entanto, recentemente (2011!) eles foram observados, conforme testemunha a figura 3.29. Para tanto, os autores contaram com condições climáticas bem favoráveis, em um dia com já pouca luminosidade e posicionaram a câmera de tal forma que o sol estivesse oculto atrás de uma árvore para atrapalhar menos. Além disso, realizaram uma imagem com longo tempo de exposição e necessitaram posteriormente tratar a imagem para que efetivamente conseguissem ver o arco-íris de terceira ordem [22]. Pouco tempo depois, o arco-íris de quarta ordem foi observado [23] e em seguida o de quinta ordem [24].

Com uma matemática rigorosamente análoga a que desenvolvemos neste capítulo, podemos calcular as posições no céu onde serão observados os arco-íris de qualquer ordem [25]. Para tanto, pode-se generalizar a expressão (3.2) para k reflexões internas, obtendo-se $\theta_S^{(k)} = (k - 1)\pi - 2\theta_E + 2(k + 1)\alpha$, com

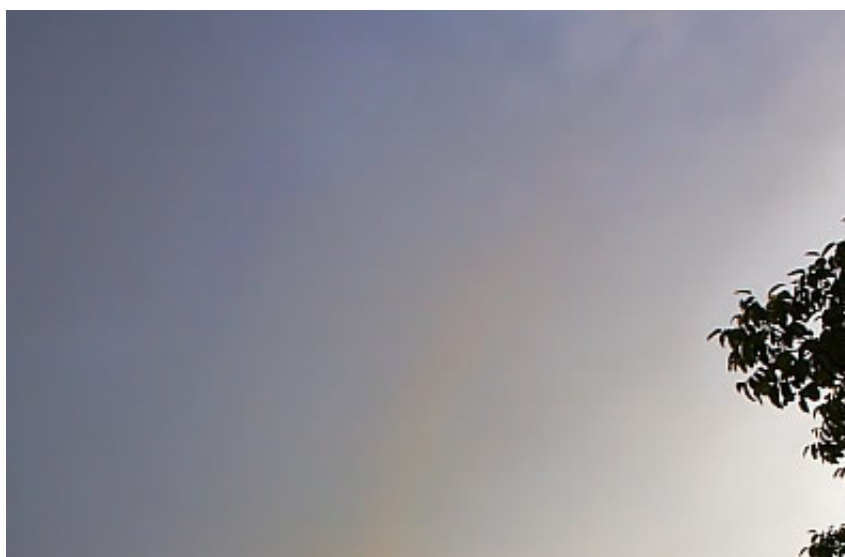
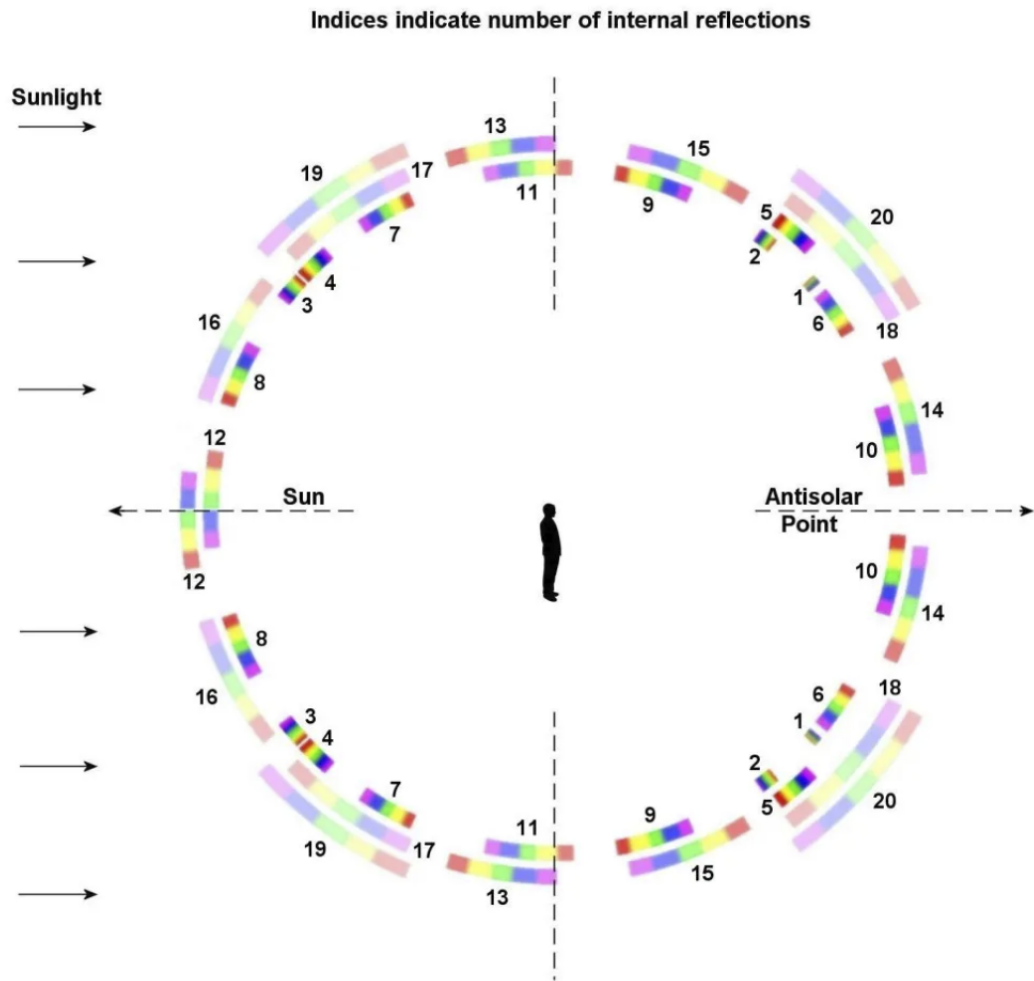


Figura 3.29: Figura retirada de [22] contendo o arco-íris de terceira ordem.

α dado na equação (3.3). Ao extremizarmos esta função para as diferentes cores do visível, podemos obter a imagem disposta na figura 3.30, contendo a posição que cada cor ocupa no espaço até o arco-íris envolvendo 20 reflexões internas. Note que quando maior a ordem do arco-íris maior a região angular que ele ocupa, o que decorre do fato que quanto mais reflexões ocorrem na gota tanto mais espaço as cores têm para se afastarem.



© The Oikofuge, 2020 (inspired by Jearl Walker, 1977)

Figura 3.30: Figura retirada de <https://oikofuge.com/tertiary-rainbows/> (consultado em 04/06/2023) na qual vemos as posições ocupadas no céu por arcos-íris até a vigésima ordem.

3.5 Arcos-íris de ordem zero e halos solares

Na seção anterior discutimos arcos-íris de ordens superiores e vimos que até mesmo arcos-íris que são vistos em direções a favor do sol puderam ser recentemente fotografados, como os arcos-íris de terceira e de quarta ordem. Mas nada dissemos sobre os arcos-íris de ordem zero, isto é, sobre o caso no qual não há nenhuma reflexão interna dentro da gota e, portanto, o raio

deixa diretamente a gota após duas refrações. A figura 3.31 ilustra esta situação. Note que, assim como os raios de ordem 3 e 4 discutidos na seção

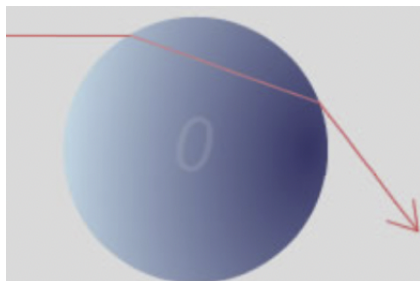


Figura 3.31: Figura retirada de <https://atoptics.co.uk/rainbows/orders.htm> (consultado em 04/06/2023) na qual temos um exemplo de raio que sai da gota de água sem sofrer nenhuma reflexão.

anterior, estes raios atingem observadores que estão virados para o sol, e não contra o sol como nos casos usuais dos arcos-íris primários e secundários. Curiosamente, discussões sobre tal arco-íris remontam ao próprio trabalho de Isaac Newton que em seu livro sobre óptica disse que haveria um arco-íris de ordem zero próximo ao valor de 26° da direção do sol, e muitos acreditavam que tal arco-íris não era observado apenas pelo fato da luz vir de uma direção muito próxima a da própria luz direta do sol, a qual não permitiria contraste o suficiente para a observação do fenômeno do arco-íris de ordem zero [26]. Contudo, tal arco-íris não foi visto pela simples razão de que não existe! E isto pode ser rapidamente demonstrado pela mesma matemática que desenvolvemos neste capítulo. Aqui a geometria é inclusive mais direta do que a que abordamos. Como é mostrado na figura 3.32, para um dado ângulo de entrada θ_E , o feixe refratado sai da gota em uma direção que faz um ângulo θ_S com a direção original dado por

$$\theta_S = 2\theta_E - 2\alpha, \quad (3.15)$$

no qual α é dado na equação (3.3). Podemos seguir de modo análogo ao que fizemos na análise gráfica que apresentamos na seção 3.4.2 e fazer o gráfico $\theta_S \times \theta_E$ para valores escolhidos para o índice de refração n , como é ilustrado na figura 3.33. Ao realizarmos o gráfico para os valores do n no

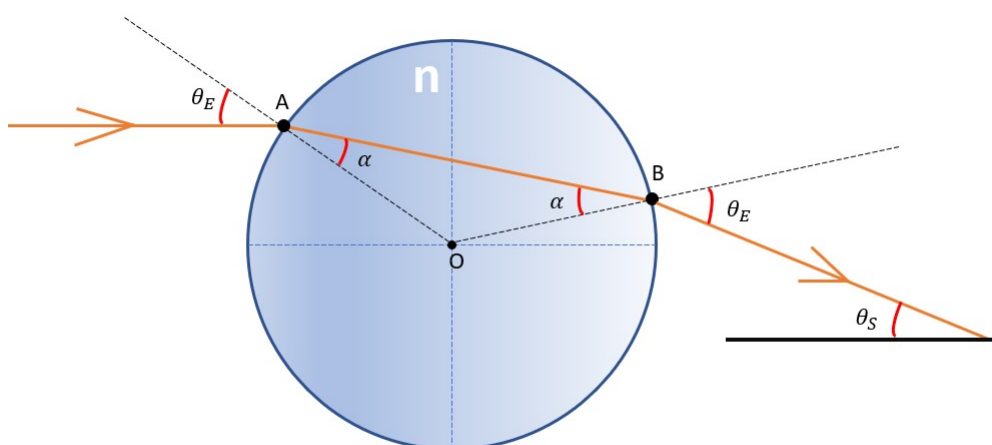


Figura 3.32: Feixe de luz que sai da gotícula sem sofrer nenhuma reflexão.

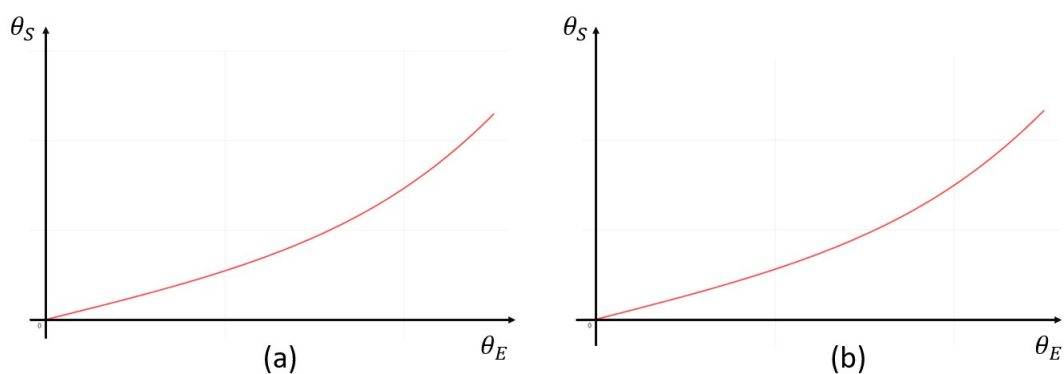


Figura 3.33: Gráfico θ_S x θ_E para o feixe que não faz nenhuma reflexão na gotícula para a luz: (a) vermelha (b) violeta.

visível vemos que, diferentemente do que havia ocorrido para o caso com reflexões este gráfico não apresenta valores extremos! O ângulo de saída cresce monotonicamente como função do ângulo de entrada. Isto significa que não há nenhuma direção para a qual há um reforço da intensidade da luz para uma dada cor. Desta forma, não há sequer o arco! Ao olharmos próximo a direção em que o sol está há um contínuo ângulos para o qual há luz de cada

cor vindo para nossos olhos, porém não há nenhum ângulo para o qual uma dada cor se destaque proeminentemente. Em outras palavras, não há arco-íris de ordem zero. Podemos, inclusive, demonstrar analiticamente que isto vale para qualquer índice de refração seguindo os passos que apresentamos na seção 3.4.3. Ao trocarmos a relação (3.2) pela relação de zero reflexões, dada na equação (3.15), obtemos que a posição de um eventual extremo da função $\theta_S(\theta_E)$ neste nosso caso satisfaria

$$\Delta\alpha = \Delta\theta_E, \quad (3.16)$$

em vez da condição (3.5) que havíamos obtido anteriormente. Seguindo cálculos inteiramente análogos vemos que, caso existisse, o arco-íris de ordem zero deveria satisfazer à condição

$$\cos\theta_E = n \cos\alpha. \quad (3.17)$$

Ora, mas a lei de Snell nos impõe $\sin\theta_E = n \sin\alpha$, a qual combinada com a equação que obtivemos acima nos leva a $\cos^2\theta_E + \sin^2\theta_E = n^2$, a qual possui solução apenas para $n = 1$ - situação na qual sequer teríamos refração para começar... Portanto, não há arco-íris de ordem zero.

Antes de encerrar este capítulo, observe a fotografia 3.34 tirada no ártico canadense. Neste caso, a câmera está de frente para o sol, que está no centro do círculo que podemos observar. Na figura 3.35 vemos mais uma foto do mesmo fenômeno, onde há um avermelhado bem nítido. Estes fenômenos são conhecidos como halos solares, palavra derivada do grego, onde *halo* significa disco. Ingenuamente, poderíamos pensar estar diante de um arco-íris de ordem zero, o que já sabemos não ser possível. Há diferenças notáveis em relação aos arcos-íris que estudamos. Em especial, o brilho intenso lateral do disco que se observa nos pontos que estão na mesma altura do sol na figura 3.34. Cada região brilhante é conhecida como um parélio, cuja etimologia vem também do grego e significa um *falso sol*. Destaca-se também a maior dificuldade em se observar cores do que no fenômeno do arco-íris. Contudo, há pontos em comum igualmente notáveis. Para começar, o fato de surgir



Figura 3.34: Figura retirada de <https://atoptics.co.uk/halo/22photos.htm> (consultado em 04/06/2023) na qual podemos observar o fenômeno do halo solar.

um círculo em volta do sol e também a presença da dispersão luminosa. De fato, o mecanismo físico aqui é rigorosamente o mesmo, contudo o agente dispersor não são gotas de água, mas sim cristais de gelo! Devido ao arranjo microscópico ordenado característico dos cristais, o gelo se apresenta em diferentes formas hexagonais, como ilustrado na figura 3.36 porém sempre o ângulo entre suas faces é o mesmo de 60° . Nas fotografias que colocamos lidamos com halos solares, mas há halos também lunares e em volta de outras fontes luminosas. Poderíamos realizar um estudo cuidadoso dos halos atmosféricos de uma forma inteiramente análoga a que fizemos, porém em vez da geometria esférica da gota líquida de água teríamos agora de realizar nossa análise para a geometria do cristal de gelo, como indicado na figura 3.37. Ao analisarmos o ângulo de saída como função do ângulo de entrada, veríamos que mesmo os raios que não sofrem nenhuma reflexão apresentam um ângulo de saída que extremiza a função obtida, ângulo este que define o ângulo no qual observamos o halo na atmosfera. Como não há reflexão, as



Figura 3.35: Figura retirada de <https://atoptics.co.uk/halo/22photos.htm> (consultado em 04/06/2023). Mais uma foto de um halo solar, com sua cor avermelhada característica.

cores têm menos espaço para se afastarem e por isto é mais difícil observar a dispersão cromática. A rica geometria do cristal e diferentes orientações do cristal na atmosfera possibilita a diversidade da fenomenologia presente na figura 3.36 quando comparada ao que estudamos do arco-íris, incluindo os parélios. Foge ao propósito desta dissertação aprofundar a discussão sobre os halos, e os trouxemos aqui apenas para destacar que o procedimento que apresentamos neste capítulo pode ser explorado para outros fenômenos ópticos além do arco-íris.

Apesar da miríade de fenômenos que a óptica geométrica é capaz de explicar, como testemunhado neste capítulo e no anterior, há outros fenômenos atmosféricos que ela é incapaz de descrever, com especial destaque para a própria cor do céu durante o dia. O próprio arco-íris, quando observado minuciosamente, apresenta feições que escapam à óptica geométrica. No

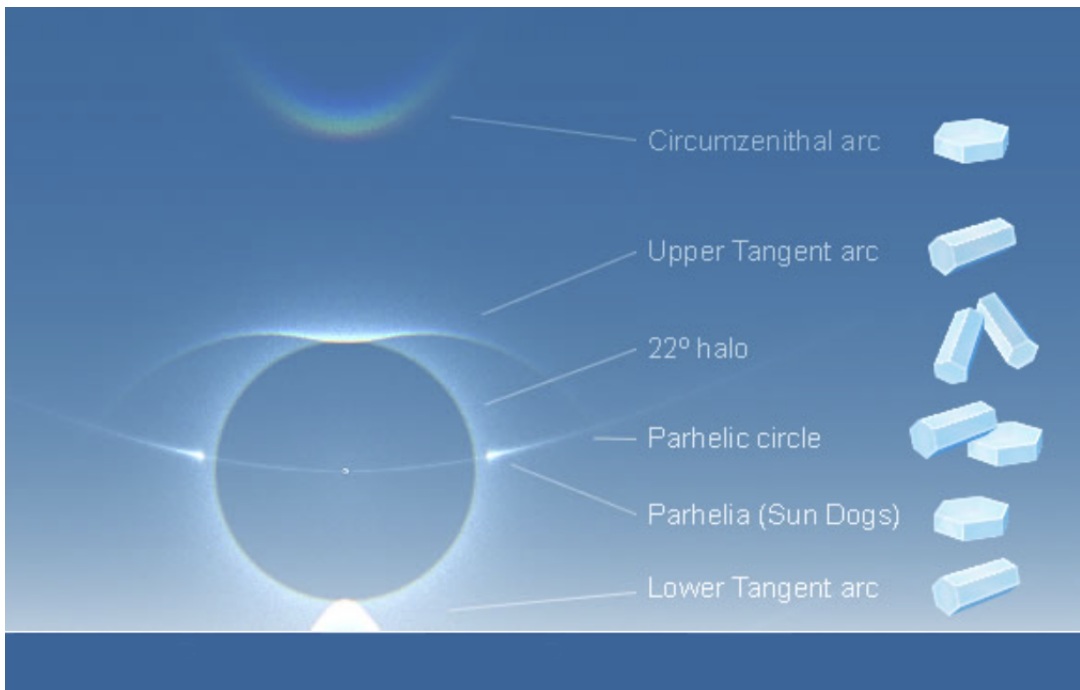


Figura 3.36: Figura retirada de <https://atoptics.co.uk/halo/common.htm> (consultado em 04/06/2023) apresentando as principais características do halo com seus respectivos nomes em inglês, bem como diferentes formatos dos cristais de gelo responsáveis pelo fenômeno.

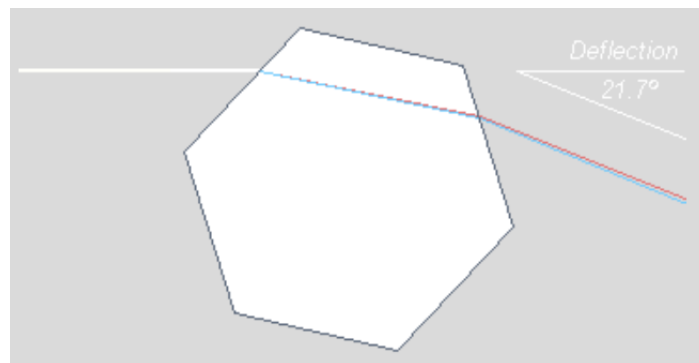


Figura 3.37: Figura retirada de <https://atoptics.co.uk/halo/common.htm> (consultado em 04/06/2023) apresentando o caminho seguido por um raio de luz solar ao incidir em um cristal de gelo e sair sem sofrer nenhuma reflexão. Devido à dispersão, diferentes cores saem em ângulos diferentes.

próximo capítulo investigaremos estes aspectos em mais detalhes.

Capítulo 4

Óptica ondulatória

Em todas as situações vistas até o momento neste trabalho, vimos que a geometria é suficiente para explicar os fenômenos ópticos, já que o Princípio de Fermat fornece uma descrição satisfatória para nossa compreensão fenomenológica. No entanto, ainda analisando a formação dos arcos-íris, há situações em que se observa uma alternância entre partes com cores e sem cores, como é visto na figura 4.1. Esse fenômeno atmosférico é chamado de supernumerária. Fugindo um pouco dos fenômenos atmosféricos e analisando uma pequena lâmina ao ser colocada contra a luz, como mostrado na figura 4.2 é possível ver a luz se "estilhaçando" e formando regiões alternadamente iluminadas e escuras, mas sem um padrão claramente definido. Obtemos outro exemplo, este bem cotidiano, ao se iluminar a parte refletiva de um CD com uma lâmpada branca ou com luz solar. Conforme ilustrado na figura 4.3 se forma um padrão de cores similar ao do arco-íris, mas sem um ordenamento padronizado.

É possível explicar todas essas situações vistas nesse início de capítulo pela óptica geométrica? A óptica geométrica teve grandes complicações para explicar alguns fenômenos, como os supracitados. O caso do CD é bem emblemático. Vimos em nosso estudo do arco-íris que as cores advêm da refração na gota, uma vez que o índice de refração é dependente da cor. Contudo, a lei da reflexão não discrimina cores - todas devem refletir apresentando o mesmo ângulo de reflexão do que o de incidência, donde reflexão não pode



Figura 4.1: Supernumerária em um arco-íris. Figura retirada de <https://atoptics.co.uk/rainbows/supers.htm> (consultado em 08/05/2023).

dar conta sozinha do padrão colorido oferecido pelo CD. Do ponto de vista pedagógico, este ponto subsidia uma rica discussão em sala de aula. Com o conhecimento atual e com o tempo curto para cobrir o conteúdo, somos impelidos a expor as cores vistas no CD diretamente como um fenômeno de interferência. Contudo, achamos válido levantar o seguinte debate - com o que fizemos nos capítulos anteriores conseguimos explicar tantos fenômenos, com inúmeras sutilezas como no caso do arco-íris e dos halos solares, das miragens, etc. Será que as leis da óptica geométrica são de fato *incapazes* de explicar as cores do CD, por exemplo? Poderíamos qualitativamente tentar explicar as cores neste fenômeno ao imaginarmos que a película do CD envolveria transmissão seguida de reflexão em alguma outra camada da película do CD, para que a refração pudesse separar as cores. Porém, tal película deveria ser extremamente irregular para que as cores viessem de forma tão distinta do que observamos no arco-íris. Poderia ser esta a explicação para as cores do CD, ou teremos de usar uma física nova?

De uma maneira mais geral, defendemos que a transição da óptica geométrica para óptica ondulatória é um momento especial na aprendizagem de física onde se há uma rica possibilidade para se discutir com os estudantes o próprio *fazer ciência*. De fato, embora CDs não estivessem presentes na época do Newton, o mesmo estava familiarizado com o fenômeno da difração. Por exemplo, os anéis vistos na figura 4.4 são conhecidos hoje como anéis de

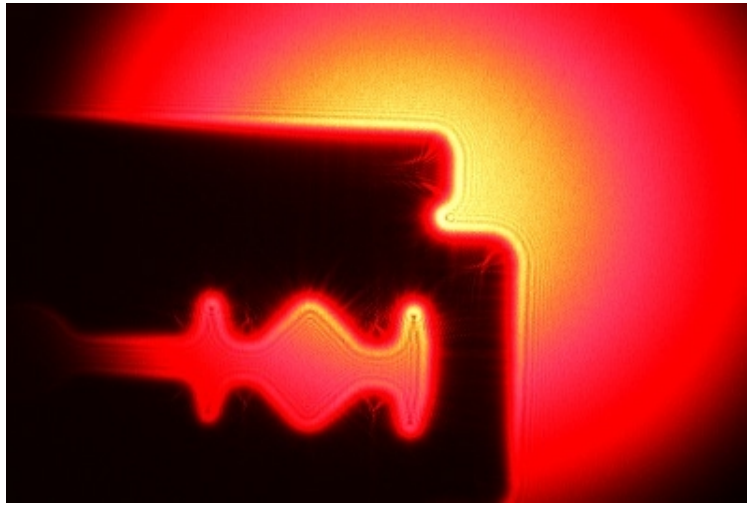


Figura 4.2: Difração ocorrendo em uma pequena lâmina. Figura retirada de <https://sciencedemonstrations.fas.harvard.edu/presentations/edge-diffraction> (consultado em 02/04/2023).

Newton em referência aos trabalhos newtonianos no campo da óptica. Newton propôs mecanismos criativos que seriam capazes de explicar fenômenos como os ilustrados nas figuras 4.2 e 4.4 mas ainda se baseando em uma teoria essencialmente corpuscular para a luz. Foge aos nossos propósitos pormenorizar esta entranhada discussão histórica e remetemos o leitor curioso para a referência [27]. O ponto que desejamos enfatizar é que durante a evolução da ciência formulações distintas e por vezes conflitantes coexistem. Hoje em dia é um consenso que todos os fenômenos mencionados nesta introdução ao capítulo de óptica ondulatória não são possíveis de ser explicados em uma visão puramente geométrica para a propagação da luz. Ao tratarmos a luz como onda, por outro lado, conseguimos não apenas uma explicação qualitativa como também uma descrição quantitativa bem satisfatória. Nosso objetivo neste capítulo será motivar a transição da óptica geométrica para a ondulatória e discutir porque a óptica geométrica foi capaz de fornecer resultados tão satisfatórios para os fenômenos investigados no capítulo anterior.



Figura 4.3: Um *CD* apresentando diferentes cores a depender da direção em que o olhamos. Figura retirada de <https://en.wikipedia.org/wiki/Iridescence> (consultado em 02/04/2023).

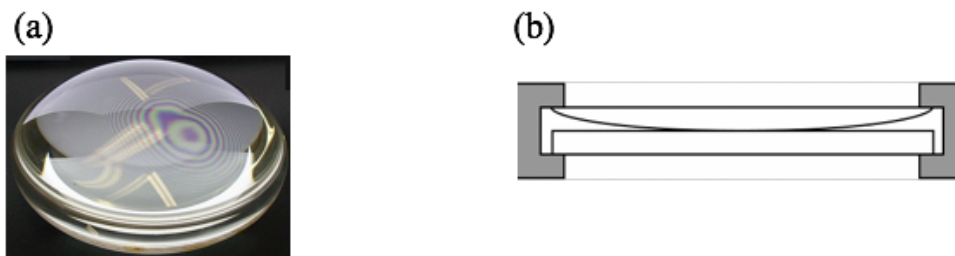


Figura 4.4: (a) Exemplo do fenômeno óptico cujos anéis são conhecidos como anéis de Newton. Em (b) temos o aparato envolvido - uma lente convexa acima de uma interface plana. Figura retirada de https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_rings (consultado em 08/06/2023).

4.1 O Experimento de Young

O experimento de Young, ou experimento da dupla fenda, foi uma das grandes cartadas em prol da teoria ondulatória da luz. O experimento realizado por Thomas Young conseguiu comprovar um padrão de interferência na propagação da luz. Para tanto Young usou a própria luz solar. Contudo, enquanto a luz do sol oferece abundantes evidências experimentais a partir das quais pudemos obter as leis da óptica geométrica, como testemunhou a figura 2.1 e os diversos fenômenos estudados nos capítulos anteriores, como a miragem e o arco-íris, Young teve de ser um experimentalista hábil para

fazer a luz solar lhe revelar seu recôndito comportamento ondulatório. O experimento original de Young foi feito ao deixar a luz solar adentrar um pequeno orifício em um ambiente escuro. Ele então faz a luz passar por um fino cartão de modo a dividir o feixe em dois, conforme ilustrado na figura 4.5. Hoje em dia, o mais comum para reproduzirmos este experimento é em-

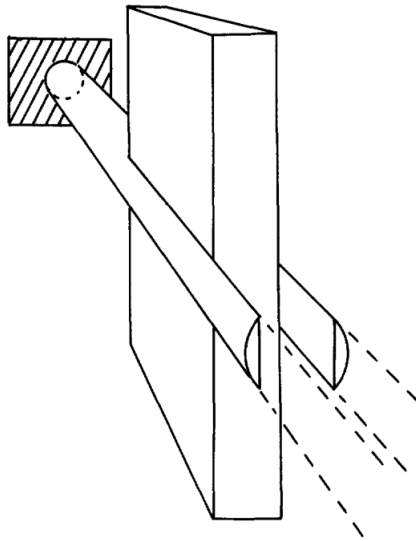


Figura 4.5: Esquema ilustrando o experimento de Young como originalmente feito. A figura ilustra o raio de luz adentrando um pequeno orifício e posteriormente sendo dividido por um cartão. Figura retirada da referência [28].

pregando como fonte de luz um *laser* no lugar do sol, e uma fenda dupla no lugar do cartão. Para uma descrição didática do experimento original remetemos o leitor à referência [28] e ao vídeo do canal *Veritasium* [29] disponível no *link* <https://youtu.be/Iuv6hY6zsd0>. Daqui por diante consideraremos a versão mais usual em nossa discussão. Consideremos uma fonte de luz que passa por um pequeno orifício - adiante discutiremos o porquê desta primeira etapa - passando em seguida por uma barreira contendo duas fendas e por fim incidindo em um anteparo. Na figura 4.6(a) é visto como se comporta o padrão de iluminação feito pelo cone de luz no anteparo quando se tampa a fenda da direita da segunda barreira. Já na figura 4.6(b) quando se faz o mesmo na fenda da esquerda.

Levando em consideração a teoria corpuscular de propagação da luz, o

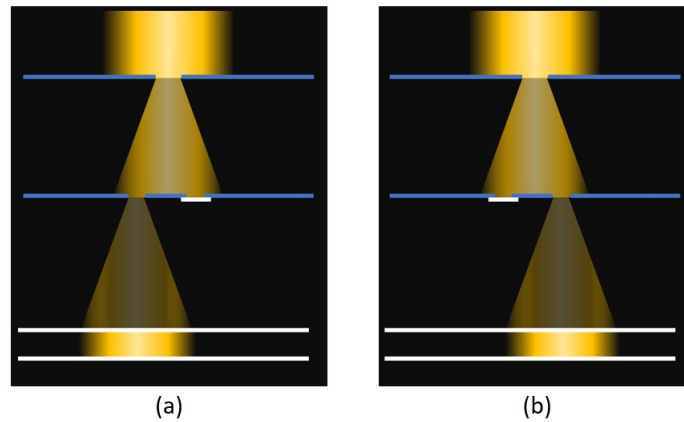


Figura 4.6: Representação esquemática de como se comporta a luz no aparato com: (a) o orifício da esquerda aberto e o da direita fechado. (b) o orifício da direita aberto e o da esquerda fechado.

que se espera ao se deixar as duas fendas abertas simultaneamente é que se obtenha um padrão em que uma região central, onde há a interseção dos cones de luz, seja iluminada de forma intensa e, de maneira gradual e contínua, vá esmaecendo conforme se afasta do ponto central. A figura 4.7 retrata essa situação. No entanto, o que foi observado por Young ao realizar esse experimento foi um padrão de pontos claros e escuros alternados, como é mostrado na figura 4.8, comumente chamado atualmente de franja de interferência.

Uma analogia que pode ser utilizada para elucidar um pouco o que acontece nessa situação, é imaginar duas hastes batendo na água de um lago em fase, ou seja, simultaneamente. Neste caso, como é mostrado na figura 4.9a, é possível verificar que, por conta da interferência das ondas geradas em cada fonte, são formadas regiões de máximo e mínimo, o que podem ser equivalentes às regiões iluminadas e escuras do experimento da dupla fenda, o que é reforçado na figura 4.9b. Esta analogia foi a chave apresentada e defendida por Young para defender que seu experimento permitia mostrar que a luz possuía uma natureza ondulatória. Da mesma forma como regiões da superfície de um lago podem ficar horizontais pela interferência destrutiva de duas ondas que se superpõe, Young argumentou que certos pontos que estariam iluminados caso qualquer uma das duas fendas estivesse sozinha aberta, fi-

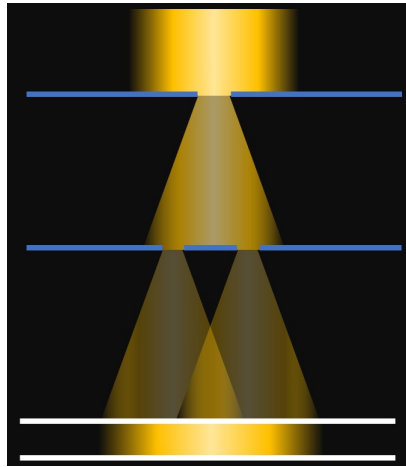


Figura 4.7: Representação esquemática de como a luz deveria se comportar no anteparo levando em consideração a Teoria Corpuscular da Luz.

cam na realidade escuros quando *ambas* estão abertas. Isto significa que luz + luz pode dar sombra!

Essa comparação da luz com ondas mecânicas é esclarecedora em um ponto, mas pode trazer alguns outros questionamentos. Se a luz se comporta como a água na situação descrita na figura 4.9, qual o motivo de nossos olhos não enxergarem e acompanharem a oscilação da luz?

Ao se olhar para uma onda se propagando em uma corda, é possível ver as partes onde a oscilação alcança seus máximos e mínimos e perceber seu movimento como função do tempo. O mesmo ocorre ao se analisar uma onda se propagando no mar. Entretanto, ao se olhar a luz, tudo o que podemos constatar é uma oscilação espacial, porém sem nenhuma dinâmica temporal. E mesmo tal oscilação espacial vem às custas de um aparato experimental específico, com boa parte de nossa experiência cotidiana não revelando tais oscilações nem mesmo espacialmente. Intuitivamente, podemos imaginar que a razão pela qual não acompanhamos temporalmente a oscilação da luz visível é que ela provavelmente oscila muito rápido, de modo que tudo o que observamos são médias temporais. Discutiremos abaixo como podemos construir isto passo a passo com os estudantes, sem simplesmente fornecer o valor da frequência de vibração da luz. Para tanto necessitaremos de alguns elementos de física ondulatória.

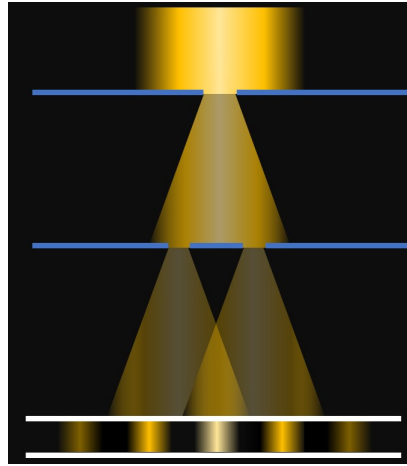


Figura 4.8: Representação das franjas formadas no experimento de Young.

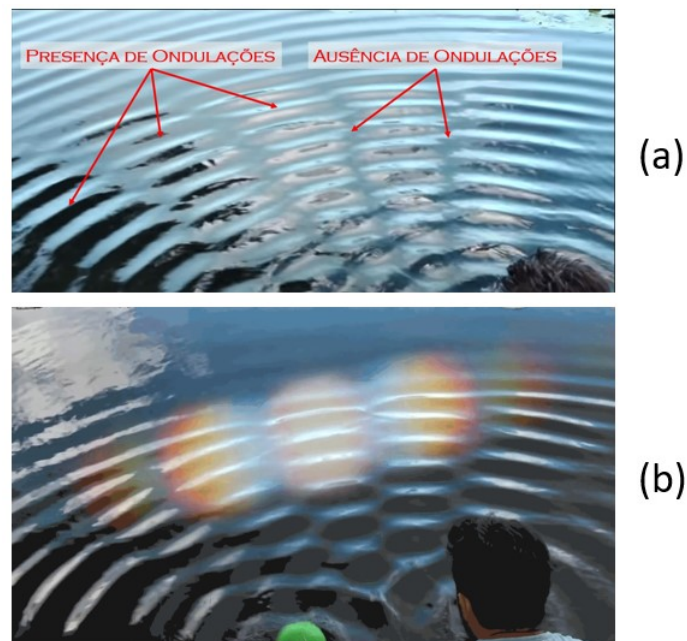


Figura 4.9: (a) Interferência formada por duas vibrações em um lago. (b) Analogia entre a interferência do lago com a da luz. Captura feita do vídeo [29]

4.2 Elementos de física ondulatória

Um primeiro exemplo de fenômeno ondulatório que testemunhamos é a propagação de onda em uma corda vibrante. A sequência de imagens ilustrada na figura 4.10 captura as feições centrais do fenômeno ondulatório. Esta figura apresenta uma pessoa produzindo um pulso em uma corda cuja

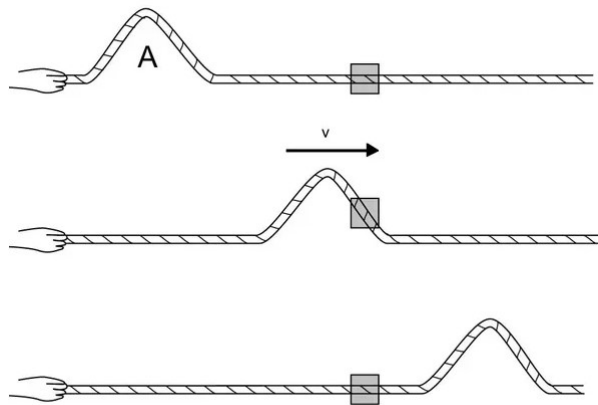


Figura 4.10: Representação de um pulso sendo criado ao puxar uma extremidade da corda para cima e para baixo. Figura retirada de <http://educacao.globo.com/fisica/assunto/ondas-e-luz/ondas.html> (consultado em 11/06/2023).

outra extremidade está presa em uma parede. A pessoa puxa a corda para cima e para baixo em sequência para produzir o pulso. O ponto central é perceber que cada elemento de matéria da corda se movimenta pouco a partir de sua posição inicial, mas o pulso se propaga pela corda toda. Portanto, a energia que a pessoa introduziu viaja a corda sem a necessidade de ser transportada pela matéria. Esta é a definição que adotaremos - onda corresponde ao transporte de energia ficando a matéria na média em equilíbrio. Tal definição captura bem o que presenciamos em fenômenos como os ilustrados no caso da corda e no caso da água no lago, ilustrado na figura 4.9. Também é um bom modelo para entender o som em um dia calmo e sem vento. Contudo, o fenômeno ondulatório pode existir com uma corrente que transporta também a matéria, como no caso da propagação sonora na presença

de vento ou das ondas do mar. Curiosamente, a primeira onda que vem a mente de um estudante - a bonita onda do mar - não é estudada nem mesmo em cursos superiores de física básica justamente por necessitar de elementos avançados de dinâmica dos fluidos para modelar justamente o transporte de matéria. Foge ao nosso propósito aprofundar esta discussão, porém julgamos válido destacar em sala de aula a discussão acima, ainda que seja para deixar fenômenos envolvendo transporte de matéria a cargo de um estudo empírico próprio dos estudantes ao “pegarem” ondas no mar, ou serem pegos por ela...

Note uma diferença central entre a onda presente na figura 4.10 e a onda ilustrada em 4.9. A primeira claramente é não periódica, enquanto a segunda em uma boa aproximação podemos considerar periódica temporal e espacialmente. A classe de ondas cuja dependência espacial e temporal é periódica é de enorme interesse e são conhecidas como ondas harmônicas. Para estas ondas podemos definir o comprimento de onda como sendo a distância entre dois máximos, como ilustrado na figura 4.11a. Após um intervalo de tempo

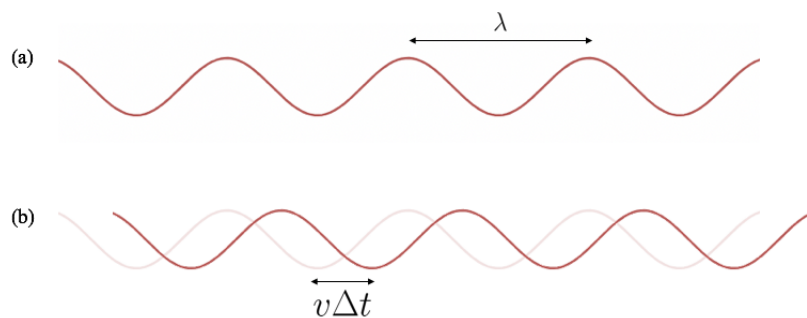


Figura 4.11: Perfil espacial de uma onda harmônica ilustrada em dois instantes de tempo diferindo por Δt .

Δt a onda se desloca por $v\Delta t$, na qual v é, por definição, conhecida como a velocidade da onda. Esta situação está ilustrada na figura 4.11b. Para um intervalo de tempo no qual a onda se desloque exatamente por λ a figura 4.11b recai novamente na figura 4.11a. O intervalo de tempo para isto ocorrer é conhecido como o período temporal da onda - neste tempo cada ponto da onda fez uma oscilação vertical. Vemos, então, que denotando este período temporal por T temos $vT = \lambda$. O mais comum é definirmos $f = 1/T$ como sendo a frequência da onda harmônica e escrever a relação

anterior na forma $v = \lambda f$. Antes de encerrar nossa discussão gostaríamos de destacar dois aspectos da expressão que obtivemos, a qual constitui a base principal para a maior parte da física ondulatória discutida no ensino médio. Primeiramente, note que, a menos de um fator adimensional, poderíamos estabelecer a relação $v = \lambda f$ por análise dimensional. Assim, apenas por argumentos dimensionais já conseguimos motivar que ao diminuir o comprimento de onda aumentamos a frequência. Em segundo lugar, destacamos que a expressão obtida vale tão somente no referencial em que cada ponto da onda está na média em repouso. De fato, enquanto v é dependente do referencial, os períodos espacial e temporal, T e λ , como quaisquer intervalo de tempo e de distância na mecânica newtoniana são invariantes por mudança de referencial, donde $v = \lambda f$ não pode valer em qualquer referencial. Isto está ligado com o fato de que nos exemplos que discutimos ao abrirmos esta seção a onda se deve a oscilação de um meio material, a corda ou a superfície do lago. Isto faz com que haja um referencial natural onde esperamos que a descrição da física envolvida seja mais simples do que em outros referenciais que é o próprio referencial do meio. No caso da onda luminosa, que nos é de central interesse, tal meio nunca foi encontrado. Ora, ao tratarmos a luz como onda, o que estaria então vibrando, gerando portanto a propagação de energia? Não tendo meio, em que referencial vale a relação $v = \lambda f$ que estabelecemos? A própria velocidade de propagação da onda, como dissemos no capítulo anterior, é uma propriedade do meio - a onda sonora se propaga com 330 m/s no referencial em que o ar está em repouso. Com relação a que referencial mediremos a velocidade de propagação da onda luminosa? Foge aos propósitos desta dissertação investigar estas perguntas. Diremos apenas que atualmente consideramos que na onda luminosa o que vibra são campos elétricos e magnéticos e que a inexistência de um meio levou a consequências literalmente revolucionárias, levando Einstein a postular que a velocidade da luz é a mesma para todo observador. Sob outro aspecto, a incapacidade de conceber a luz como a vibração mecânica de um meio trouxe abaixo o próprio sólido edifício da mecânica newtoniana pavimentando caminho para uma nova mecânica. Contudo, não necessitaremos para as nossas discussões nesta dissertação de estudar a dinâmica das oscilações luminosas. Trabalhando

em um referencial fixo, sem nos preocuparmos em relacionar grandezas para diferentes observadores (o que de fato iria requerer a mecânica de Einstein) vale tudo o que obtivemos nesta seção para a onda de luz, e isto é tudo que precisaremos no decorrer deste capítulo.

4.3 Comprimento de onda e frequência para a luz

Como fizemos na seção anterior podemos agora nos perguntar - se a luz é uma onda, seria ela uma onda harmônica? Podemos atribuir a ela um comprimento de onda e uma frequência? Em caso afirmativo, quais seriam eles? De posse destas respostas poderemos quantificar a discussão que fizemos anteriormente e entender porque em situações como a ilustrada na figura 4.8 não acompanhamos as oscilações temporais da onda luminosa.

O primeiro ponto é saber com que velocidade a luz se propaga ou pelo menos a sua ordem de grandeza. Durante séculos isso foi tema de bastante debate, cogitando-se inclusive que a velocidade da luz era infinita. Apenas no século XXVII que o astrônomo dinamarquês Ole Rømer conseguiu, através observação de eclipses de uma das luas de Júpiter, determinar que a luz tinha uma velocidade finita. Sua hipótese fundamental foi a de que os fenômenos astronômicos que estamos acostumados eram regulares, decorrentes da periodicidade dos movimentos. O período da revolução da Lua em torno da Terra, por exemplo, é essencialmente constante. Ao observar os períodos de eclipse do satélite jupiteriano Io, isto é ao medir o tempo em que o Io ficava ocultado pelo planeta de Jupiter, Rømer observou que este período era maior quando a Terra se afastava de Jupiter durante o eclipse do que quando se aproximava. Considerando que o fenômeno em si era regular, Rømer atribuiu esta diferença de tempo ao próprio tempo adicional que a luz levava para chegar a nós na Terra no primeiro caso do que no segundo. Para detalhes sobre esta fascinante história, que envolve trocas de cartas entre Huygens e Rømer, remetemos o leitor à referência [30]. Utilizando os dados de Rømer, Christiaan Huygens inferiu que a velocidade da luz era de aproximadamente 16,67 vezes

o diâmetro da Terra por segundo, o que equivale a $2,12 \times 10^8$ m/s. Ou seja, uma dedução com erro aproximado de apenas 30%, levando em consideração o valor aceito atualmente de aproximadamente 3×10^8 m/s. Por mais que não se tenha chegado no valor com precisão, foi possível chegar a uma ordem de grandeza para a velocidade da luz, que é de 10^8 m/s.

De posse da velocidade da luz, podemos voltar a nossos outros questionamentos apresentados na abertura desta seção. Podemos respondê-los a partir de experimentos como o da fenda dupla, discutido nas seções anteriores. Conforme dissemos, nestes experimentos não conseguimos acompanhar a oscilação temporal, mas podemos medir as alternâncias espaciais. Por esta razão, o caminho mais natural é primeiramente buscarmos informações sobre o comprimento de onda, para depois inferirmos indiretamente a frequência. Por isso, realizamos um experimento de Young com o intuito de determinar o comprimento de onda da luz verde. Utilizamos uma fonte de luz monocromática verde, um obstáculo com duas fendas separadas por 0,25 mm e uma tela de projeção, para a qual usamos a parede. A luz verde passava através das fendas e criava um padrão de interferência na tela, com franjas claras e escuras alternadas. Medimos a distância entre as franjas claras, como é mostrado na figura 4.12, e a distância das fendas até a tela, que era de aproximadamente 2,0 metros.

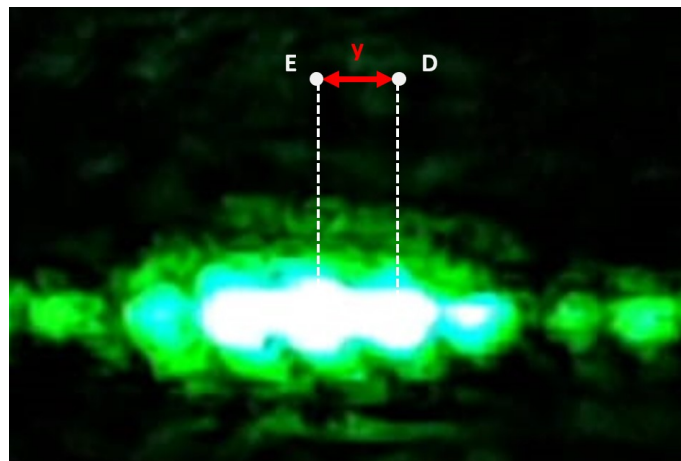


Figura 4.12: Experimento de Young para a luz verde em que Y representa a distância entre duas franjas claras.

A partir das distâncias entre os pontos luminosos no anteparo é possível determinar o comprimento de onda da luz. A figura 4.13 ilustra esquematicamente o nosso experimento. Note que para nosso arranjo experimental, $L \gg d$, fazendo com que o ângulo θ envolvido seja bem pequeno (a figura está exagerada para fins didáticos). Conforme usamos nos capítulos anteriores, e está demonstrado na apêndice A, neste caso podemos usar as aproximações $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$. Como em nosso experimento $L \gg d$ pode se considerar

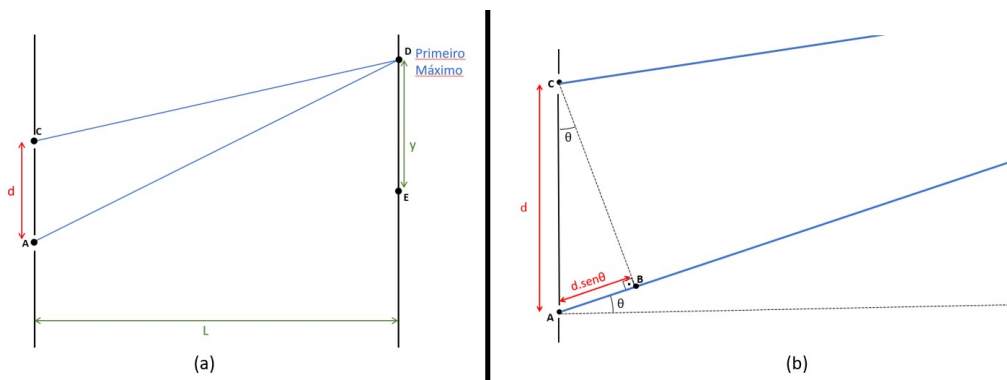


Figura 4.13: (a) Representação do primeiro máximo do experimento de Young; (b) Ampliação que demonstra a diferença da distância percorrida pela luz oriunda de cada fenda.

que os raios de luz vindos das fendas são praticamente paralelos, aproximação que já foi vista na seção 2.2.1 deste trabalho. Desta forma, a diferença entre o caminho percorrido pelo raio luminoso para chegar ao ponto D difere para os dois raios por $d \sin \theta$, conforme ilustrado na figura 4.13b. Para que no ponto D da figura 4.13a seja de fato uma interferência construtiva tem-se que $d \cdot \sin \theta = \lambda$, em que λ é o comprimento de onda que desejamos determinar. Logo, na aproximação justificada acima temos $\lambda \approx d\theta$. A medida do ângulo θ não é tão simples de ser feita, portanto desejamos escrever a relação anterior em termos da distância entre os máximos no anteparo. Pela figura 4.13a vemos que $\theta \approx \tan \theta = y/L$. Juntando as duas equações obtemos, enfim,

$$\lambda = \frac{yd}{L}. \quad (4.1)$$

Conforme esperado, para um dado d e L o comprimento de onda é tanto

maior quanto mais afastados os máximos estiverem no anteparo.

Dispondo do experimento e da modelagem apresentada acima, podemos fazer uma medida cuidadosa do comprimento de onda do *laser* utilizado. Porém, não é nosso objetivo aqui fazer uma análise cuidadosa da parte dos dados experimentais. Desejamos, ao contrário, um experimento rápido com a turma que permita que eles obtenham as ordens de grandeza envolvidas. Portanto, não foram utilizados instrumentos precisos de medição. Em nosso experimento, temos $d = 2,5 \cdot 10^{-4}$ m, $L = 2,0$ m e como resultado obtivemos $y = 4 \cdot 10^{-3}$ m. Desta forma, obtemos $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ m = 500 nm! Para o *laser* de cor verde o valor mais comum empregado é de 532 nm, ou seja, não chegamos no valor exato do comprimento de onda, mas para este caso, como citado anteriormente, o importante era obtermos a ordem de grandeza. Utilizando a relação $c = \lambda \cdot f$ em que c é a velocidade da luz, λ é o comprimento de onda e f é a frequência da onda, é possível concluir que a frequência da luz é da ordem de 10^{14} Hz, ou seja, ocorrem centenas de trilhões de ciclos por segundo! Desta forma, tudo que nosso olho consegue perceber é uma média da energia dessa onda. Em outras palavras, diferentemente de ondas em cordas ou na superfície de lagos, onde percebemos a dinâmica do fenômeno ondulatório, em experimentos com a luz visível mesmo quando conseguimos observar seu comportamento ondulatório ele nos revela apenas suas oscilações espaciais, ficando a dinâmica temporal da oscilação velada por detrás das médias estáticas que podemos observar.

Com nossa discussão nos parágrafos anteriores podemos perceber o quão importante é uma análise das ordens de grandeza envolvidas em um dado fenômeno físico. E boa parte destas podem ser obtidas mediante experimentos simples e raciocínios compatíveis com o que os estudantes estão familiarizados no ensino médio. De posse dos valores que obtivemos ao longo desta seção vemos que de fato a luz é um personagem bem especial na física. Não é de surpreender que afinal não se tenha encontrado um meio mecânico cuja vibração correspondesse à luz, diferentemente de todas as demais ondas conhecidas então. Que meio mecânico vibraria centenas de trilhões de vezes por segundo? Que meio mecânico daria origem a uma onda que viajaria a centenas de milhares de metros por segundo, muitas ordens de grandeza

acima das que estamos acostumados com ondas mecânicas usuais. Os cientistas do final do século XIX estavam cientes destas ordens de grandeza, e por isto inclusive acreditavam que tal meio seria de fato um meio muito especial. Porém, olhando em retrospectiva, valores tão fora das ordens de grandeza tipicamente apresentadas pelas ondas mecânicas sugere que estamos afinal diante de uma nova física. O eletromagnetismo se mostrou um campo fundamental, não descritível como uma vibração mecânica, e dele nasceu uma nova mecânica, conhecida como teoria da relatividade de Einstein.

Como vimos, o comprimento de onda da luz visível é muito pequeno, fornecendo uma primeira intuição de porque o comportamento ondulatório da luz é de tão difícil observação para nossas escalas cotidianas de distâncias. Vemos, em especial, na equação (4.1) porque de fato necessitamos de grandes razões L/d a fim de obter uma distância razoável entre os máximos no anteparo. Para um dado comprimento de onda, diminuir d aumenta a separação angular entre os máximos, e aumentar L faz com que haja mais espaço para os raios se afastarem, ambos os fatores contribuindo para aumentar a distância entre as franjas no anteparo. Contudo, esta não é toda a história. Afinal, pela nossa equação (4.1) mesmo para um d grande, poderíamos sempre escolher um L grande o bastante para que a distância entre os máximos fosse tão grande quanto quiséssemos. E não observamos isto experimentalmente - para distâncias d grandes observamos um padrão no anteparo de acordo com a óptica geométrica. De fato, o comportamento ondulatório da luz simplesmente foge de grande parte de nossa vivência cotidiana, e foi necessário uma grande perícia e engenhosidade dos cientistas ao longo da história para nos confrontarmos com a natureza ondulatória da luz, como exemplificado acima no experimento de Young. Da mesma forma, observamos que vemos apenas alguns máximos na parede, e que o padrão de interferência vai se apagando conforme nos afastamos do máximo central. Por que o comportamento ondulatório da luz parece ser completamente apagado em escalas de comprimentos grande comparada com λ ? Para entender este comportamento, o ponto central é perceber que a luz - assim como qualquer onda - não pode ser perfeitamente monocromática. Claro que isto é verdade, pois apenas pelo fato da luz começar e terminar já indica que ela não é exata-

mente harmônica. Porém, é pior do que isso. Uma primeira descrição para a luz de um laser está ilustrada na figura 4.14. Vemos que após algumas

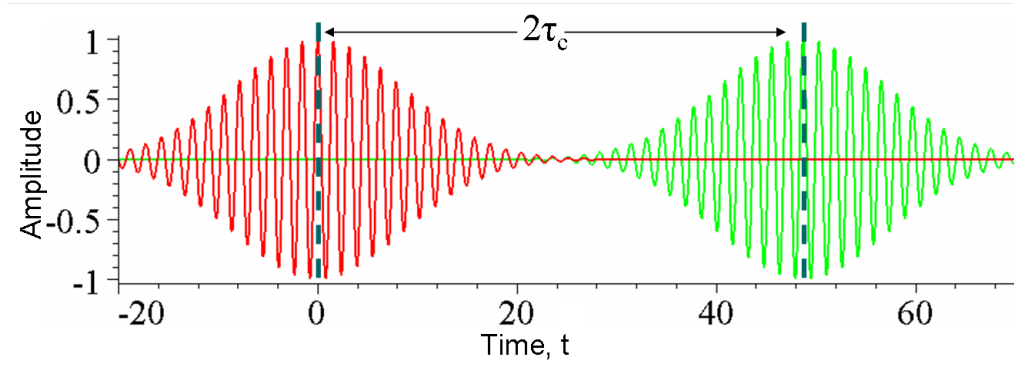


Figura 4.14: Amplitude típica do campo de um *laser*. Para algumas oscilações podemos aproximar a oscilação como harmônica, porém para tempos longos vemos que a oscilação é formada por trens de onda independentes entre si. As cores na figura acima não tem significado intrínseco, são usadas cores distintas para distinguir entre diferentes trens de onda. Figura retirada de https://en.wikipedia.org/wiki/Coherence_%28physics%29 (consultado em 11/06/2023).

oscilações, nas quais podemos em uma boa aproximação considerar a onda como harmônica (ilustrado em vermelho na figura 4.14) a onda praticamente cessa, sendo seguida por um novo trem de ondas, novamente aproximadamente harmônico e representado em verde na mesma figura. O ponto é que mesmo que o trem verde seja o mesmo que o trem em vermelho, eles não guardam entre si *coerência*. Dentro do trem de onda vermelho, a distância entre qualquer pico é um múltiplo inteiro do período da onda, e o mesmo vale para o trem verde. Porém a distância entre um pico do trem verde e um pico do trem vermelho não é necessariamente um múltiplo inteiro do período. Conforme o tempo passa, muitos destes trens vão se seguindo de forma aleatória. A distância entre os trens é da ordem do tempo de coerência temporal do feixe, denotada por τ_c na figura 4.14. Para ver as consequências dramáticas do conceito de coerência voltemos ao nosso argumento ilustrado na figura 4.13. No ponto *D* da figura podemos garantir que feixe que foi pelo caminho *AD* andou um comprimento de onda a mais do que o feixe que foi

pelo caminho CD . Contudo, se o feixe originário de C sair de um ponto de oscilação aleatório com relação ao feixe que se origina em A o fato de o feixe CD percorrer um comprimento de onda a mais com relação ao de AD não quer dizer que ele chegará exatamente um comprimento de onda na frente. E como esta diferença varia aleatoriamente no tempo, na média não veríamos o padrão de interferência. Assim, a existência de coerência é crucial para que possamos observar as franjas de interferência. Ainda que haja coerência para o primeiro máximo de interferência, quanto mais distante do máximo central mais difícil é manter a coerência. Afinal, o n -ésimo máximo é aquele para o qual o caminho vindo de C andou n comprimentos de onda a mais do que o caminho vindo de A . E como vemos na figura 4.14 após poucos comprimentos de onda a coerência foi perdida. Por isto observamos apenas as primeiras franjas. Isto não é tudo - na figura 4.14 está ilustrado apenas a dependência temporal da oscilação em um ponto do espaço. Mas ao incidir sobre a fenda dupla, é importante que tenhamos coerência também da onda que em cada fenda. Assim, as fendas não podem ficar muito distantes entre si. A luz de um *laser* se caracteriza exatamente por possuir uma boa coerência, por isso é muito mais fácil fazer experimentos de óptica ondulatória com eles do que com outras fontes de luz, como lâmpadas ou a própria luz solar. Por usar esta última, Young teve de antes de incidir a luz na fenda dupla fazer a luz passar por um pequeno orifício. O papel deste orifício era colimar a luz, garantindo assim uma maior coerência espacial para o seu feixe de luz. A teoria da coerência da luz é uma teoria extremamente sutil e foge aos nossos propósitos aprofundar esta discussão nesta dissertação. Contudo, de forma qualitativa podemos trazer alguns de seus elementos para a sala de aula a fim de que os estudantes possam apreciar porque o comportamento ondulatório é tão alheio a maior parte de nossa vivência cotidiana.

4.4 As cores da luz

Considerando que a luz é uma onda eletromagnética que, no vácuo, viaja sempre na mesma velocidade, é plausível levantar um questionamento do motivo que faz com que a luz possa ser vista de diversas cores. Para uma dis-

cussão profunda sobre este tema, e considerações sobre o processo fisiológico humano remetemos o leitor a [31]. Aqui nos ateremos a aspectos mais gerais deste tema. Para isso, mais uma vez é favorável recorrer a um exemplo da mecânica para facilitar a explicação. Na situação de se colocar duas torneiras pingando gotas em fase (simultaneamente) em uma cuba d'água verifica-se que é formado um padrão de máximos e mínimos por conta da interferência entre as oriundas das duas fontes, como é representado na figura 4.15a.

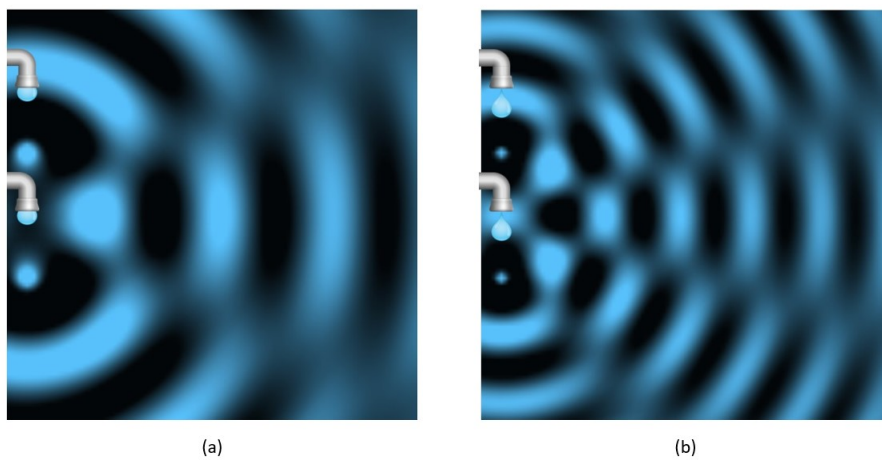


Figura 4.15: Padrão de interferência formado pela simulação do *Phet*. Há um aumento da frequência de (a) para (b). Figura capturada em https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-interference/latest/wave-interference_pt_BR.html (consultado em 11/06/2023).

No entanto, caso isso seja feito com as gotas caindo um pouco mais rápido, ou seja, aumentando-se a frequência com que as ondas são formadas, o padrão de máximos e mínimos se altera, como é possível ver na figura 4.15b. Para essa transição é possível verificar que há uma aproximação entre os máximos. Portanto, o padrão de interferência tem relação com a frequência com que as gotas caem das torneiras. Agora vem o ponto central em nossa analogia. O que ocorre caso façamos o experimento de Young usando fontes com cores distintas? Para tanto, é importante que façamos os experimentos nas mesmas exatas circunstâncias (distância entre as fendas, distância das fendas para o anteparo, etc. e mudar de um experimento para o outro apenas a cor da fonte. Fizemos este experimento e se vê um padrão de franjas diferenciado

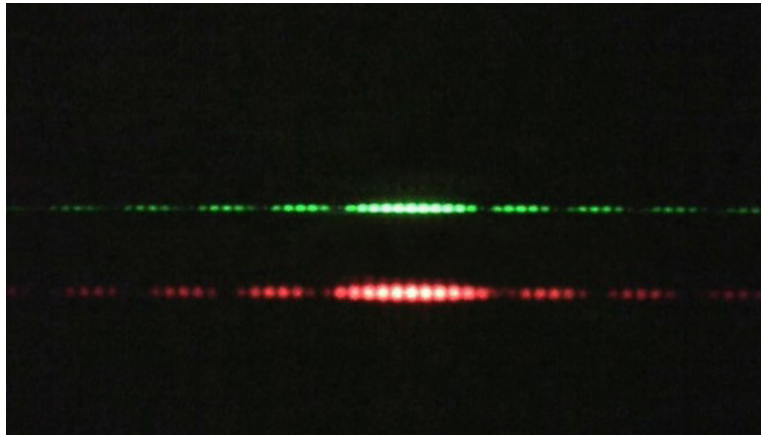


Figura 4.16: Experimento de Young feito com *laserpoints* de duas cores distintas. A figura de cima foi obtida com um laser verde, enquanto a de baixo com o laser vermelho.

para cada cor. Por exemplo, ao se colocar uma configuração de duplas fendas e iluminá-las com luz vermelha, seu padrão será diferente caso a fonte seja alterada para uma luz verde, como visto na figura 4.16. Isso traz fortes evidências de que as cores são apenas diferentes frequências, ou comprimento de onda, com que a luz é emitida. Vemos que é aqui que a óptica ondulatória se escondia na descrição geométrica. Para a óptica geométrica, cores eram apenas diferentes componentes da luz branca que viajavam com diferentes velocidades em meios materiais. Na perspectiva ondulatória a diferença é tão somente a frequência com a qual a onda luminosa vibra. É curioso que mesmo que estejamos em escalas onde o comportamento ondulatório não se manifesta fenomenologicamente, como em todos os casos que abordamos nos capítulos anteriores, ainda assim a dinâmica ondulatória deixa sua marca na velocidade com o qual o raio de luz colorido viaja em cada meio. Isto se dá pelo fato de que embora na óptica geométrica as escalas de comprimento envolvidas sejam grandes de forma que podemos considerar a propagação da luz através de raios obedecendo leis geométricas, sem percebermos quaisquer difração ou interferência, a velocidade com a qual o raio viaja depende da interação da luz com o meio. Foge ao nosso propósito aprofundar este ponto, mas a ideia é que a luz polariza o meio, e ao oscilar a polarização oscila também. Quanto maior a frequência da oscilação do campo, tanto mais

diffícil é o meio acompanhar. Isto faz com que o meio responda diferentemente para diferentes frequências. Microscopicamente, no caso acima, o mecanismo principal responsável pela dispersão se deve às vibrações moleculares, que ocorrem com frequência na região do infravermelho, cerca de cem vezes menor do que a frequência do visível. Assim, mesmo que o comprimento de onda seja muitas ordens de grandeza menor do que as escalas de comprimento do fenômeno estudado, a frequência com que o meio vibra é menor do que a frequência da luz visível por um fator de apenas duas ordens de grandeza. Isto produz uma pequena diferença na velocidade de propagação de cada cor - como vimos anteriormente o índice de refração do vermelho e do violeta difere apenas na segunda casa decimal (uma parte em cem). Por ser pequena gera uma pequena diferença nos ângulos de refração, contudo pequenas diferenças angulares podem produzir enorme diferença na trajetória para distâncias grandes, como vimos nos capítulos anteriores. Remetemos o leitor interessado em aprofundar a interação da luz com a matéria às referências [32, 33].

4.4.1 Interferências coloridas em nosso cotidiano

No capítulo anterior estudamos a aparição de cores no arco-íris, um fenômeno que pode ser compreendido à luz apenas da óptica geométrica. Na seção anterior, vimos que na perspectiva ondulatória cor corresponde a uma dada frequência da onda luminosa, contudo constatamos isto a partir de um experimento cuidadosamente pensado e difícil de se fazer se não se dispõe de *lasers*. Haveriam fenômenos cotidianos em que testemunhamos o surgimento de cores cuja origem seja fundamentalmente ondulatória - isto é, que não possa ser explicada satisfatoriamente pela óptica geométrica? Veremos nesta seção que não apenas a resposta a esta pergunta é afirmativa, como está muito mais presente do que ingenuamente poderíamos imaginar!

Um primeiro exemplo é como se apresenta a "face espelhada" de um *compact disk* (CD) sendo iluminada por uma luz branca, como mostrado na figura 4.17a. A depender da direção na qual olhamos o *CD* ele se apresenta em diferentes cores, fenômeno por vezes chamado iridescência, palavra cuja raiz etimológica *iris* vem do grego para arco-íris. O nome se deve ao fato de que

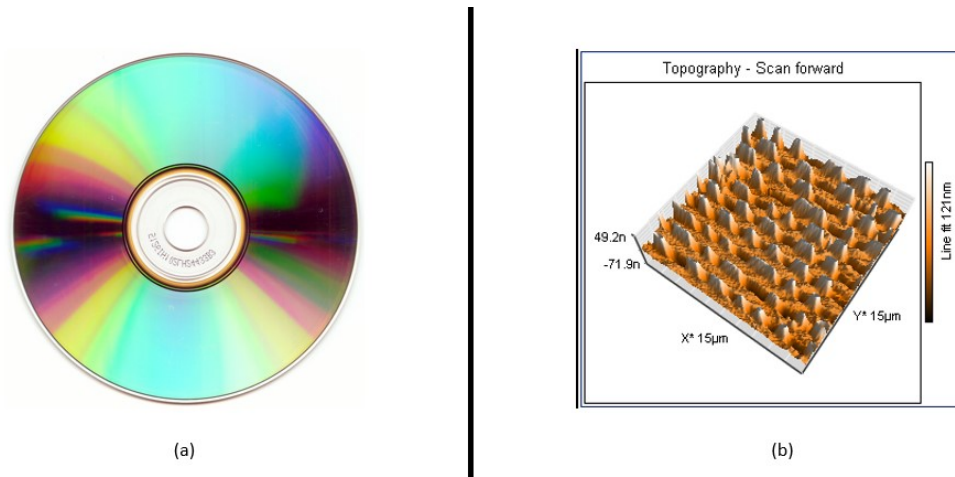


Figura 4.17: (a) Imagem de um CD e (b) suas respectivas ranhuras micrométricas.

a superfície nos oferece todas as cores do arco-íris quando a iluminamos com luz branca. Contudo, o parentesco etimológico não se traduz em familiaridade física, sendo o mecanismo óptico responsável pelo surgimento das cores inteiramente distinto nos dois casos. Estamos diante aqui de um fenômeno ondulatório. Isso ocorre por conta das ranhuras existentes na estrutura de um CD que podem gerar, por meio da difração, interferências construtivas e destrutivas para determinadas frequências, conforme ilustrado na figura 4.17b. Tais ranhuras se dão em uma escala micrométrica, sendo imperceptíveis para nossos olhos que testemunham uma superfície aparentemente lisa para o CD. Haveria alguma forma de motivar os estudantes de ensino médio que estamos aqui diante de um fenômeno ondulatório sem utilizarmos uma imagem de microscopia totalmente fora do cotidiano do aluno? Uma forma de motivar é fazer os alunos notarem que enquanto no arco-íris e no prisma estamos diante de um fenômeno em que as cores se apresentam em ângulos determinados e em uma sequência fixa, as cores no CD oscilam rapidamente e sem um padrão tão fixo. Claro que esta não é uma demonstração definitiva, mas serve para fomentar a intuição no estudante de que oscilações cromáticas sugerem oscilações na dinâmica subjacente ao fenômeno.

Passemos a um novo exemplo, a primeira vista surpreendente. A que se devem as cores de borboletas e pavões? Em um primeiro momento poderia-

mos imaginar que se devem a pigmentos, mas este não é sempre o caso. Isto já havia sido observado tanto por Robert Hooke [34] quanto por Isaac Newton [35] no século XVII ao observarem a presença da iridescência discutida acima - a cor apresentada pela pelagem dos animais mudava a depender do ângulo de observação, descartando a possibilidade de cor pigmentar. Hooke inclusive chegou a observar diretamente saliências ao observar os pelos de pavões através de microscópios. A espécie de borboleta *Morpho menelaus*, por exemplo, possui pigmentos de cor marrom escuras em suas asas, mas é possível ver a parte superior delas na cor azulada, como representado na figura 4.18.



Figura 4.18: *Morpho menelaus*. Figura retirada de https://pt.wikipedia.org/wiki/Morpho_menelaus (consultado em 11/06/2023).

Isso só é possível por conta de uma interação entre a luz branca, vinda do sol, e nanoestruturas presentes nas asas destas borboletas. Essa interação

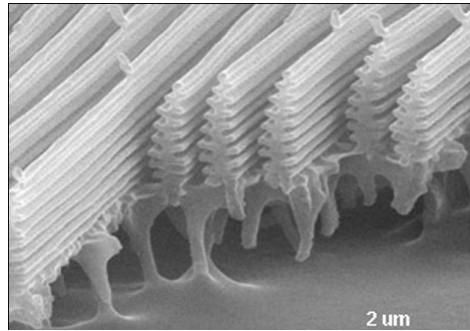


Figura 4.19: Nanoestruturas das asas da *Morpho menelaus*. Figura retirada de <http://www.microscopy-uk.org.uk/mag/indexmag.html?http://www.microscopy-uk.org.uk/mag/artmar15/dw-insect-test3.html> (consultado em 11/06/2023).

gera uma interferência construtiva para uma determinada frequência (cor) que faz com que somente essa parte da luz seja refletida. Cores produzidas desta forma são por vezes chamadas de *cores estruturais*, uma vez que dependem da estrutura micrométrica da superfície. Cores estruturais são ubíquas em biologia e estão cada vez mais presentes em aplicações tecnológicas [36]. Tal mecanismo contrasta com o mecanismo responsável por cores pigmentares, situação na qual vemos as cores complementares às que são absorvidas pela superfície. A diferença mais notável entre os dois mecanismos é justamente a da iridescência, mas este não é o único. Por envolver apenas reflexão e não absorção, cores estruturais são muito mais brilhantes e perceptíveis do que sua contrapartida pigmentar - as borboletas acima mencionadas podem ser vistas mesmo de distâncias enormes como de 1 quilômetro. O tamanho e o índice de refração médio das nanoestruturas responsáveis pela produção das cores estruturais são os fatores que fazem a asa de uma borboleta poder assumir diversas cores, do vermelho ao violeta. Com isso é possível imaginar que em uma situação em que a borboleta molhe a sua asa com água, poderia ocorrer uma alteração em sua coloração, já que alteraria o índice de refração de suas nanoestruturas. No entanto, isso não ocorre. As asas desse tipo de borboleta são hidrofóbicas, ou seja, não absorvem água. Por conta disso vemos as borboletas sempre da mesma cor, mesmo estando na chuva. Entretanto, é possível alterar o índice de refração da asa ao incidir



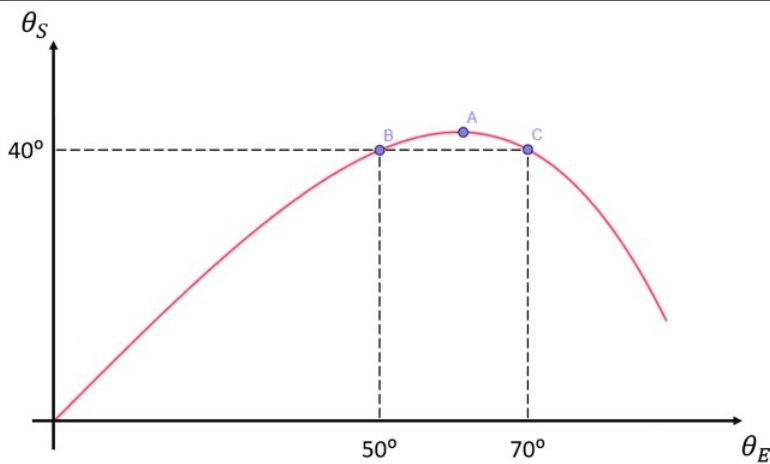
Figura 4.20: Asa da *Morpho menelaus* ao ser embebida por diferentes líquidos. Figura retirada de [37].

outros tipos de líquido diferentes da água. Na figura 4.20 é possível ver uma borboleta *Morpho menelaus*, dividida em quatro quadrantes. No primeiro quadrante, a asa está in natura, ou seja, está no seu estado original, refletindo em coerência a luz azul. Já no segundo quadrante, ao se banhar essa parte da asa em etanol, ela passa a refletir em coerência a cor verde, já que há uma alteração no índice de refração médio das suas estruturas. O mesmo acontece no terceiro quadrante, ao se banhar a asa da borboleta com uma mistura de água com açúcar. Neste caso, o índice de refração é bem maior do que nos casos anteriores, atingindo o valor de $n = 1.5$, bem próximo ao índice de refração da cutícula da borboleta, com $n = 1.56$. Desta forma, há pouquíssima reflexão e vemos a asa bem escura. Além disso, não se observa iridescência neste caso. Por fim, no quarto quadrante temos uma parte da asa que foi banhada com água e, como é possível ver, não há alteração nenhuma em relação a asa in natura. Note que a água fica toda concentrada em uma gota, demonstrando a natureza hidrofóbica da asa da borboleta.

Para mais um exemplo fascinante podemos voltar ao nosso familiar e muito estudado arco-íris! Embora suas principais características sejam perfeitamente compreensíveis apenas empregando óptica geométrica, se tivermos arcos-íris bem nítidos podemos observar as chamadas supernumerárias, como comentamos na abertura deste capítulo.



(a)



(b)

Figura 4.21: Supernumerária de um arco-íris (a) e o ângulo de saída da gotícula em função ângulo de entrada da luz na gotícula(b).

As oscilações presentes indicam novamente um fenômeno oscilatório, como de fato o são. Não à toa, o próprio Young após realizar o seu experimento que discutimos na seção 4.1 afirmou que este seria o mecanismo responsável pelas supranumerárias observadas no arco-íris. E, com efeito, este é o caso. Porém, sempre que mencionamos interferência temos de mencionar o que está interferindo com o que! No experimento de Young, a luz pode percorrer dois caminhos distintos, passando por uma ou pela outra fenda. Nos demais exemplos desta seção o mesmo acontece: há múltiplos caminhos que a luz pode tomar para chegar em cada ponto. Que interferência é responsável pelas supranumerárias em arcos-íris? A chave para este questionamento está no mesmo gráfico que foi a base para a nossa compreensão do próprio surti-

mento do arco-íris e que reproduzimos na figura 4.21b abaixo. Note que os pontos B e C , por exemplo, saem no mesmo ângulo, embora tenham entrado em ângulos distintos. Quando pudermos ver as contribuições deles (o que em geral não conseguimos) haverá dois raios distintos, percorrendo distâncias ligeiramente diferentes no interior da gota, que se superpõe ao sair da gota. Para pares de pontos simetricamente separados ao longo do máximo e muito próximos dele, a diferença de caminho é tão pequena que a interferência será construtiva. Mas conforme vamos pegando pares mais distantes podemos ter interferência destrutiva, e estas oscilações se traduzem nas supranumerárias observadas. No entanto, note que esta contribuição é bem menos intensa, pelas razões discutidas no capítulo 3, de modo que muitas vezes não conseguimos perceber a presença destes efeitos ondulatórios. Além disto, como a interferência depende da diferença de caminho percorrido ela é dependente do tamanho da gota, diferentemente dos ângulos obtidos no capítulo anterior, que supunham apenas que a gota era esférica. No contexto da óptica geométrica vimos que o fato do ângulo em que observamos o arco-íris não depender do raio da gota poderia ser pensado por análise dimensional. Contudo, no contexto da óptica ondulatória surge uma nova escala de comprimento, o comprimento da onda λ . Assim, o ângulo de observação das supranumerárias depende do raio R das gotas através da razão adimensional R/λ . Da mesma forma como vimos na seção do experimento de Young, aumentar o tamanho da gota - o análogo de separar as fendas - diminui a distância angular entre os máximos, isto é, deixa as supranumerárias mais próximas entre si. Assim, ao observarmos as supranumerárias podemos estimar o tamanho das gotas que produziram o arco-íris. Contudo, isto explica também porque é difícil observá-las: é importante que as gotas que estão contribuindo para o arco-íris sejam em boa aproximação de mesmo raio. Isto nem sempre é o caso, e quando há gotas de diferentes tamanhos observamos apenas uma média que apaga o padrão de interferência.

Foge ao nosso propósito aqui entrar em mais detalhes em efeitos ondulatórios no arco-íris, mas gostaríamos de destacar que há ainda muitos fenômenos interessantes, muitos dos quais compreendidos mais completamente apenas no século XX. Desde efeitos de polarização no arco-íris e cáusticas até as

consequências da não esfericidade das gotas há uma quantidade enorme de física a ser explorada no ensino do arco-íris. Como nesta dissertação estamos focados em aspectos que podem ser abordados no ensino médio, não entraremos nos tópicos referidos neste parágrafo e remetemos o leitor interessado às referências [19,38]. Destacamos ainda que foi observado também um arco-íris na região do infravermelho [39].

Para finalizar, gostaríamos de mencionar brevemente um outro fenômeno atmosférico bem rico - a corona. Observe a figura 4.22. Na figura (b) temos

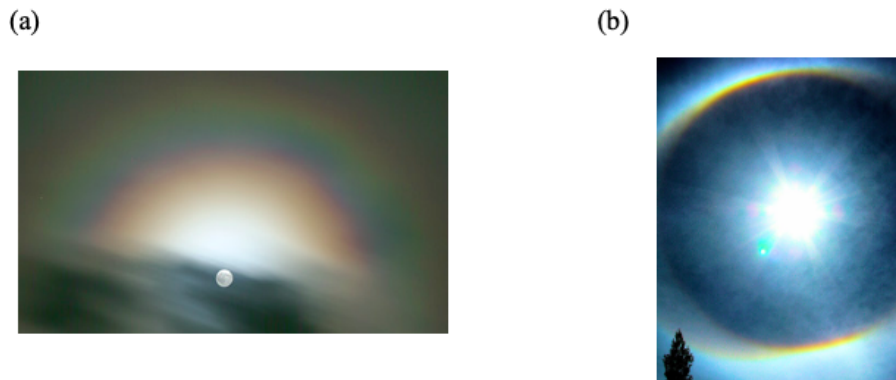


Figura 4.22: (a) Corona lunar. Figura retirada de <https://atoptics.co.uk/droplets/cormoon.htm> (consultado em 15/07/2023). (b) Halo solar. Figura retirada de [https://en.wikipedia.org/wiki/Halo_\(optical_phenomenon\)#/media/File:Haloonthesky.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/Halo_(optical_phenomenon)#/media/File:Haloonthesky.jpg) (consultado em 15/07/2023)

o fenômeno do halo solar que estudamos anteriormente. Já na figura (a) estamos diante novamente de um arco em torno de um astro, seria aqui também um caso de refração? Há uma diferença notável entre as duas figuras, enquanto em (b) o azul fica por fora, deixando o vermelho por dentro, em (a) as cores estão invertidas. Com efeito, estamos aqui diante de um novo efeito, conhecido como *corona*, no caso da figura 4.22a estamos diante de uma corona lunar. A mudança no ordenamento não é fortuito e vem de uma física bem distinta. O fato do vermelho ser mais desviado na corona é consequência de aqui estarmos diante de um fenômeno em que a luz é difratada pelas par-

tículas na atmosfera. A difração é um fenômeno ondulatório, de modo que esperamos que comprimentos de onda maiores sejam mais afetados, sendo portanto o vermelho mais afetado. Já na refração, que como vimos é perfeitamente explicável pela óptica geométrica, o oposto em geral ocorre, sendo as frequências maiores mais desviadas, como vimos em diversos exemplos ao longo da dissertação, estando, por exemplo, presente no halo solar ilustrado na figura 4.22b e no prisma ilustrado na figura 3.5. Tal diferença é um indicativo importante ao observarmos um efeito cromático em nosso cotidiano para sabermos se estamos diante de um fenômeno que requer ou não a óptica ondulatória para a sua compreensão. Foge ao nosso propósito aprofundar este debate, mas mencionamos brevemente que há modelos que permitem formular de maneira bem geral a dependência do índice de refração com a frequência. Um dos exemplos mais famosos é o chamado modelo de Lorentz, no qual se mostra que o índice de refração cresce com a frequência exceto quando estivermos em regiões com muita absorção. Ao lidarmos com meios transparentes, portanto, esperamos que o azul seja sempre mais refratado com o vermelho.

4.5 Céu azul

Dos fenômenos ópticos observados na atmosfera, a cor azulada do céu em um dia ensolarado talvez seja o mais democrático deles, já que não necessita de condições muito especiais e pode ser observado quase todos os dias em qualquer lugar do mundo. No entanto, qual é o motivo pelo qual o céu fica dessa cor? Esta na verdade é uma pergunta bem complexa. Enquanto diversos fenômenos ópticos venham tendo explicações desde a antiguidade, contendo pelo menos parte da explicação como contamos atualmente, o caso da cor do céu é único no sentido que até bem recentemente na história humana estivemos em uma rota bem inadequada. Se o arco-íris já encontrou a explicação oferecida nesta dissertação em Descartes, o azul do céu teve de esperar pelas equações de Maxwell, e mais um pouco, até que John Strutt, mais conhecido como Lorde Rayleigh, encontrasse no final do século XIX uma explicação para este aspecto tão familiar de nosso cotidiano. Não é

injustificável a demora, haja visto que a própria concepção de um fenômeno óptico enquanto um campo eletromagnético oscilante adveio apenas ao longo do século XIX, e constitui uma das revoluções mais importantes da física moderna. Curiosamente, uma vez compreendido os conceitos físicos envolvidos, o azul do céu pode ser explicado de uma forma bem acessível. O próprio Lorde Rayleigh apresentou seu resultado usando análise dimensional [40], conforme mostraremos abaixo. Porém, antes de analisarmos esta explicação, comecemos com uma constatação óbvia: percebemos o céu azul na presença do sol, de modo que entender o azul do céu passa por entender um pouco da luz que nossa estrela nos fornece diariamente. Este será o ponto de partida da nossa análise na próxima subseção. Para uma discussão mais detalhada remetemos o leitor à [41].



Figura 4.23: Céu azul. Figura retirada de https://br.freepik.com/fotos-gratis/paisagem-de-inverno-nevado-contra-o-ceu-azul-claro_4513663.htm (consultado em 11/06/2023).

4.5.1 Corpo negro e o espectro da irradiação solar

Boa parte do que vemos dos objetos ao nosso redor se deve à luz refletida. Contudo, ao aquecermos os corpos o suficiente percebemos que eles passam a emitir uma luz visível aos nossos olhos. Um exemplo está ilustrado na figura



Figura 4.24: Um metal a temperatura ambiente é percebido pelos nossos olhos apenas pela luz refletida. A parte incandescente na imagem acima corresponde a uma parte do metal que foi esquentada. Figura retirada de <https://en.wikipedia.org/wiki/Incandescence> (consultado em 17/07/2023).

4.24. A parte do metal que está suficientemente quente emite luz visível, enquanto as demais partes são visíveis aos nossos olhos apenas através da luz refletida pelo ambiente. Na realidade, todo corpo emite radiação, contudo para os corpos à temperatura ambiente a radiação emitida possui frequência abaixo do que nosso olho consegue determinar, denominado espectro infravermelho. Hoje em dia, inclusive, conseguimos fazer imagens a partir de detectores com sensibilidade no infravermelho. As imagens apresentadas na figura 4.25 permitem uma discussão muito rica em sala de aula. Nesta temos a mesma situação conforme detectada por dois detectores com sensibilidades em regiões distintas do espectro da luz. A imagem 4.25a representa um ho-

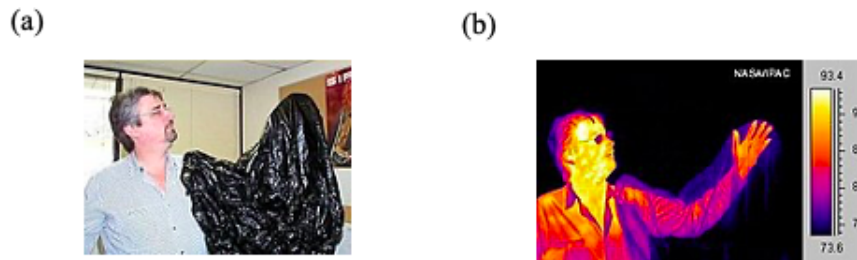


Figura 4.25: Um homem segurando um saco preto. Em (a) temos a imagem conforme detectada pelos nossos olhos, enquanto em (b) é a imagem registrada por um detector no infravermelho. Figura retirada de <https://en.wikipedia.org/wiki/Infrared> (consultado em 17/07/2023).

mem segurando um saco preto conforme nosso detector predileto - nosso olho - percebe. Já em (b) a imagem é apresentada conforme registrada por um detector cuja sensibilidade está na faixa do infravermelho que emitimos. Nesta imagem o código de cores é convencional, cada cor representa uma diferente frequência do infravermelho. Além de vermos o homem pela luz que ele emite, em vez do que ocorre em (a) onde o víamos em virtude da luz que ele refletia, há diversos outros aspectos interessantes de se perceber. Em primeiro lugar, note que a lâmpada que emite a luz visível que reflete no homem em (a) praticamente não emite no infravermelho, explicando o fundo escuro da imagem (b). Além disso, o vidro no óculos do homem, transparente para a luz visível não o é no infravermelho, ficando opaca - o exato oposto do que ocorre com o saco segurado pela mão do homem. Desta forma, vemos que a interação com a luz com um dado objeto é fortemente dependente da frequência envolvida. Uma pergunta natural é como determinar a radiação emitida por um corpo para uma dada temperatura. É intuitivo que corpos mais quentes emitam frequências mais altas, uma vez que esperamos que temperaturas mais altas se traduzam em maior vibração microscopicamente, e esperamos que se a matéria oscile com frequência mais alta então ela deve por sua vez produzir luz de frequência mais alta também. Mas dada uma temperatura há como estimar qual a frequência emitida? Curiosamente, desta pergunta aparentemente ingênua nasce um obstáculo intransponível para física newtoniana,

que demandaria a revolução que hoje atende pelo nome de mecânica quântica. Faremos aqui apenas algumas considerações bem gerais. Como ponto de partida fazemos a seguinte constatação - em equilíbrio térmico esperamos que o quanto um corpo emita de energia deva ser igual ao quanto absorve, caso contrário ele esquentaria ou esfriaria. A partir deste raciocínio e usando ferramentas bem gerais de termodinâmica, Kirchhoff mostrou em 1859 que há um balanço exato para cada frequência do espectro, demonstrando que a razão entre a energia emitida e o coeficiente de absorção é a mesma para qualquer corpo. Em outras palavras, Kirchhoff demonstrou que a razão entre o quanto um corpo emite e o seu coeficiente de absorção é uma função universal da frequência e da temperatura. Aqui entra então a figura do corpo negro.

Por definição, o corpo negro é um corpo que absorve toda luz que incide nele, ou seja, um corpo que não reflete a luz. Por conta disso, a única luz que pode ser vista desse corpo é devido a sua emissão de radiação. Embora o corpo negro seja uma idealização, o teorema de Kirchhoff fez com que boa parte da comunidade científica se dedicasse a estudá-lo. Afinal, determinando como este corpo idealizado emite energia, compreenderíamos, em virtude da universalidade demonstrada por Kirchhoff, a relação entre a emissão e absorção para qualquer corpo que exista! Para além disto, há situações em nosso cotidiano que em uma primeira aproximação a descrição de corpo negro é bem satisfatória, como é o caso da lâmpada incandescente e, melhor ainda, do Sol. O nome corpo negro não significa que o corpo seja escuro, afinal ele emite radiação. O nome se refere ao fato de que ele não reflete luz, tudo é absorvido. Jožef Stefan, ao fazer seus estudos sobre corpo negro, percebeu que quando o corpo era aquecido o brilho do corpo negro aumentava de intensidade e que essa, de maneira geral, era diretamente proporcional a quarta potência da temperatura. Ou seja, corpos mais quentes emitem maior quantidade de radiação, o que foi descrito da Lei de Stefan-Boltzmann. Todavia, apesar do esforço de muitos dos grandes cientistas da época, não se conseguiu estabelecer teoricamente nenhum modelo capaz de reproduzir ainda que qualitativamente os dados empíricos. Na figura 4.26 estão representadas curvas para a emissão por corpos negros em diferentes

temperaturas, bem como a previsão da teoria clássica (a qual explicaremos melhor mais adiante). Note, inicialmente, que as curvas possuem um pico, indicando que há uma frequência predominante emitida. Destacamos também que quanto maior a temperatura, maior esta frequência dominante emitida (observe que o gráfico 4.26 está em função do comprimento de onda). Além disso, a área abaixo do gráfico (correspondente a somar a energia emitida para todas as comprimentos de onda, ou seja, o total de energia emitida pelo corpo) é maior quanto maior a temperatura do corpo. Estas considerações estão de acordo com os nossos comentários anteriores. O caminho histórico foi que após muito esforço de diferentes cientistas, Max Planck enfim em 1900 conseguiu obter teoricamente uma curva que ajustava bem os dados experimentais. Neste processo apresentou uma hipótese cujo conteúdo ficaria claro apenas após alguns anos e muito debate entre diversos cientistas. Este era o início da teoria quântica, um dos grandes marcos do pensamento humano. Foge aos nossos propósitos pormenorizar esta discussão. Remetemos o leitor interessado ao detalhado e instigante livro de Thomas Kuhn [42]. Todavia, podemos apreciar alguns dos pontos essenciais do trabalho planquiano por argumentos bem gerais, empregando análise dimensional [43]. O ponto central é o fato da curva que desejamos descrever ser uma função universal. Isto significa que ela não pode envolver nenhum parâmetro, geométrico ou físico, de nenhum corpo. Ou seja, a curva que desejamos determinar há de ser função da frequência, da temperatura e das constantes universais apenas. Tal função apresenta um máximo, correspondendo ao pico de emissão que destacamos anteriormente. Denotemos por ν_p a frequência deste pico. Esta deve ser, por sua vez, ser função apenas de T e de constantes universais. Dispomos da constante de Boltzmann, $k_B = 1.38 \times 10^{-23} J/K$, de forma que $k_B T$ tem dimensão de energia. Contudo, ainda que empregássemos todas as constantes universais então conhecidas na física não se consegue montar uma combinação com dimensão de frequência. Em outras palavras, não há uma escala de natural de frequência na física então conhecida que pudesse ser universal. Com efeito, ao observarmos a previsão clássica na figura 4.26 chama atenção o fato de que ela é uma curva monotônica, isto é, não há nenhuma frequência que se destaque com respeito às demais. Desta forma, é

necessário a inclusão de uma nova constante universal, e com ela uma nova física. Há neste ponto diferentes caminhos que poderíamos tomar, mas o mais conveniente é definir esta nova constante, a qual denotaremos por h , de forma que $k_B T/h$ tenha dimensão de frequência, de modo que h deve ter dimensão de Energia x Tempo. As curvas nos indicam ainda que a previsão clássica funciona melhor para altos comprimentos de onda (baixas frequências, $h\nu \ll k_B T$), falhando drasticamente para pequenos comprimentos de onda. Aqui entra a hipótese do *quantum*, que constitui a essência central do trabalho de Planck. Suporemos que a luz é emitida não de forma contínua mas sim em pacotes de energia. A energia contida em cada pacote é dependente da frequência e vale $h\nu$ (com a nossa nova constante podemos justamente associar uma escala de frequência com uma escala de energia de forma que não faça referência a nenhuma propriedade específica de nenhum corpo). Para frequências pequenas ($h\nu \ll k_B T$) tal discretização na emissão de energia é imperceptível, de modo que neste limite a teoria clássica e a nova teoria devem fornecer o mesmo resultado. Como vimos acima, neste limite a predição clássica reproduz bem os resultados. Para entender o que ocorre no limite oposto, quando a quântica se faz presente, necessitamos de um ingrediente adicional. Quando corpos em contato estão em equilíbrio térmico, a energia deles é conservada apenas na média, pois eles trocam energia continuamente. Na média, a energia desvia de seu valor médio por um valor da ordem de $k_B T$. Aqui temos novamente uma constante universal trazendo consigo uma nova teoria física, conhecida como mecânica estatística, que permite relacionar uma escala de temperatura com escalas de energia. Um resultado central da teoria da mecânica estatística clássica é que no equilíbrio térmico cada grau de liberdade possui a mesma energia na média, com valor dado por $k_B T/2$. Intuitivamente, isto se dá pois até se atingir o equilíbrio térmico o sistema passa por diversas colisões e interações, caso um grau de liberdade tivesse muito mais energia do que os demais, ele na média perderia energia e vice-versa. Em nosso caso, estamos investigando o equilíbrio térmico entre a luz e os corpos. Quais são os graus de liberdade da luz? Desde nossos experimentos na óptica geométrica com prismas vimos que podemos pensar a luz branca como a superposição de diferentes cores, e neste capítulo vimos

que estas correspondem a frequências com a qual a onda luminosa vibra. Uma dada frequência não identifica exclusivamente um grau de liberdade, uma vez que para uma mesma frequência podemos ter ondas viajando em qualquer direção do espaço. Definimos o vetor \mathbf{k} de tal maneira que sua direção indique a direção na qual a onda viaja e cujo módulo seja dado por $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$, onde λ é o comprimento de onda. \mathbf{k} é conhecido como vetor de onda é constitui o exato análogo espacial do que a frequência representa para o tempo. Empregando $\omega = 2\pi f$, podemos verificar que a relação $c = \lambda f$ se traduz em $\omega = |\mathbf{k}|c$. Uma onda com ω e \mathbf{k} bem definidos corresponde a uma onda que vibra temporal e espacialmente de forma periódica e que se propaga em uma direção bem definida, como é o caso, em uma primeira aproximação, da luz de um laser. A rigor, para estabelecermos univocamente o grau de liberdade da luz precisamos além de ω e \mathbf{k} discutir a polarização. Omitiremos completamente isto já que não afetará em nada o ponto que buscamos estabelecer nesta seção. Para a teoria clássica, se um modo de frequência alta inicia com pouca energia ele iria crescendo até atingir o valor $k_B T/2$ previsto pela equipartição de energia. Fisicamente, a ideia é que a amplitude de vibração da onda luminosa iria aumentando até ter a energia que lhe cabe pela equipartição. Classicamente isto não representa um problema, pois a energia pode variar continuamente. A hipótese de Planck, contudo, tem uma consequência drástica para as frequências altas. Se $h\nu \gg k_B T$, a amplitude mínima de vibração para esse modo da luz já é demasiadamente energético para o que os corpos em volta podem oferecer a esta temperatura! Desta forma, as frequências altas são desligadas, isto é são graus de liberdade congelados que não participam da dinâmica. Este é o padrão que observamos na figura 4.26, não há emissão para frequências altas (pequenos comprimentos de onda). Resta apenas discutirmos o porquê da previsão clássica apresentar uma emissão que cresce com a frequência sempre. Vimos por argumentos dimensionais que não pode ter máximos nem mínimos na teoria clássica, mas porque o gráfico não é uma constante, por exemplo. Isto novamente pode ser compreendido via teorema da equipartição. Para uma dada frequência, há infinitos vetores de onda possíveis, dados por $\omega = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}c$, definindo uma superfície de raio ω/c no espaço k . Assim, a quantidade de graus de

liberdade para uma dada frequência cresce com a área desta esfera, isto é, com ω^2 . Como cada grau de liberdade recebe $k_B T$ de energia, esperamos classicamente que a frequência seja proporcional à ν^2 , que é exatamente o comportamento apresentado na figura 4.26. Destacamos que há inúmeras sutilezas que não abordamos acima: (i) como contar os graus de liberdade se há um contínuo de \mathbf{k} ? (ii) como justificar mais rigorosamente o teorema da equiparticipação de energia? Estes são tópicos mais avançados e cobertos em cursos usuais de mecânica estatística. Nosso ponto aqui foi apenas o de mostrar como podemos fazer uma primeira abordagem capturando alguns ingredientes essenciais sem precisar de nada extremamente técnico. Em resumo, para baixas frequências o corpo emite proporcionalmente à ν^2 , em virtude de cada vez mais graus de liberdade estarem pegando energia do banho térmico. Após um pico, para uma frequência da ordem de $k_B T/h$, há um desligamento da emissão em virtude do quanto de energia que se pode trocar ser muito pequeno comparado com a mínima energia de transição para esta frequência do campo. Em particular, a frequência do pico é da ordem de $k_B T/h$. Com o conhecimento da frequência do pico de uma estrela, por exemplo o nosso sol, e das constantes k_B e h podemos então determinar a temperatura da estrela!

Após esta abordagem sobre a radiação do corpo negro, é possível entender o primeiro passo do porquê da coloração azulada do céu. A emissão da radiação espectral feita pelo Sol é mostrada na figura 4.27. No entanto, ao analisar a figura 4.27 pode se ver que o comprimento de onda mais emitido pelo sol é referente a cor verde. Então por que o céu não é visto na cor esverdeada? Os próximos dois passos vão sanar essa dúvida e deixar claro o porquê do céu azulado.

4.5.2 O espalhamento da luz

O segundo passo é referente ao espalhamento da luz, que é um processo de interação entre luz e a matéria. Nesse processo, a energia da onda eletromagnética, que chega em uma direção, é absorvida pela matéria para posteriormente ser reemitida em diversas direções. O espalhamento pode

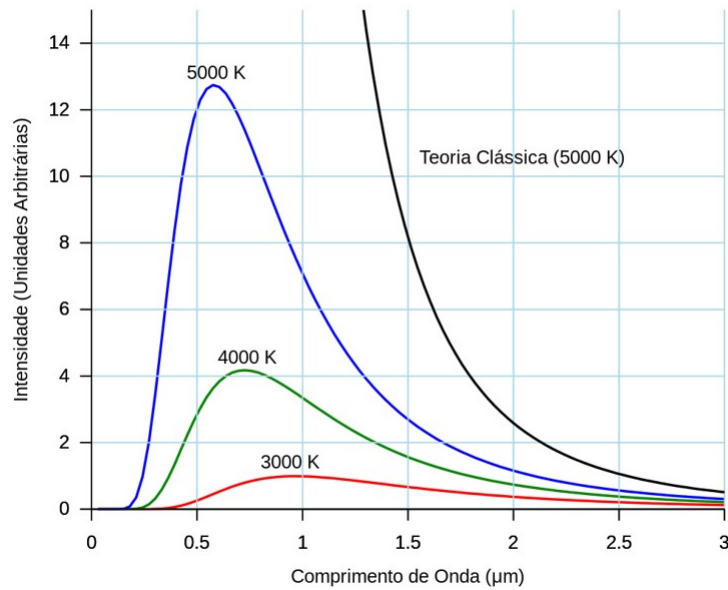


Figura 4.26: Gráfico que coloca a intensidade de irradiação do corpo negro em função do comprimento de onda. Figura retirada de https://pt.wikipedia.org/wiki/Catástrofe_do_ultravioleta (consultado em 11/06/2023).

ocorrer de diversas formas, dependendo do tipo de partícula e de seu tamanho em relação ao comprimento de ondas. A figura 4.28 mostra de forma simplificada como ocorre o espalhamento da luz. No caso desta seção, em que o objetivo principal é mostrar o porquê de o céu ser azulado, deve se considerar partículas muito pequenas da ordem de angstrom (10^{-10} m), que é a ordem dos tamanhos característico das moléculas que constituem a atmosfera; e o comprimento de onda da ordem de 10^{-6} m, que como já vimos na seção 4.1.1, é a ordem de grandeza da luz visível.

A aproximação a ser utilizada levará em consideração que o comprimento de onda é muito superior ao tamanho das partículas, regime no qual o espalhamento é conhecido como espalhamento de Rayleigh, em homenagem ao físico inglês Lord Rayleigh que pela primeira vez apresentou este tratamento [40]. Lord Rayleigh apenas com análise dimensional e argumentos bem gerais, conseguiu chegar à relação de que a intensidade da radiação espalhada é inversamente proporcional a quarta potência do comprimento de

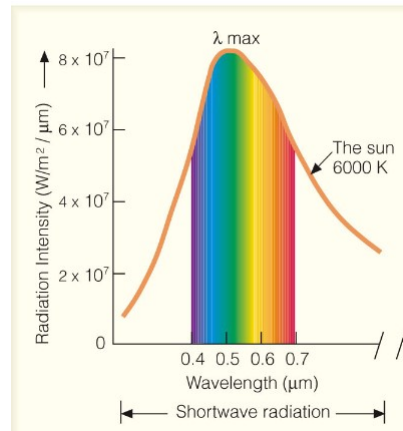


Figura 4.27: Intensidade da radiação emitida pelo Sol em função do comprimento de onda. Figura retirada de <https://atmos.washington.edu/~hakim/101/radiation/> (consultado em 11/06/2023).

onda ($I \propto \lambda^{-4}$). Para chegar a essa dedução, Lord Rayleigh imaginou que a energia espalhada nestas circunstâncias poderia depender de alguns fatores: a amplitude do campo elétrico incidente na partícula (E_0), o volume da partícula (V), a velocidade da luz no meio (c), o comprimento de onda (λ). A intensidade emitida é quadrática nos campos, como acontece de maneira bem geral na física ondulatória. Por conservação de energia, esperamos que a intensidade espalhada por uma molécula caia com $1/r^2$, uma vez que intensidade corresponde à energia por unidade de área. Assim, o módulo do campo elétrico espalhado por cada átomo deve cair com o inverso da distância.

$$E_{\text{rad}} \propto \frac{1}{r}. \quad (4.2)$$

Um campo elétrico que cai com $1/r$ é conhecido como campo de radiação, por isto usamos o subscrito E_{rad} . Ele é possível apenas na situação em que tenhamos cargas aceleradas. Na eletrostática, por exemplo, vale a lei de Coulomb pela qual o campo elétrico cai com o inverso do quadrado da distância. Como o comprimento de onda da luz incidente é muito maior do que o tamanho da molécula, esperamos que o campo afete da mesma forma todas as cargas contidas na molécula. Quanto mais carga presente, mais intenso esperamos que seja o campo espalhado. Desta forma, assumimos que



Figura 4.28: Luz sendo espalhada ao interagir com a matéria presente na atmosfera. Figura retirada de <https://circuitglobe.com/rayleigh-scattering.html> (consultado em 11/06/2023).

E_{rad} deve ser proporcional ao volume da molécula,

$$E_{\text{rad}} \propto \frac{E_0 \cdot V}{r}. \quad (4.3)$$

Por análise dimensional, não é possível colocar a velocidade da luz na relação, já que o termo temporal não seria cortado. A dimensão do lado direito da relação de proporcionalidade acima não é de campo elétrico, tendo um fator quadrático de comprimento a mais no numerador. A única escala de comprimento ainda não usada é o comprimento de onda da luz, de modo que por argumentos dimensionais podemos afirmar que

$$E_{\text{rad}} = \frac{k \cdot E_0 \cdot V}{\lambda^2 \cdot r}, \quad (4.4)$$

na qual k é uma constante adimensional. Como a intensidade é proporcional ao quadrado do campo ($I \propto E_0^2$), é possível deduzir que a intensidade da luz espalhada é inversamente proporcional a quarta potência do comprimento de onda da luz incidente.

Partindo da aproximação do espalhamento de Rayleigh, se chega que os menores comprimentos de onda da luz são reemitidos pelas partículas com maior intensidade, ou seja, como é possível ver na figura 4.29, que retrata o espectro eletromagnético da luz de acordo com o comprimento de onda, a

cor mais espalhada é o violeta e a menos espalhada é o vermelho. Então por quê o céu não é visto na cor violeta? A próxima seção, que é o último passo, deixará claro o motivo do céu não ser violeta ou verde e se apresentar na cor azulada.

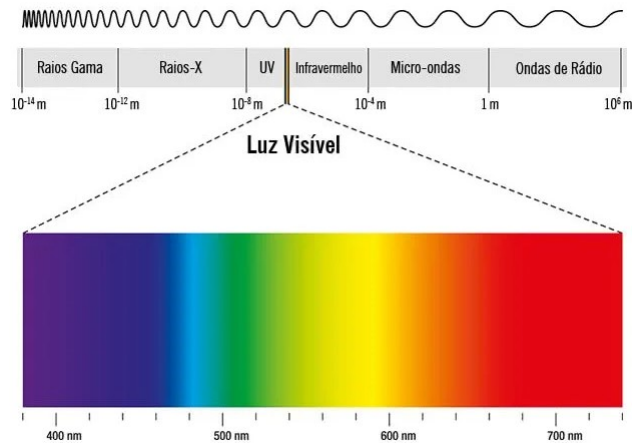


Figura 4.29: Espectro das ondas eletromagnéticas. Figura retirada de <https://www.todamateria.com.br/espectro-eletromagnetico/> (consultado em 11/06/2023).

4.5.3 A visão humana

Dentro do olho humano existem células especializadas em reconhecer os comprimentos de onda da luz que chegam até elas e que enviam impulsos elétricos até o cérebro para que este consiga processar estes sinais e fazer a percepção das cores. Essas células são chamadas de cones de luz, que se apresentam em três tipos: cones L (*large*), sensíveis aos grandes comprimentos de onda; cones M (*medium*), sensíveis aos médios comprimentos de onda; e cones S (*short*), sensíveis aos pequenos comprimentos de onda. A sensibilidade de cada cone em função dos comprimentos de onda da luz é representado na figura 4.30. Levando em consideração que a proporção desses cones no olho humano não se encontra de forma igualitária, e fazendo um somatório da sensibilidade de todos os cones, se chega a um gráfico de sensibilidade geral do olho humano, como é mostrado na figura 4.31. Vemos que o olho

possui boa sensibilidade para a detecção do azul, do verde e do vermelho. Contudo, a nossa sensibilidade decai rapidamente na região do violeta. E por esta razão não vemos o céu a nossa volta como violeta.

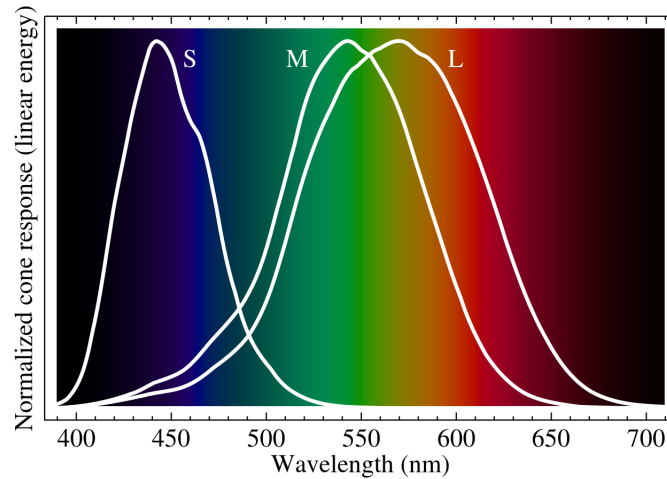


Figura 4.30: Intensidade captada pelos cones de luz. Figura retirada de https://en.wikipedia.org/wiki/Color_vision (consultado em 11/06/2023).

4.5.4 Como enxergamos o céu

Agora sim, com as explicações das três subseções anteriores, é possível deduzir o motivo da coloração do céu. Apesar de a luz mais emitida pelo sol ser a de cor verde, ao adentrar a atmosfera, as cores mais espalhadas são referentes aos menores comprimentos de onda: azul e violeta. No entanto, o olho humano é mais sensível ao azul, o que faz que se enxergue o céu na cor azulada, como é demonstrado na figura 4.32. No entanto, no amanhecer ou próximo ao por do sol, o céu se mostra na cor avermelhada ou alaranjada. Esses três fatores também explicam essa coloração? Sim, a explicação é exatamente a mesma. O ponto é que, ao olhar o céu próximo à direção em que o sol está, em um horário no qual ele se encontra próximo ao horizonte, a luz solar percorre uma distância muito maior em relação a quando o sol está a pino e o azul, por ser mais espalhado, é tirado do nosso caminho, deixando a luz que vem do sol desviada para o vermelho, conforme indica a figura 4.33.

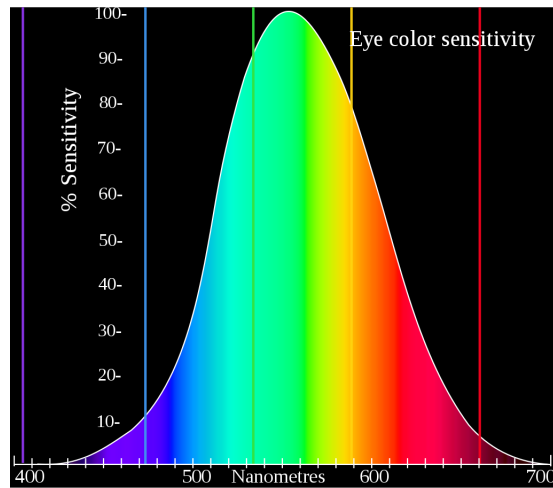


Figura 4.31: Sensibilidade geral do olho humano em relação as cores. Figura retirada de https://en.wikipedia.org/wiki/Color_vision (consultado em 11/06/2023).

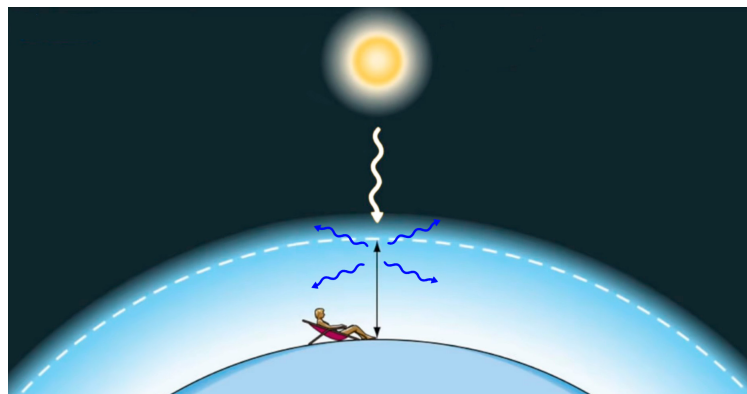


Figura 4.32: Observador vendo o céu azul.

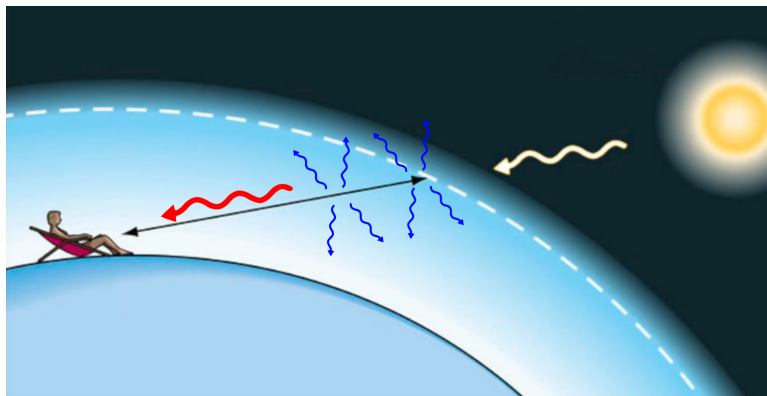


Figura 4.33: Observador vendo o céu alaranjado.

4.6 Escalas

Neste capítulo, dedicado à óptica ondulatória, foram demonstradas situações diversas em que não é possível utilizar a óptica geométrica. Argumentamos que a luz se propaga como uma onda de natureza eletromagnética e que diversos fenômenos conseguem ser explicados a partir dessa constatação. No entanto, todos os exemplos que estudamos nos capítulos precedentes requerem apenas a óptica geométrica e não necessitam em nenhum momento de um tratamento ondulatório para a luz. Por conta disso, é possível limitar até que ponto a óptica geométrica é satisfatória? Esse é o ponto que gostaríamos de discutir nesta última seção deste capítulo. Para a interação em que os obstáculos possuem ordem de grandeza muito maior do que o comprimento de onda, a óptica geométrica é satisfatória para a análise dos fenômenos. Entretanto, quando os obstáculos passam a ter ordem de grandeza similar ao comprimento de onda, os fenômenos da difração e interferência começam a surgir e a apresentar um caráter ondulatório da luz. Para finalizar, quando se tem um obstáculo com dimensões muito inferiores em relação ao comprimento de onda, dizemos que há o espalhamento da luz, que também é um fenômeno de caráter ondulatório. A figura 4.34 esquematiza esta discussão.

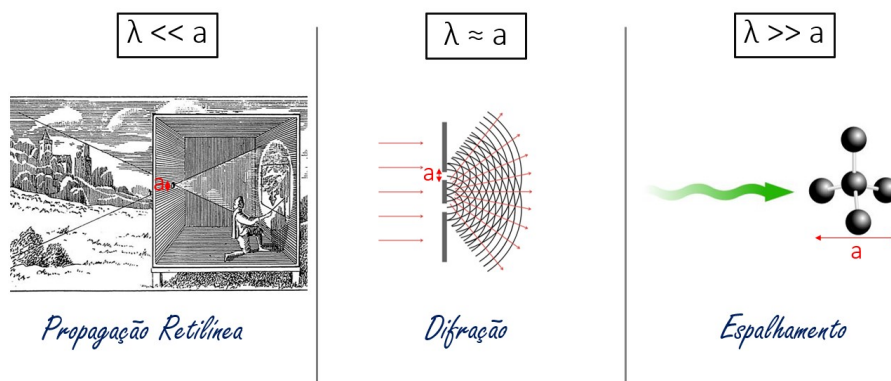


Figura 4.34: Escalas para o estudo óptico

Assim, embora a interação da luz com a matéria esteja toda encapsulada no conjunto de quatro equações de Maxwell suplementadas pela força de Lorentz, a fenomenologia apresentada é dramaticamente diversa a depender

das escalas de comprimento envolvidas. Para uma análise física é, portanto, muito conveniente separar a discussão nos diferentes casos, como fizemos ao longo desta dissertação.

Capítulo 5

Material produzido e sua aplicação

O objetivo central que une todos os materiais produzidos é mostrar uma sequência didática diferenciada das que são encontradas nos livros convencionais utilizados para o Ensino Médio. Há dois aspectos que nos motivaram a propor um material diferente. Primeiramente, o ensino de óptica geométrica e o de ondulatória são em geral desconectados no ensino médio, embora a luz apareça em ambos. Desta forma, não se aborda a natureza da luz e não fica claro o domínio de validade de cada teoria. Acreditamos, justamente, que a luz possa ser o fio condutor e permita que o ensino de ondas comece logo após o ensino de óptica geométrica, a partir de fenômenos que sugerem uma quebra da validade da óptica geométrica. O segundo aspecto que nos motivou foi o de buscar uma base conceitual que permitisse que reduzíssemos o número de postulados, o que fizemos a partir do princípio de Fermat. Tal princípio permite uma compreensão de todos os aspectos da óptica geométrica e seus efeitos como buscamos mostrar na dissertação.

O material produzido para este trabalho consiste em uma sequência didática dividida em três partes que pretende apresentar, para alunos do 3º ano do ensino médio, o estudo da óptica a partir dos fenômenos atmosféricos. Estes são fenômenos bonitos e presentes no cotidiano dos estudantes, de modo que parte das discussões que fazemos já são eventualmente curiosida-

des dos próprios estudantes. Acreditamos que a razão pela qual eles sejam pouco abordados seja justamente a dificuldade envolvida. No entanto, o uso do princípio de Fermat e tecnologias abundantes atualmente, como calculadoras gráficas, permite pelo menos uma compreensão qualitativa do que ocorre motivando uma discussão profunda dos principais conceitos da óptica geométrica. Além disso, cremos que este material também pode ser útil para disciplinas de física básica no ensino superior.

Para cada tópico deste trabalho foi feita uma apresentação em *Powerpoint* para ser apresentada aos alunos, um material escrito para capacitar os professores e um vídeo, hospedado no *Youtube*, que pode auxiliar o professor na aplicação do material voltado aos alunos ou também pode ser um mecanismo para introduzir uma metodologia ativa como a sala de aula invertida ou a instrução por pares, por exemplo. Nos materiais foi priorizado o diálogo com o aluno através de perguntas chaves e imagens provocativas sobre os fenômenos ópticos. Todos os materiais citados neste parágrafo podem ser encontrados na página do programa do Mestrado Profissional de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro e em *links* nos apêndices desta dissertação. Recomendamos que o uso do material seja integral seguindo a ordem sugerida (Princípio de Fermat - Arco-íris - Óptica Ondulatória). No entanto, é possível utilizar os materiais separadamente de acordo com os anseios do professor que o utilizará, já que não há uma forte dependência entre eles. Também recomendamos, para as apresentações, a utilização do *Microsoft Powerpoint 2021*, ou versão superior, para que todas as transições e animações desenvolvidas sejam executadas. Como se trata de um *software* que necessita de licença, também será disponibilizado, para cada um dos tópicos, arquivos no formato PDF com as apresentações.

5.1 O material sobre o Princípio de Fermat

O material sobre Princípio de Fermat para os discentes é uma apresentação em *Powerpoint*, cujo *link* se encontra no Apêndice C, que visa trazer debates sobre o Princípio de Propagação da Luz. Este material tem o objetivo de mostrar ao aluno uma lei abrangente para a propagação da luz. Para

motivar os alunos inicialmente, a apresentação de *slides* mostra as figuras 2.30, 2.26 e 2.33 que ilustram situações de miragem e questiona se esses fenômenos podem ser explicados pela óptica geométrica. Posterior a isso, são mostradas as imagens 2.1 e 2.2 que questiona o aluno como ele poderia dizer que a luz se propaga. A maioria dos alunos chega facilmente à conclusão de que a luz se propaga em linha reta e a partir disso criamos a primeira hipótese: de que a luz se propaga minimizando a distância entre dois pontos. Na sequência, são mostradas as imagens 2.4, 2.5 e 2.6. A partir dessas imagens questionamos os alunos se ainda podemos afirmar se a luz se propaga de forma a minimizar a distância. Para esses casos é possível inferir que a luz pode sofrer um desvio ao mudar de meio. Com isso, a partir da analogia da situação do menino se afogando no mar e a salva-vidas, em que ela prioriza o menor tempo de resgate, conseguimos chegar em uma hipótese de que a luz se propaga entre dois pontos minimizando o tempo. Vale ressaltar que esta hipótese também é válida para os casos das figuras 2.1 e 2.2. Por fim, ao mostrar a imagem 2.19, questionamos o fato de vermos duas imagens, já que a luz procura se propagar entre dois pontos minimizando o tempo e então chegamos ao postulado mais aceito para o Princípio de Fermat: dentre todos os caminhos possíveis entre dois pontos, a luz elege aquele que minimiza, **localmente**, o tempo entre eles.

O material preparado para os professores, presente no Apêndice B deste trabalho, é um texto em que procuramos capacitar o professor para utilizar a apresentação da forma planejada para esta sequência didática. Trata-se de um recurso abrangente e acessível, projetado para fornecer uma compreensão sólida dos conceitos fundamentais da óptica geométrica. Nele, são exploradas as principais ideias por trás do Princípio de Fermat, juntamente com imagens e perguntas, que são as mesmas feitas no material dos discentes.


5.1.1 A aplicação do material do princípio de Fermat

A aplicação deste material foi feita remotamente para 17 alunos. Dentre os presentes, estavam 14 alunos que cursavam a terceira série do ensino médio, 2 alunos que cursavam a segunda série do ensino médio e uma aluna que

cursava o quarto período do curso de Bacharel em Física na UFRJ. Só para constar, e sem nenhum valor estatístico, foram enviada, pelo *Google Forms*, duas perguntas para que os alunos respondessem anonimamente antes e depois da instrução. A primeira pergunta colocava uma imagem que aparecia uma miragem no asfalto quente e o aluno tinha de identificar qual o principal fenômeno óptico envolvido naquela miragem. Dentre as alternativas apareciam os seguintes fenômenos: reflexão, reflexão total, refração (alternativa correta) e dispersão. Na segunda pergunta, que na verdade era para completar uma frase, o enunciado dizia: "A luz, ao se propagar entre dois pontos, irá percorrer o caminho que minimiza". Dentre as alternativas que os alunos podiam escolher apareciam as seguintes alternativas: a distância, o tempo (alternativa correta), o gasto de energia e a quantidade de movimento dos fótons. Houve, em relação às duas perguntas, um aumento percentual de acerto. No entanto, isso não denota que houve um aprendizado significativo por parte do aluno. Isso só poderia ser medido caso a mesma pergunta fosse feita aos mesmos alunos após um longo tempo e de fato o aumento percentual fosse relevante em relação ao percentual de antes da instrução. A figura 5.1 mostra como as perguntas foram apresentadas aos alunos e a figura 5.2 como foi o percentual de acerto para cada pergunta antes e depois da instrução.

Como é possível ver, o percentual de acerto do questionário após a instrução foi maior do que aquele feito antes. Apesar disso não medir se de fato houve um aprendizado significativo por parte do corpo discente, é possível ver que os alunos compreenderam e absorveram (pelo menos naquele momento) o conteúdo abordado.

Durante a formação de uma miragem, qual o principal efeito óptico envolvido no processo? *



Reflexão.
 Reflexão total.
 Refração.
 Dispersão

A luz, ao se propagar entre dois pontos, irá percorrer o caminho que minimiza *

a distância.
 o tempo.
 o gasto de energia.
 a quantidade de movimento dos fótons.

Figura 5.1: Perguntas feitas aos alunos antes e depois da instrução sobre os princípios de propagação da luz.

% de acerto	Questão 1	Questão 2
Antes	65%	53%
Depois	88%	88%

Figura 5.2: Percentual de respostas de cada pergunta sobre os princípios de propagação da luz antes e depois da instrução.

5.2 O material sobre o Arco-íris

O segundo material voltado para os discentes, em que o tema central é o arco-íris, também é uma apresentação em *Powerpoint*, cujo *link* se encontra no Apêndice C. Este material traz uma aplicação da óptica geométrica em um fenômeno que é bastante democrático, já que é muito provável que todos os alunos já tenham visto o arco-íris pelo menos uma vez na vida. Este material é voltado para que o aluno compreenda detalhadamente a formação dos arco-íris e para isso são feitas sete perguntas, que seguem exatamente esta ordem:

“O que é necessário para se formar o arco-íris?”, “De onde surgem as cores do arco íris?”, “A posição do Sol influencia na formação do arco-íris?”, “Por que um arco? ”, “Por que vemos um arco e não uma circunferência inteira?”, “O que é e como se forma um arco-íris secundário?”, “Por que não vemos um arco-íris de ordem zero?”.

O objetivo deste material é trazer mais conhecimento sobre esse fenômeno que é, no mínimo, encantador e pode enriquecer o debate sobre a óptica geométrica. Inclusive, este fenômeno envolve tanto reflexão quanto refração, contemplando todos os pontos centrais da óptica geométrica.

O material deste tópico voltado para os docentes segue a mesma linha do que foi feito para o Princípio de Fermat. É uma ferramenta de capacitação para que o professor consiga potencializar a experiência do aluno ao aprender sobre o fenômeno do arco-íris. Este material pode ser encontrado no Apêndice B desta dissertação.

5.2.1 A aplicação do material sobre o Arco-Íris

Dentre os três materiais aplicados, esse foi o que os alunos ficaram mais empolgados e participativos durante a aula. Saber que o Sol tem que estar atrás do observador e que o arco-íris pode ser uma circunferência completa foram os pontos altos da aula. Novamente, foi realizado um processo de ensino à distância utilizando o material para um grupo de 14 estudantes. Dentre os participantes, 12 estavam matriculados na terceira série do ensino médio, uma na segunda série do ensino médio e uma aluna estava no quarto

período do curso de Bacharelado em Física na UFRJ. Vale ressaltar que, sem o propósito de fazermos nenhuma análise estatística, foram enviadas duas perguntas anonimamente via *Google Forms* para que os alunos respondessem antes e depois da aula. A primeira pergunta questionava quais fenômenos ópticos ocorriam em pontos especificados desde a entrada, até a saída da luz em uma gotícula. Já a segunda colocava duas imagens e perguntava em qual delas era possível enxergar o arco-íris. A figura 5.3 mostra como foram apresentadas essas perguntas aos alunos. O percentual de acerto para cada pergunta antes e depois da aula pode ser visto na figura 5.4.

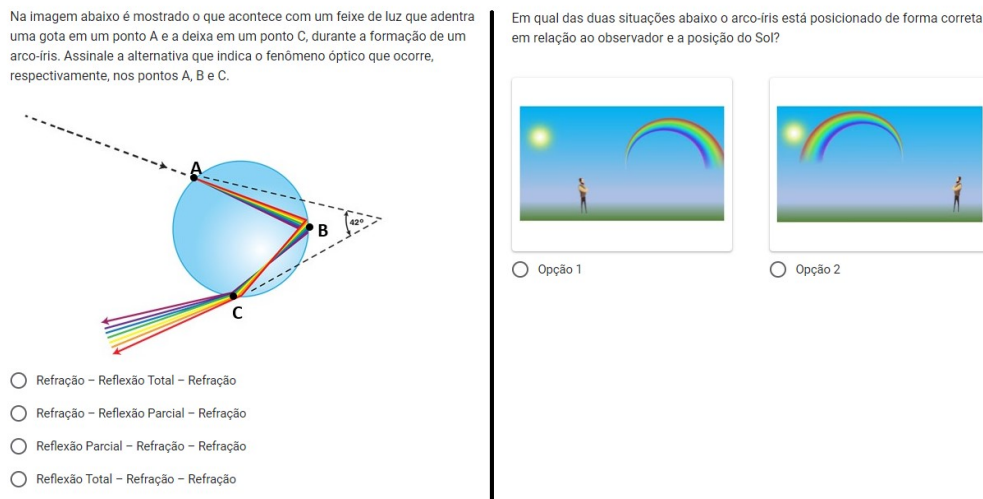


Figura 5.3: Perguntas feitas aos alunos antes e depois da instrução sobre o arco-íris.

Seguindo os mesmos critérios das perguntas feitas aos alunos sobre o Princípio de Fermat, vimos um aumento percentual bem significativo para estas perguntas sobre o arco-íris. Como podemos ver, obtivemos, após a instrução, 93% de acerto para a primeira pergunta e 100% de acerto para a segunda pergunta. Portanto acreditamos que a empolgação dos alunos durante essa aula foi refletida nesse bom resultado percentual.

% de acerto	Questão 1	Questão 2
Antes	57%	71%
Depois	93%	100%

Figura 5.4: Percentual de acertos de cada pergunta sobre o arco-íris antes e depois da aula.

5.3 O material sobre a óptica ondulatória

Este último material, assim como os outros, é uma apresentação em *Powerpoint*, cujo *link* se encontra no Apêndice C, voltada aos discentes e apresenta alguns fenômenos que colocam em xeque a teoria da óptica geométrica, já que trazem indícios da ocorrência da difração e da interferência. As figuras 4.1 e 4.2 são as imagens que introduzem esse debate de que a luz pode ser considerada uma onda para os alunos. A teoria da óptica ondulatória é desenvolvida com perguntas e imagens motivadoras que tem como objetivo fazer o aluno pensar além de fórmulas e conceitos postulados, como por exemplo: o motivo pelo qual não vemos a luz oscilar temporalmente e apenas espacialmente, o motivo de enxergarmos diferentes cores, o porquê de enxergarmos o céu azul, dentre outros. Vale ressaltar que ao fim do material não invalidamos a óptica geométrica, buscamos exatamente delimitar seu domínio de validade, reforçando em quais situações os fenômenos ópticos requerem uma descrição ondulatória.

O material voltado ao docente para este tópico também tem como objetivo capacitar o professor através de um roteiro, presente no Apêndice B. Talvez para esse material se tenha o maior desafio para o docente, já que são temas delicados e com certas sutilezas como, por exemplo, o motivo de não vermos a luz oscilar temporalmente e o Espalhamento de Rayleigh.

5.3.1 A aplicação do material sobre a óptica ondulatória

A instrução sobre óptica ondulatória, assim como as outras duas, foi ministrada remotamente e contou com a presença de 9 alunos, todos eles matriculados na terceira série do Ensino Médio. Esta aula, segundo o relato dos alunos, foi a de menor interesse deles. A única parte em que houve um pouco mais de interesse e participação foi no momento em que foi questionado o motivo de céu ser azul. Um dos alunos fez o seguinte comentário após a aplicação do material: **"se não fosse a aula de hoje eu sairia do ensino médio sem saber porque o céu é azul"**. Esse fator talvez demonstre que a física aplicada ao ensino médio não esteja aproveitando ao máximo os fenômenos que os alunos visualizam no seu dia a dia para aumentar o interesse deles pela física. Para esse material, não foi feita qualquer tipo de pergunta antes ou depois da instrução por acharmos que esse assunto seria um pouco mais delicado para qualquer pergunta anterior a instrução.

Capítulo 6

Considerações Finais

Nesta dissertação, tive a oportunidade de desenvolver um material abrangente, destinado principalmente ao ensino médio, que explora a transição da óptica geométrica para a óptica ondulatória, utilizando como contexto motivador alguns fenômenos atmosféricos. Os três tópicos principais - Princípio de Fermat, Arco-Íris, e Óptica Ondulatória - foram selecionados para proporcionar aos alunos uma compreensão um pouco mais aprofundada acerca da natureza da luz e de suas interações com elementos presentes na atmosfera.

Frente a uma das motivações iniciais do trabalho que questionava qual a melhor ordem para tratar o estudo da luz, resolvemos nesse trabalho começar abordando os fenômenos atmosféricos que são esclarecidos pela óptica geométrica. À medida que foram mostrados fenômenos que envolviam difração e interferência, é apresentada a teoria ondulatória da luz. Quanto a isso não obtivemos nenhum problema ou questionamento por parte dos discentes por conta dessa escolha e acreditamos que pode ser uma sequência que pode ser utilizada desde que haja a transição adequada para essas duas teorias de como a luz se propaga.

A abordagem pedagógica adotada neste material buscou envolver os alunos através de perguntas motivadoras, objetivando despertar seu interesse por meio de fenômenos atmosféricos fascinantes, como a formação de arco-íris e miragens, por exemplo. Ao explorar os princípios fundamentais da óptica geométrica mostramos como o estudo é relevante para a explicação de

diversos fenômenos ópticos e chegamos à sua limitação, onde é necessário que a teoria ondulatória “entre em cena” para explicar fenômenos que envolvem a difração e a interferência.

Acredito que a abordagem adotada neste material tem potencial de ajudar o ensino da física nesta área, estimulando o pensamento crítico, a curiosidade científica e a compreensão dos fenômenos naturais. Espero que esse trabalho contribua para fortalecer a formação de novos cientistas que questionem como os fenômenos ao seu redor são formados.

Apêndice A

Funções trigonométricas para argumentos pequenos

Este apêndice é dedicado a explicar a aproximação das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente de ângulos pequenos. Essa aproximação é utilizada algumas vezes nesse trabalho. Em geral, as expressões obtidas neste apêndice são demonstradas a partir de ferramentas do cálculo diferencial, porém veremos nesta seção que é possível demonstrá-las com apenas um pouco de geometria. Para tanto usaremos como apoio a figura A.1. Nela é mostrada uma circunferência de raio 1 em que se destaca um setor circular menor destacado pelos pontos, A , O e B . Nesse setor é formado um arco \widehat{AB} cujo ângulo central 2α é extremamente pequeno, isto é $2\alpha \ll 1$, com α medido em radianos. Como o ângulo central vale 2α , infere-se que, em radianos, o arco \widehat{AB} também mede 2α . Como o ângulo é muito pequeno, é possível fazer uma aproximação e considerar o setor circular menor, anteriormente citado, um triângulo OAB em que o arco \widehat{AB} se torna um segmento de reta \overline{AB} , porém com o mesmo módulo de 2α .

Seguindo a demonstração, a figura A.2 mostra o traçado da bissetriz de triângulo AOB a partir do ângulo 2α no ponto O . Forma-se um novo triângulo OAC em que, de maneira aproximada, o lado \overline{OC} também pode ser considerado 1, já que é aproximadamente o raio da circunferência da figura A.1. Para finalizar, se utiliza os conceitos de seno, cosseno e tangente

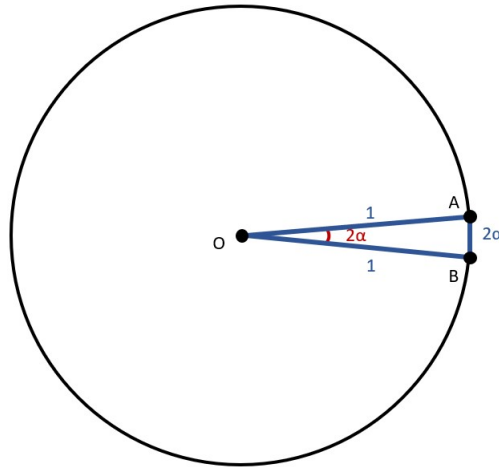


Figura A.1: Circunferência de raio 1 com uma seção circular AOB

no triângulo AOC e se obtém os valores como mostrados nas equações A.1, A.2 A.3.

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \approx \frac{\alpha}{1} = \alpha \quad (\text{A.1})$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \approx \frac{1}{1} = 1 \quad (\text{A.2})$$

$$\text{tan } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \approx \frac{\alpha}{1} = \alpha \quad (\text{A.3})$$

Com isso é possível concluir que quando $\alpha \ll 1$, se tem que $\text{sen } \alpha \approx \text{tan } \alpha \approx \alpha$ e $\text{cos } \alpha \approx 1$.

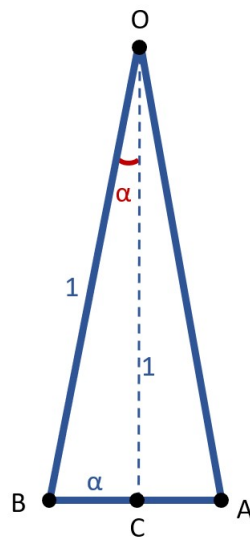


Figura A.2: Triângulo utilizado para fazer a aproximação das relações trigonométricas do ângulo α .

Apêndice B

Material para o Docente



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Instituto de Física

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física

Mestrado Profissional em Ensino de Física

Ensino de Óptica a Partir de Fenômenos Atmosféricos

Bruno Cezar Leandro Gimenez
Reinaldo Faria de Melo e Souza

Material instrucional associado à dissertação de mestrado de Bruno Cezar Leandro Gimenez, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Rio de Janeiro
Agosto de 2023

B.1 Introdução

Caro(a) professor(a),

É com grande entusiasmo que apresentamos a vocês este material didático focado em três temas ligados à óptica: o Princípio de Fermat, a Formação de Arco-Íris e a Óptica Ondulatória. Nossa intenção ao desenvolver esses materiais é fornecer recursos que possam auxiliá-lo no ensino desses conceitos de forma clara, envolvente e significativa para os estudantes. Para isso é usada uma abordagem um pouco mais interativa com os alunos através de imagens e perguntas provocativas.

No primeiro módulo, do Princípio de Fermat, mergulharemos nas bases da óptica geométrica, explorando o caminho óptico mínimo e a trajetória da luz em diferentes meios. Com ilustrações e questionamentos, deseja-se que os alunos compreendam como o princípio de Fermat é fundamental para a reflexão e a refração.

Na seção dedicada à Formação de Arco-Íris, investigaremos o fenômeno fascinante que ocorre quando a luz do sol interage com as gotas de água presentes na atmosfera. Exploraremos os princípios da refração e reflexão interna, permitindo que os estudantes desvendem a física por trás da formação desse espetáculo natural.

Por fim, abordaremos a Óptica Ondulatória, que se concentra nas propriedades ondulatórias da luz. Desde a natureza da luz até a o seu espalhamento, proporcionaremos aos alunos uma visão de quanto é necessário o tratamento ondulatório da luz. Em particular, veremos que algumas cores presentes em nosso cotidiano, como a de algumas borboletas e o azul do céu, requerem um tratamento ondulatório da luz para poderem ser compreendidas.

Na introdução de cada um dos módulos apresentados, serão disponibilizados via *links*: uma apresentação voltada para os alunos no formato pptx (*Powerpoint*) e um vídeo que demonstra a aplicação desta apresentação. Para as apresentações, é recomendado utilizar o *Microsoft Powerpoint 2021*, ou versão superior, para que todos os recursos que foram idealizados, como animações e transições, sejam aproveitados ao máximo. Já os vídeos podem exercer tanto a função de orientar vocês, professores, em como utilizar as

apresentações em *Powerpoint*, como também constituir um material introdutório para quem deseja realizar metodologias ativas como a instrução por pares ou a sala de aula invertida. Todos esses materiais podem ser encontrados na página do Mestrado Profissional em Ensino de Física da UFRJ (http://pef.if.ufrj.br/producao_academica/material_didatico.html).

Estamos seguros de que esse material poderá enriquecer suas aulas, tornando o ensino da física mais envolvente e compreensível para os alunos. Acreditamos que, ao compartilharmos o conhecimento e as melhores práticas, poderemos juntos inspirar a próxima geração de cientistas e engenheiros. Acreditamos que esse material seja um valioso recurso para suas aulas e que ajude a despertar o interesse de seus alunos pelo mundo fascinante da física. Esperamos que gostem desse material!

Bruno Gimenez

Reinaldo de Melo e Souza

B.2 O Princípio de Fermat

A natureza e a propagação da luz foram temas de debate e estudos durante séculos. Este material busca aprofundar a forma que a luz se propaga, utilizando como motivação a ocorrência de fenômenos ópticos e como eles podem ser explicados. Com esta finalidade, propomos uma sequência de questionamentos para o docente propor para a turma, refinando a cada debate a discussão e introduzindo os conceitos de óptica ao longo destes roteiros. Nosso fio condutor serão fenômenos cotidianos e a apresentação de imagens. Desta forma esperamos fomentar um ensino de óptica que seja didático e lúdico. Tomando como exemplo as figuras B.1, B.2, B.3 e B.4, é possível ver fenômenos ópticos que “enganam” nossos olhos, popularmente chamados de miragens. Para podermos compreender este instigante fenômeno, teremos de construir inicialmente uma base conceitual.



Figura B.1: Miragem em um deserto. - Retirado de <https://brasilecola.uol.com.br/fisica/miragens-no-alasca.htm> - Acessado em Abril de 2023.



Figura B.2: Miragem superior em alto mar. - Retirado de <https://www.abc27.com/news/photographer-captures-fata-morgana-on-lake-superior/> - Acessado em Abril de 2023.

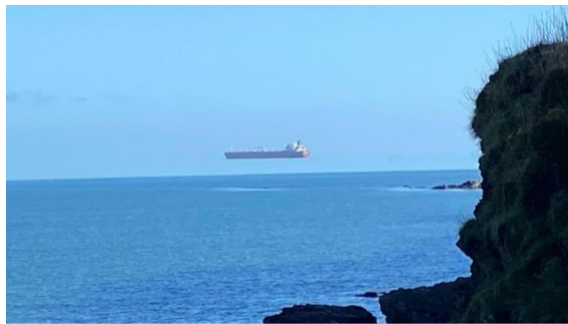


Figura B.3: Efeito Hilinger - Imagem de um navio que não é visto no horizonte. - Retirado de <https://www.abc27.com/news/photographer-captures-fata-morgana-on-lake-superior/> - Acessado em Abril de 2023.



Figura B.4: Sol em ômega. - Retirado de <https://science.nasa.gov/omega-sunrise> - Acessado em Abril de 2023.

Começaremos buscando entender como podemos prever a trajetória de um raio luminoso, e desta forma motivaremos o chamado princípio de Fermat, que será a base para nossas investigações futuras. Neste material instrucional, vamos mostrar como utilizar a apresentação feita em *Powerpoint*, que pode ser acessada clicando [aqui](#). Caso tenha alguma dúvida de como foi idealizada a aplicação deste material, acesse o vídeo no *Youtube* clicando [aqui](#).

B.2.1 Como a luz se propaga em um meio homogêneo?

Começando nossa análise, propomos que o docente apresente a seus estudantes a figura B.5. Como você diria que se propaga um feixe de luz ao ver essas duas imagens?

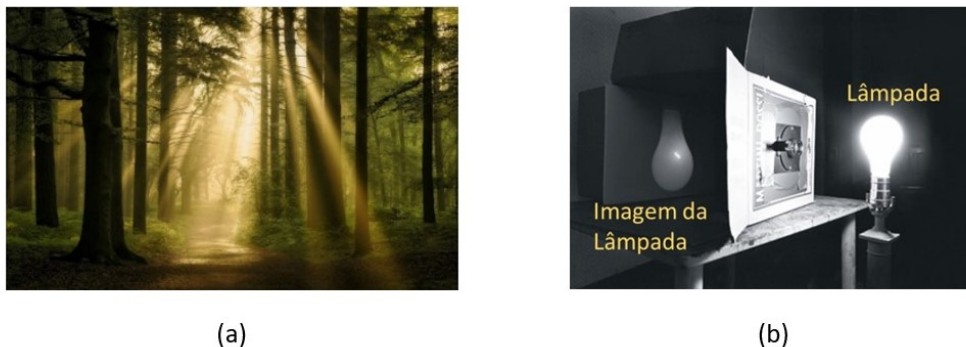


Figura B.5: a) Raios de luz atravessando as folhas em uma floresta. - Retirado de <https://wallhere.com/> b) Funcionamento de uma câmara escura. - Retirado de <https://metodologiavisualdesign.wordpress.com/2012/04/22/abelardo-morell-o-fotografo-da-camara-obscura/>

A figura B.5a, que nos mostra feixes de luz se propagando entre as folhas e troncos de árvores em um bosque e a figura B.5b, que mostra a imagem de um objeto em uma câmara escura, são casos em que nos leva a crer, a tomar, quase como uma verdade absoluta, que a luz se propaga em um meio homogêneo, entre dois pontos, em linha reta. A figura B.6 nos mostra como podem ser representadas essas trajetórias retilíneas da luz nestas situações.

Considerando esse tipo de propagação em linha reta e recordando que a reta é a menor distância entre dois pontos, como mostra a figura B.7,

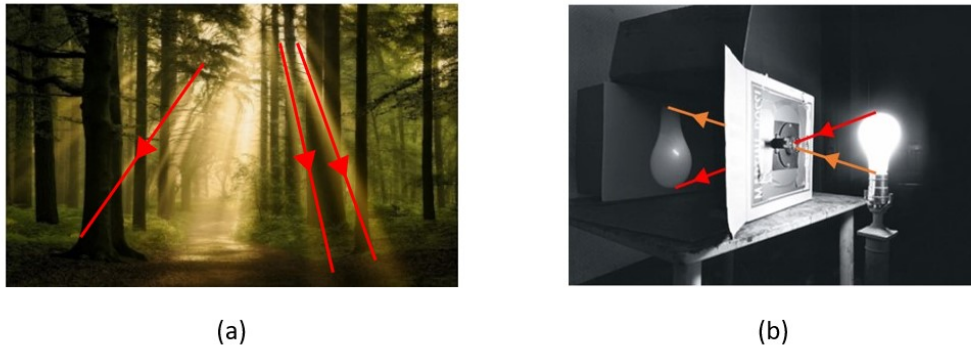


Figura B.6: Representação dos raios de luz: a) atravessando as folhas em uma floresta. b) em uma câmara escura.

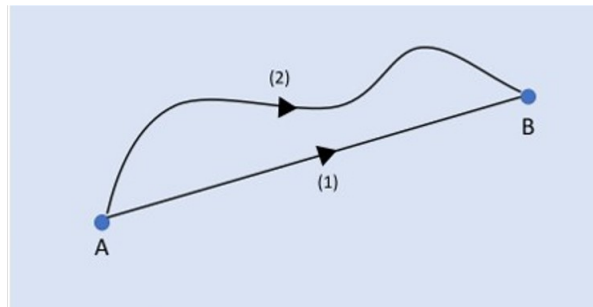


Figura B.7: O caminho (1), que é uma reta, é o menor caminho possível entre os pontos A e B. Qualquer outro caminho na vizinhança, como é representado em (2), terá uma trajetória maior que a de (1).

podemos, inicialmente, chegar a seguinte hipótese para a propagação da luz:

“Dentre todos os caminhos possíveis entre dois pontos, a luz elege aquele que minimiza a distância entre eles”

Esta hipótese nós vamos chamar de Hipótese da Luz Preguiçosa, já que é como se a luz soubesse, e elegesse, o caminho mais curto para se propagar de um ponto a outro.

B.2.2 Ao mudar de meio, a luz continua se propagando por um caminho mais curto, ou seja, em linha reta?

Nos dois casos vistos na pergunta anterior, a hipótese da luz preguiçosa é satisfeita. Porém, agora, temos uma situação da luz mudando de meio. Na figura B.8a temos a impressão de que o lápis está quebrado. No entanto, podemos verificar que este não é o caso ao se retirar o lápis do copo e constatar sua integridade, como mostrado na figura B.8b. Isso nos sugere que o raio de luz que é refletido pela parte do lápis que se encontra imerso em água sofre um desvio ao passar para o ar. Este fenômeno é conhecido como refração. O fenômeno observado na figura B.8a está representado, esquematicamente, na figura B.9.

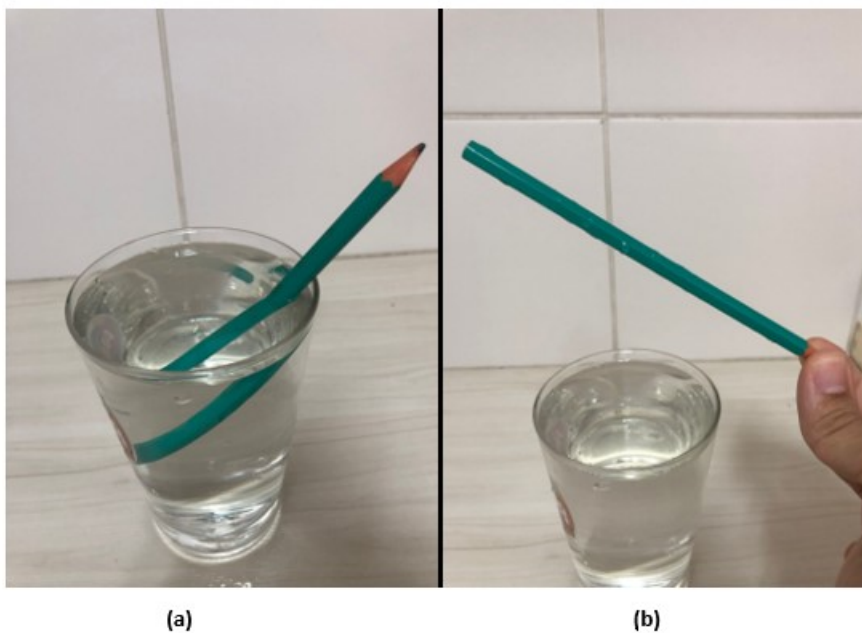


Figura B.8: a) Lápis completamente imerso em copo com água dando a impressão de que está quebrado ou torto. (b) Lápis fora da água com sua integridade comprovada

Observando as figuras B.8 e B.9, é possível continuar afirmando que a luz minimiza a distância entre dois pontos? A luz que é refletida pela parte

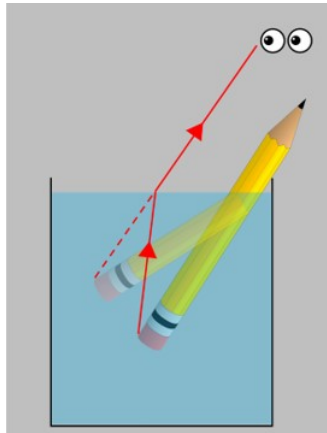


Figura B.9: O desvio sofrido pela luz refletida pelo lápis ao passar da água para o ar.

imersa do lápis segue uma linha reta até o observador? A resposta para essa questão está bem clara no esquema da figura B.9. Para essa situação, de mudança de um meio para outro, a luz não segue mais uma reta entre dois pontos, o que nos faz pensar que a luz não se propaga minimizando distâncias. Com isso, refutamos nossa hipótese criada na situação da câmara escura e dos feixes entre as árvores na floresta. Mas será que existe alguma descrição comum para as situações vistas até agora? Pois bem, voltando a situação da figura B.5, onde observamos feixes de luz se propagando em linhas retas, podemos chegar a uma outra conclusão que foi ignorada em um primeiro momento: se considerarmos que a velocidade de luz é constante em todos os pontos do ar, os feixes de luz também estão se propagando, entre dois pontos, em uma trajetória que minimiza o tempo, o que nos permite chegar a nossa segunda hipótese:

“Dentre todos os caminhos possíveis entre dois pontos, a luz elege aquele que minimiza o tempo entre eles”

Esta hipótese iremos chamar de hipótese da luz apressada, já que a luz está buscando o caminho que será percorrido com o menor tempo possível. Essa hipótese é, em princípio, compatível com a refração, já que a luz se propaga de uma forma que percorre uma distância maior no ar, onde sua

velocidade é maior, e se propaga percorrendo uma distância menor na água, onde sua velocidade é menor, situação que pode ser vista também na figura B.10.

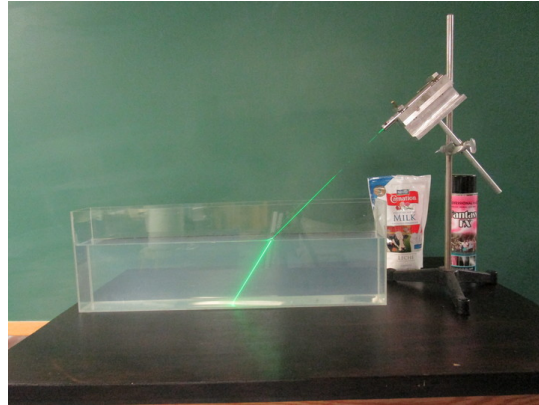


Figura B.10: Desvio sofrido pela luz emitida por um laser ao passar do ar para a água. - Retirado de <https://physicslectureprep.umasscreate.net/optics/6a42-20-refraction-tank-and-laser/> - Acessado em Abril de 2023.

Como formular uma lei que quantifique o desvio feito pela luz ao mudar de meio?

Para que possamos examinar mais detalhadamente esta possibilidade, examinemos uma analogia um pouco mais presente em nosso cotidiano e que emprega apenas conceitos já estudados anteriormente pelos estudantes em mecânica. Vamos supor que um menino começa a se afogar em um ponto aleatório do mar. Na areia, se encontra uma salva-vidas que, ao ver o menino se afogando, tentará chegar até o menino para resgatá-lo. De acordo com essa situação, que é ilustrada na figura B.11, qual trajetória é a mais eficiente para salvar o menino?

De maneira rápida e pouco crítica podemos pensar em uma linha reta como trajetória ideal para o salvamento, conforme ilustrado na figura B.12. No entanto, devemos fazer uma análise um pouco mais profunda, já que a velocidade que a salva-vidas corre na areia é maior do que a que ela nada na água, e o grande interesse é resgatar o menino no menor tempo possível

e não percorrendo a menor distância. Isso torna preferível que a salva-vidas permaneça mais tempo na areia e reduza seu tempo na água, para tentar chegar mais rapidamente até o menino.

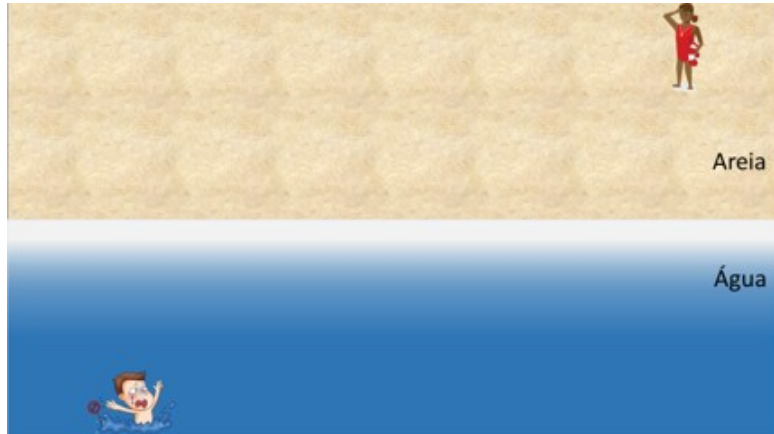


Figura B.11: Situação que representa o momento em que a salva-vidas percebe que o menino está se afogando.

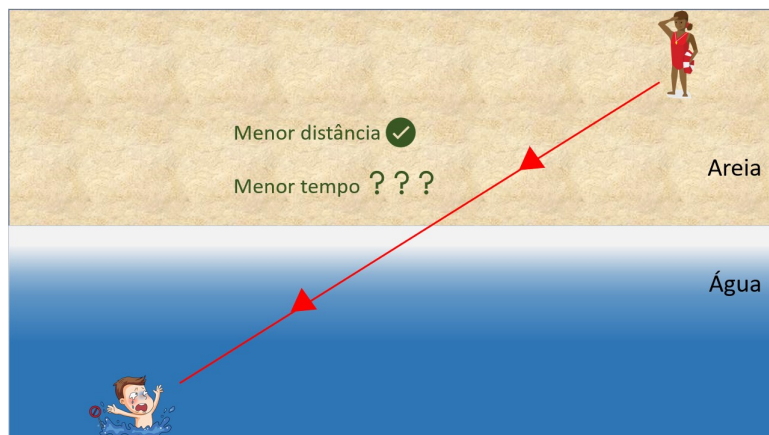


Figura B.12: Trajetória que indica a menor distância entre a salva-vidas e o menino

Em posse da ilustração da figura B.13a, vamos imaginar a salva-vidas entrando na água no ponto A. É notório que caso ela mude o ponto de entrada para qualquer ponto a esquerda deste ponto A, o tempo de resgate irá aumentar, já que a distância que será percorrida tanto na água quanto na areia irá aumentar. De forma análoga, vamos considerar que a salva-vidas

entre na água no ponto B, como representado na figura B.13b. Pelo mesmo motivo do caso anterior, caso ele entre em qualquer ponto a direita do ponto B, o tempo de resgate também irá aumentar.

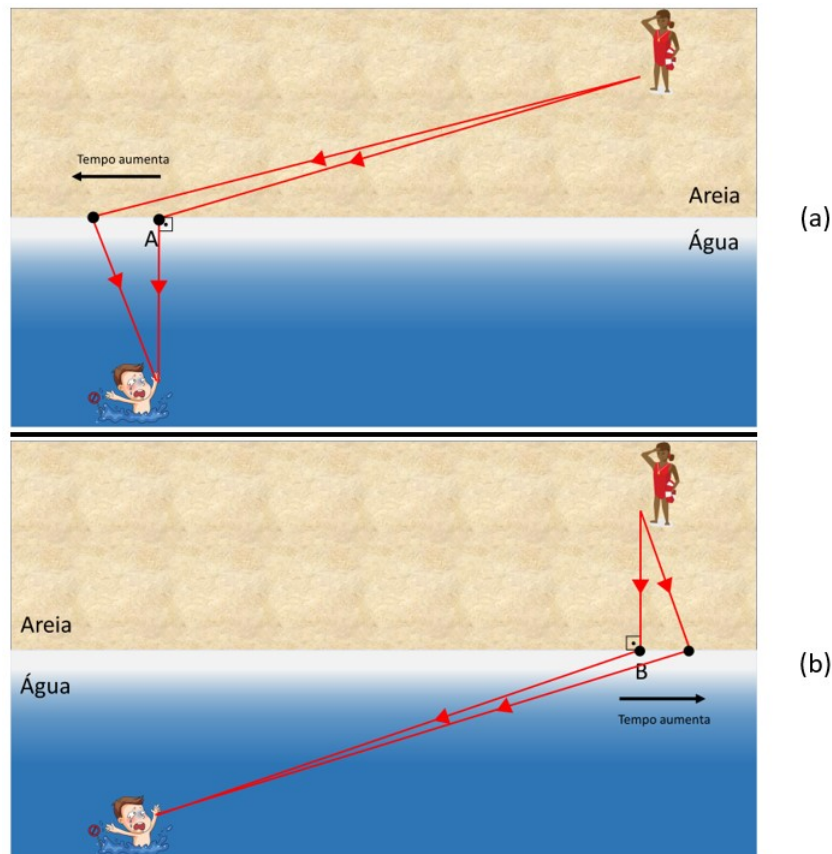


Figura B.13: (a) Demonstração de como trajetórias a esquerda do ponto A fazem aumentar o tempo de resgate. (b) Demonstração de como trajetórias a direita do ponto B fazem aumentar o tempo de resgate.

Como o tempo aumenta do ponto A para a esquerda assim como do ponto B para a direita, podemos concluir que entre A e B há um ponto que minimiza esse tempo. O gráfico da figura B.14 mostra uma relação entre a posição de entrada da salva-vidas em relação e o tempo de chegada até o menino. Como do ponto B para a direita e do ponto A para a esquerda o tempo aumenta, deve haver pelo menos um mínimo local, ou seja, um ponto que minimiza o tempo de resgate entre os pontos A e B. Como a salva-vidas

corre mais rápido do que nada, esperamos intuitivamente que o caminho que minimize o tempo seja um que faz ela passar um tempo adicional na areia com relação ao que ela passaria se fosse em linha reta ao menino, algo similar ao que ocorre na figura B.15, onde denotaremos doravante por C o ponto de entrada no mar que minimiza o tempo.

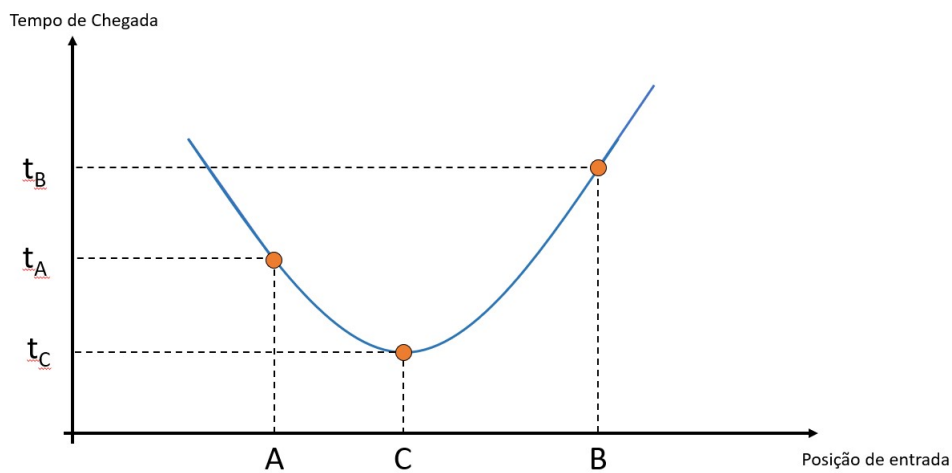


Figura B.14: Esboço de um gráfico do tempo gasto pela salva-vidas até chegar ao menino em função do ponto de entrada dela no mar.

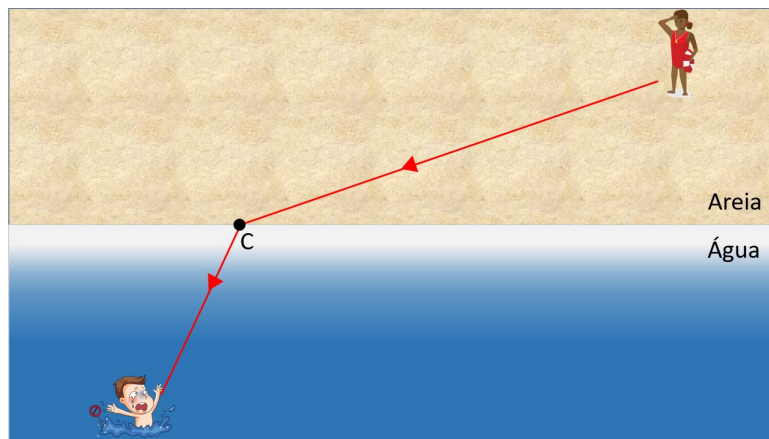


Figura B.15: Trajetória da salva-vidas entrando no mar em um ponto C, o que supomos que minimiza o tempo.

De acordo com o que é visto no gráfico da figura B.14, é possível ver que desvios muito pequenos em relação ao ponto C praticamente não mudam o

tempo de resgate do menino já que a tangente no ponto mínimo é uma reta paralela ao eixo horizontal. Portanto, a salva-vidas não altera seu tempo de resgate ao fazer um desvio pequeno (formalmente dito infinitesimal), alterando seu ponto de entrada na água de um ponto C para um ponto D, como representado na figura B.16. Isso ocorre porque o tempo que a salva-vidas passa a mais na areia é igual, em módulo, ao tempo que ela passa a menos na água. Ou seja, denominando essa variação de tempo na areia como Δt_1 e a variação de tempo na água como Δt_2 , chegamos a equação B.1.

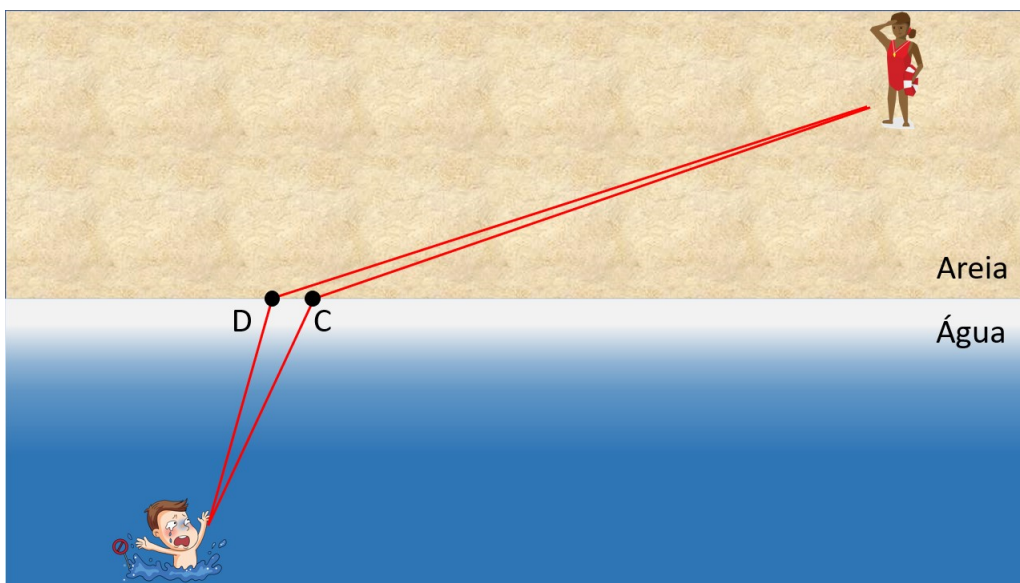


Figura B.16: Desvio infinitesimal em relação ao ponto de entrada em C.

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 = 0 \quad (\text{B.1})$$

Ampliando essa região do desvio mostrada na B.16, chegamos a figura B.17, onde vamos fazer algumas análises geométricas. Relembrando que esse desvio é extremamente pequeno, podemos considerar que as trajetórias que partem da posição inicial da salva-vidas entrando na água nas posições C e D são praticamente paralelas. Com isso, podemos considerar que d_1 é a distância que a salva-vidas percorre a mais na areia e que d_2 é a distância que ela percorre a menos na água. Chamando os ângulos entre a reta normal à interface que separa a areia da água e a trajetória na areia de θ_1 e entre a

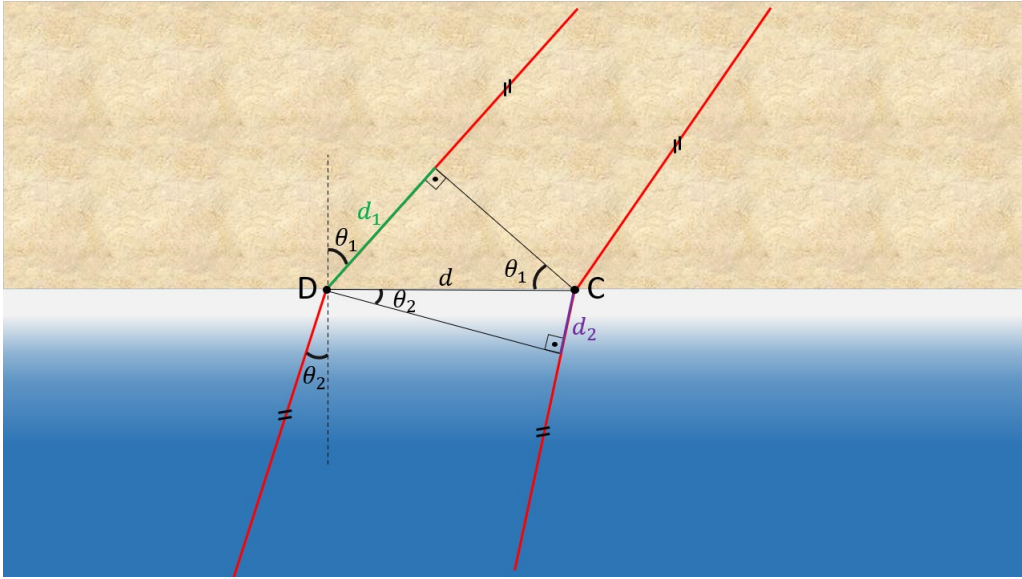


Figura B.17: Análise geométrica da figura B.16.

mesma reta normal e a trajetória na areia de θ_2 e utilizando algumas relações trigonométricas se chega às equações B.2 e B.3.

$$d_1 = d \operatorname{sen} \theta_1 \quad (\text{B.2})$$

$$d_2 = d \operatorname{sen} \theta_2 \quad (\text{B.3})$$

Ainda pela mesma figura, vemos que $\Delta t_1 = d_1/V_1$, na qual V_1 é a velocidade da salva-vidas na areia. Da mesma forma, $\Delta t_2 = -d_2/V_2$, com sinal negativo uma vez que para o caminho que passa pelo ponto D a salva-vidas passa um tempo menor na água, do que se entrasse pelo ponto C . Na expressão anterior, V_2 denota a velocidade da salva-vidas na água. Substituindo os valores de d_1 e d_2 das equações B.2 e B.3 na equação B.1 chegamos à seguinte relação:

$$\frac{d_1}{V_1} - \frac{d_2}{V_2} = 0 \Rightarrow \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{d \operatorname{sen} \theta_1}{V_1} - \frac{d \operatorname{sen} \theta_2}{V_2} = 0. \quad (\text{B.5})$$

Daqui concluímos que

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{V_1} = \frac{\text{sen } \theta_2}{V_2}. \quad (\text{B.6})$$

A expressão anterior é o resultado final do problema que propusemos para ver a melhor trajetória a ser seguida pela salva-vidas. O que isto teria em comum com a luz? Ora, se a nossa hipótese estiver correta, há de ter uma relação da mesma forma que a equação B.6 para a luz. Este é um ponto de partida para uma análise experimental. Embora uma direta medição da velocidade da luz seja muito complicada em geral, nessa análise experimental é possível verificar que a razão dos senos é sempre a mesma para um par de meios. Ou seja, considerando a luz passando do ar para a água, como mostrado na figura B.10, a razão dos senos sempre será constante, independente do ângulo incidente. Essa análise, que é amplamente aceita pela comunidade científica, é a base da Lei de Snell-Descartes, relação muito utilizada no Ensino Médio para o estudo de refração.

B.2.3 Se a luz elege a trajetória que minimiza o tempo, como podemos ver a imagem de um objeto e o próprio objeto simultaneamente?

Nossa segunda hipótese, da Luz Apressada, se mostrou satisfatória para o caso da luz se propagar em apenas um meio homogêneo e também para o caso da luz mudar de meio. Porém, ainda há algumas situações que comprometem essa nossa hipótese. Por exemplo, na figura B.18 podemos ver como um observador externo pode ver os raios de luz que são refletidos pelo cachorro e vão diretamente para os seus olhos como também os raios de luz que são refletidos pelo cachorro e também são refletidos pelo espelho antes de chegar aos seus olhos. A figura B.19, que representa esquematicamente a situação da figura B.18, mostra um feixe de luz que segue pelo caminho 1, que sai direto do cachorro aos olhos do observador, e outro que segue pelo caminho composto por 2 e 3, que passa pelo espelho antes de chegar aos olhos do observador.



Figura B.18: Um cachorro e sua reflexão. - Retirado de <https://www.akc.org/expert-advice/lifestyle/do-dogs-have-self-awareness/> - Acessado em Abril de 2023.

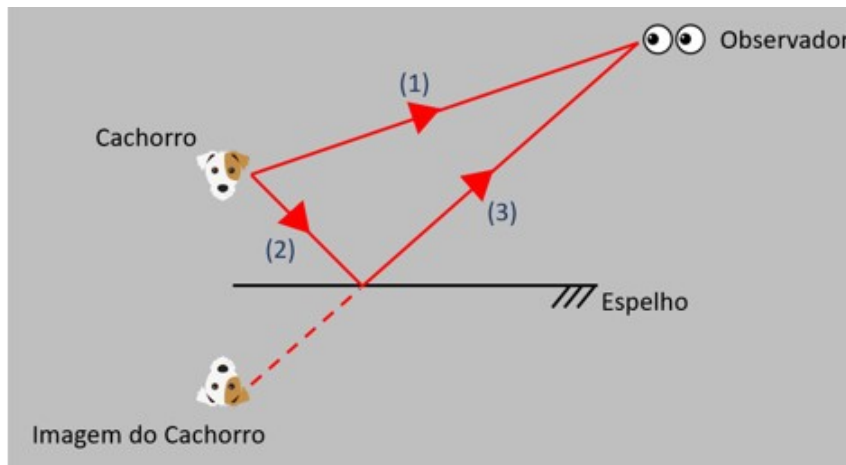


Figura B.19: Esquema que mostra os raios de luz que são vistos pelo observador da figura B.18.

Nesta situação, a luz chega aos olhos do observador de duas formas distintas, o que contesta a hipótese da luz apressada, já que é bem claro que trajetória feita pela luz seguindo o caminho composto por 2 e 3 é maior que o do caminho 1. Levando em conta que a velocidade da luz é constante em todos os pontos do ar, o tempo feito pelo caminho 2 e 3 também será maior

que o feito pelo caminho 1. Porém são vistas “duas imagens” do cachorro, mesmo com tempos diferentes decorridos pelos raios de luz até chegar aos olhos do observador. Isso coloca em xeque nossa ideia de que a luz minimiza o tempo? Não completamente. O que ocorre é que a luz não busca a trajetória que minimiza o tempo de forma global, mas sim de forma local. Ou seja, a luz elege o caminho que minimiza localmente o tempo na sua trajetória entre dois pontos. Portanto, na vizinhança destas trajetórias não existe nenhum outro caminho que faça a luz chegar mais rápido que os raios representados na figura B.19.

Com esse sutil acréscimo, chegamos à nossa terceira e última hipótese, que também pode ser considerada apenas uma complementação da segunda hipótese, que é descrição precisa para os propósitos usuais do que hoje conhecemos como o princípio de Fermat:

“Dentre todos os caminhos possíveis entre dois pontos, a luz elege aquele que minimiza, *localmente*, o tempo entre eles.”

Chamaremos essa hipótese de a Hipótese da Luz Apressada-Preguiçosa, já que a luz segue a trajetória que minimiza o tempo, mas procura apenas dentre as vizinhanças de cada trajetória.

Vale ressaltar que o caminho 2+3 representado na figura B.19 é, dentre os caminhos ópticos da luz que incidem no espelho, o que minimiza localmente o tempo. Isso pode ser explicado com o auxílio da figura B.20. Com base no que foi visto anteriormente, temos o conhecimento de que a trajetória percorrida pelo raio de luz entre o ponto A e o espelho deve ser feita em linha reta, devido à homogeneidade do meio. O que deve ocorrer de forma análoga na propagação entre o espelho e o ponto B . Portanto, basta determinar o ponto D , que é o ponto onde a luz vai incidir no espelho, para que o caminho total seja um mínimo local. Na figura B.21 é mostrada a utilização de uma técnica geométrica para que seja encontrado esse ponto D que minimiza o tempo. Para isso é traçada uma reta perpendicular ao espelho que passa pelo ponto A e, nessa reta, é marcado um ponto A' que é equidistante ao ponto A em relação ao espelho, ou seja, a distância \overline{AD} é igual a $\overline{A'D}$. Assim podemos definir que a distância total percorrida pela luz é dada por $\overline{A'D} + \overline{DB}$.

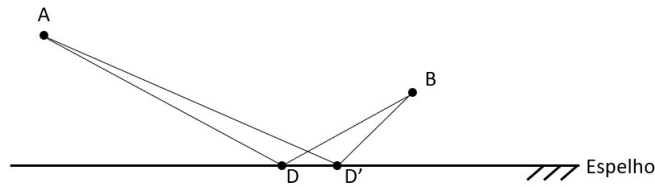


Figura B.20: Possíveis caminhos da luz na reflexão.

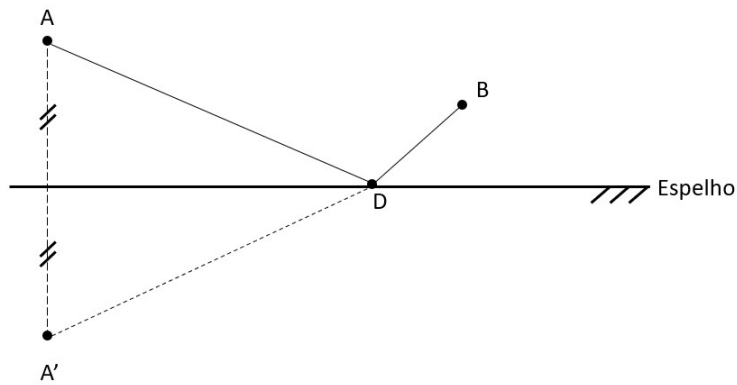


Figura B.21: Utiliza-se a imagem do ponto A para auxiliar na minimização da trajetória.

Lembrando que luz em todos os pontos se propaga com velocidade constante para essa situação, chegamos que o ponto D deve ser marcado no espelho em um ponto que seja formada uma linha reta entre os pontos A' e B , como mostrado na figura B.22. Ainda nessa figura é possível ver que uma das consequências dessa minimização é que o ângulo de incidência do feixe de luz no espelho, em relação à normal, é igual ao ângulo de reflexão. Portanto, embora o caminho que minimize o tempo seja a linha reta de A para B, a presença do espelho introduz a possibilidade de uma trajetória para o raio luminoso que minimiza localmente o tempo. De fato, o caminho para o qual o ângulo de incidência é igual ao de reflexão é realizado em um tempo menor

do que qualquer outra trajetória que envolva a reflexão em um outro ponto qualquer do espelho.

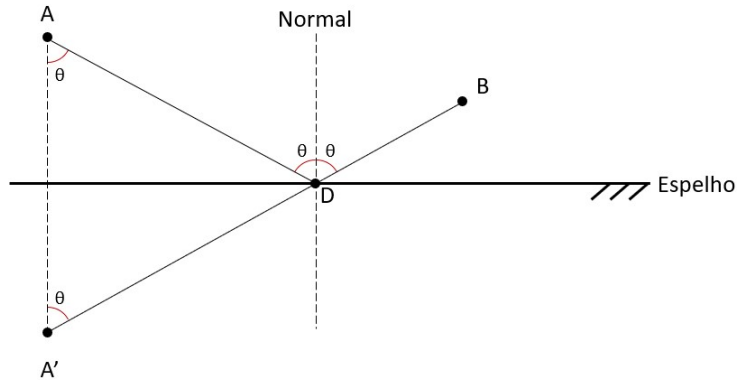


Figura B.22: Trajetória que minimiza o tempo.

Por fim, para resumir a evolução das hipóteses de acordo com as figuras e situações mostradas neste capítulo, é apresentado o fluxograma da figura B.23.

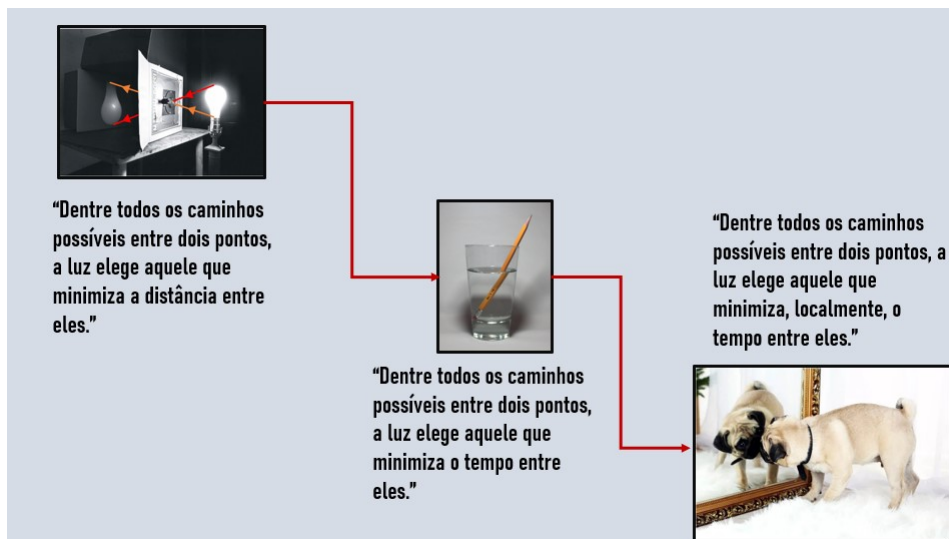


Figura B.23: Fluxograma com a evolução do Princípio de Propagação da Luz visto nesse material.

B.2.4 Como podemos explicar as miragens?

Agora que já temos uma teoria bem razoável para a propagação da luz, é possível explicarmos de maneira bem intuitiva como alguns fenômenos ópticos são descritos. Um dos fenômenos fascinantes que podemos explorar naturalmente é a miragem. No entanto, para termos uma compreensão mais completa, é necessário fazer uma pequena análise de como a densidade influencia no índice de refração do ar.

Como primeiro exemplo, consideremos um dia bem quente em um deserto. É bem sabido que a areia esquenta mais do que ar, dado o seu maior calor específico. Por continuidade, não se pode mudar abruptamente a temperatura da areia para o ar, de modo que esperamos que o ar próximo à areia fique mais quente do que o ar muito acima, compatível também com o fato de que o ar é um péssimo condutor de calor, permitindo com que a diferença de temperatura em suas diferentes camadas permaneça por um tempo apreciável. O ar, assim como qualquer gás, é muito compressível, de modo que uma temperatura maior leva a uma apreciável diminuição em sua densidade. Quanto menos denso o ar maior a velocidade com a qual a luz viaja nele. Um jeito intuitivo de pensar nisso é que quanto menos denso mais o ar fica parecido com o vácuo - onde a luz assume a sua maior velocidade. Em resumo, a velocidade de propagação da luz próximo ao solo tem velocidade maior que a luz que se propaga distante do solo. Além do exemplo do deserto, o mesmo raciocínio se aplica para estradas em dias muito quente. Os carros passando rapidamente pelo asfalto faz com que a temperatura do ar próximo ao solo esteja mais quente do que o ar em camadas superiores do ar.

Já nos dias ensolarados, em locais com temperaturas muito baixas, a água, que possui elevada capacidade térmica, tem uma taxa de aquecimento muito baixa. Isso faz com que o ar que esteja na sua proximidade fique mais frio do que a porção que se encontra mais acima. Utilizando o raciocínio análogo ao da propagação da luz no deserto, pode-se concluir que a velocidade da luz na porção superior é maior que na porção que se encontra próximo a água.

Essas diferenças entre as densidades e dos índices de refração do ar são os fatores preponderantes para a formação das miragens. A grande dife-

rença do caso abordado na questão anterior é que enquanto ali a mudança de velocidade da luz era abrupta, fruto de uma interface que separava dois meios distintos, aqui a mudança é contínua. No caso da miragem vista na figura B.1, em um local desértico, é possível esquematizar os caminhos dos feixes de luz, como apresentado na figura B.24. Por conta da diferença dos índices de refração, é possível ter dois feixes de luz, 1 e 2, que se propagam por caminhos distintos e que demandam, localmente, o menor tempo para chegar aos olhos do observador. A ideia é que como próximo ao solo a luz viaja mais rapidamente, para trajetórias bem longas compensa aumentarmos o comprimento do percurso para que o feixe passe um tempo grande próximo ao solo, onde é rápido. Ou seja, é possível ver a imagem da formação montanhosa e do céu como se estivessem vindos do solo. Essa miragem é muito comum em regiões desérticas e frequentemente confundida com água. Na figura B.25 vemos uma foto onde é possível perceber o chão aparentemente molhado devido a um efeito de miragem.

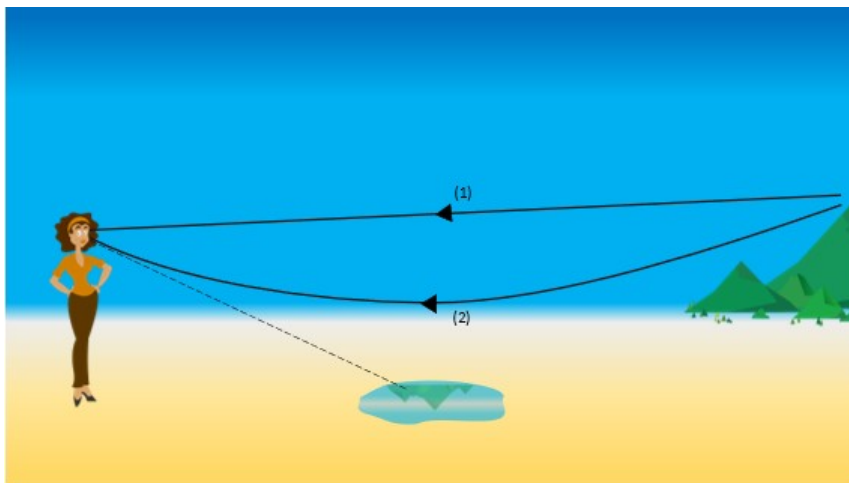


Figura B.24: Raios de luz que formam a miragem no deserto.

Já no caso da miragem do barco no mar de uma região com temperaturas muito baixas, temos a chamada miragem superior, ilustrada na figura B.26a. Na figura B.26b estão ilustrados a trajetória de 2 raios que nos permitem compreender porque a imagem do barco se forma acima da água, dando a impressão de ele estar flutuando. Em certos casos, podemos ter a impressão



Figura B.25: Exemplo de miragem na qual o chão da estrada aparenta estar molhada. - Retirado de <https://en.wikipedia.org/wiki/Mirage> - Acessado em Julho de 2023.

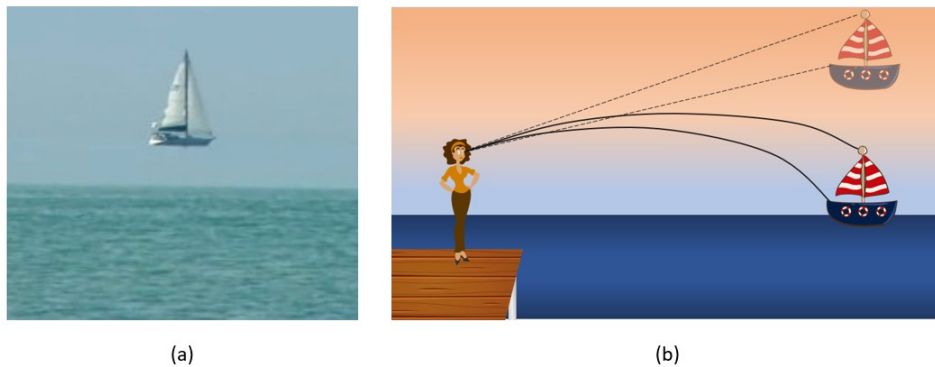


Figura B.26: Exemplo de miragem superior. Em (a) temos uma foto na qual um barco aparenta estar flutuando, enquanto em (b) temos a representação de alguns raios que nos permitem entender a origem física da miragem. - Retirado de <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/atmos/mirage.html> - Acessado em Julho de 2023.

do barco estar de cabeça para baixo. Tal inversão corresponde a raios como os indicados na figura B.27.

Além dessas formações de imagens, existem outros fenômenos mais complexos que podem explicados embasados no Princípio de Fermat. O efeito hillingar, da figura B.3 e o Sol em Ômega, da figura B.4, são fenômenos que também envolvem a minimização local do tempo de propagação da luz en-

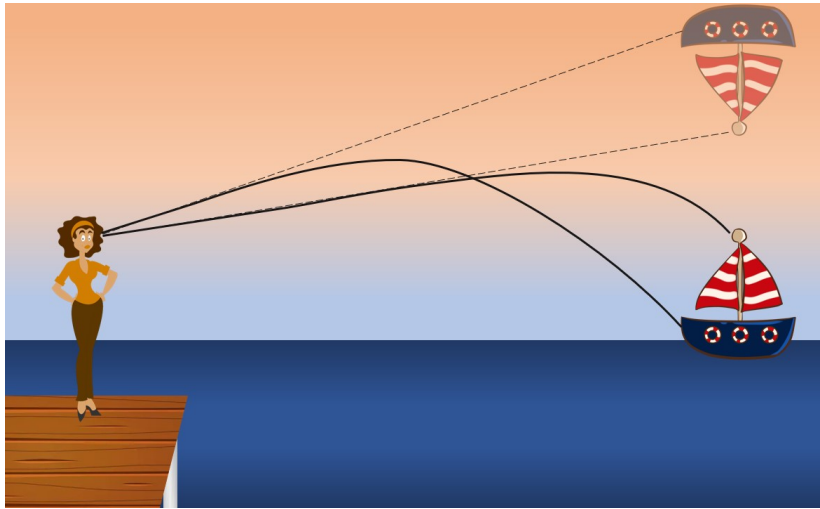


Figura B.27: Raios de luz que formam a miragem invertida no mar.

tre dois pontos. Contudo são fenômenos mais complexos e foge dos nossos propósitos detalhar esta discussão.

B.3 O Arco-íris

O arco-íris é um fenômeno óptico que apresenta uma beleza única e que é possível ser visto com uma certa frequência, não sendo tão raro como os eclipses, por exemplo. Além disso, este é um fenômeno que envolve diretamente reflexão e refração, dois fenômenos corriqueiramente estudados no Ensino Médio. Entretanto, pouco é discutido sobre o que há por trás das cores do arco-íris e esse será o objetivo principal deste material. Ao final desta sequência, será impossível olhar para o arco-íris da mesma forma. Neste material instrucional, vamos mostrar como utilizar a apresentação feita em *Powerpoint*, que pode ser acessado clicando [aqui](#). Caso tenha alguma dúvida de como foi idealizada a aplicação deste material, acesse o vídeo, no *Youtube*, em que é aplicado este material clicando [aqui](#).

B.3.1 Por que o arco-íris não é visto a todo momento? O que é necessário para a ocorrência deste fenômeno?

Essa pergunta é algo que é respondida de maneira imediata pela maioria das pessoas, visto que desde pequenos aprendemos que a formação do arco-íris depende de haver chuva e raios solares. Inclusive, o nome em inglês do arco-íris, *rainbow*, ainda reforça a ideia já que a tradução livre desta palavra é arco da chuva. Entretanto, não é somente com a associação da chuva propriamente que é formado o arco-íris, mas sim de gotículas de água, independentemente da origem. Na figuras B.28 e B.29 apresentamos arco-íris formados em uma cachoeira e por gotículas provenientes da chuva, respectivamente.



Figura B.28: Arco-íris formado nas Cataratas do Iguaçu



Figura B.29: Arco-íris formado no bairro da Freguesia - Rio de Janeiro

B.3.2 Como são formadas as cores do arco-íris?

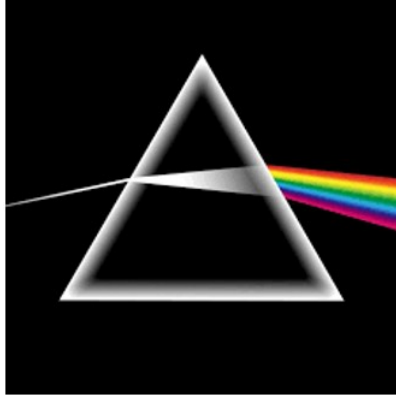


Figura B.30: Capa do disco *Dark Side of the Moon* do *Pink Floyd*.

A capa do disco *Dark Side of the Moon*, da banda inglesa *Pink Floyd*, retrata exatamente o que ocorre com um raio de luz branca para produzir as cores do arco-íris. Só que na capa do disco é utilizado um prisma e não uma gota de água, como acontece na formação do arco-íris que vimos anteriormente. Eis que surge uma questão: como surgem as cores? Elas são criadas a partir do prisma (das gotículas no caso do arco-íris) ou vem junto com a luz branca? Em um primeiro momento, mostramos na figura B.31 a experiência do prisma com uma luz vermelha que se origina a partir de um laser. É possível verificar que durante toda a trajetória da luz mostrada, somente a cor vermelha está presente, ou seja, não houve surgimento de outra cor por conta da presença do prisma.

Já em um segundo experimento, representado na figura B.32, é possível ver que um feixe de luz que incide no prisma com cor branca dá origem a diversas cores, que são exatamente as mesmas do arco-íris.

A partir dos experimentos das figuras B.31 e B.32, podemos concluir que as cores não são oriundas do prisma, mas todas elas já estão contidas na luz branca, de acordo com a teoria de Newton, cujo experimento original está ilustrado na figura B.33. Entretanto, todas essas cores quando estão juntas, aglutinadas, são percebidas pelo nosso cérebro como se fosse uma única cor: branca. Por que as diferentes cores que viajavam juntas no ar se separam ao

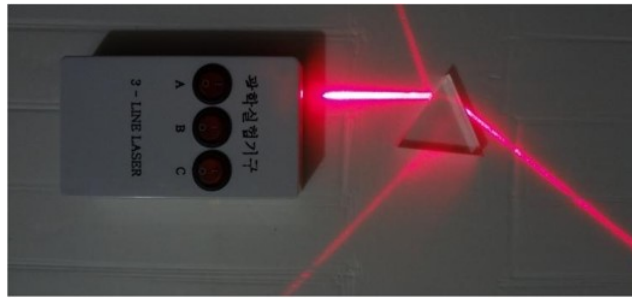


Figura B.31: Experimento de refração utilizando um prisma e um *laser* vermelho. - Retirado de <https://pt.aliexpress.com/item/32824701933.html> - Acessado em Julho de 2023.

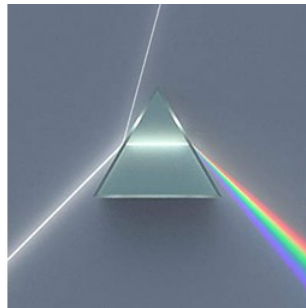


Figura B.32: Experimento de refração utilizando um prisma e um feixe de luz branca. Nota-se que nesse caso ocorre a dispersão da luz. - Retirado de [https://de.wikipedia.org/wiki/Prisma_\(Optik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Prisma_(Optik)) - Acessado em Julho de 2023.



Figura B.33: Pintura que representa o experimento de Isaac Newton com um prisma de vidro e um feixe de luz branca. - Retirado de <http://lilith.fisica.ufmg.br/~dsoares/extn/astrn/astrn.htm> - Acessado em Julho de 2023.

incidir no vidro? Quando a luz branca passa de um meio para o outro, ela sofre o fenômeno da refração, ou seja, a velocidade da luz se altera ao entrar no prisma. Só que para cada cor a mudança da velocidade é diferente. Assim, desde que o feixe não incida perpendicularmente à superfície (pois neste caso todas as cores seguirão na mesma direção original e o feixe permanecerá branco), o desvio para cada cor também será diferente e, assim, haverá uma separação das cores. Esse fenômeno também é conhecido pelo por dispersão da luz, já que o papel do prisma é o de dispersar as diferentes cores.

B.3.3 O arco-íris só é visto em uma certa hora do dia? A posição do Sol influencia na ocorrência do fenômeno?

Enquanto os pontos levantados no último questionamento estão mais enraizados em experiências prévias e cotidianas dos estudantes, esta pergunta já remete a aspectos que muitas pessoas não observam espontaneamente. Chamamos atenção para o fato de que, embora não haja uma hora específica para a ocorrência do arco-íris, a posição do Sol influencia sim em sua formação. Mas de que maneira? Observando as figuras B.34 e B.35, podemos ver que o as sombras formadas pelos mais diversos objetos das imagens apontam para o centro do arco-íris.

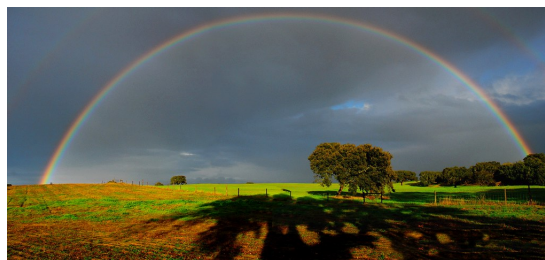


Figura B.34: Arco-íris formado em um campo aberto. A situação das sombras é semelhante ao que ocorre na figura B.35. - Retirado de <https://www.vctm.org/An-Example-of-Natures-Mathematics-The-Rainbow> - Acessado em Julho de 2023.

Pois bem, isso nos leva a crer que o arco-íris só é visto quando o Sol está posicionado atrás do observador, como representado na figura B.36.



Figura B.35: Arco-íris formado em uma região litorânea. É possível verificar que as sombras dos corpos que aparecem na imagem apontam para o centro do arco-íris. - Retirado de <https://orlario.com/vc/home/voce-sabe-com-surge-o-arco-iris/> - Acessado em Julho de 2023.

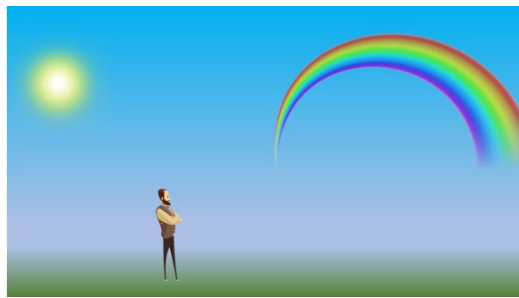


Figura B.36: Na formação de um arco-íris o Sol sempre estará atrás do observador.

Sabendo agora que o Sol está sempre atrás do observador, esse fator nos sugere que o raio de luz que adentra na gotícula de água, de alguma maneira, deve retornar para que então chegue até os olhos do observador que vê o arco-íris. Na figura B.37, temos o caminho feito pela luz que forma o arco-íris até chegar aos olhos do observador. Desta forma, o surgimento do arco-íris envolve tanto os assuntos de refração quanto de reflexão.

Vale ressaltar que na figura B.37 estamos considerando apenas a parte dos raios de luz que formam o arco-íris. Em todo momento que a luz incide na superfície da gotícula há refração e reflexão. Ou seja, em nenhum momento há uma reflexão total dentro da gotícula. Na figura B.38 é possível ver que a luz, vinda de um ponto A incide na gotícula no ponto B e uma parte da luz é

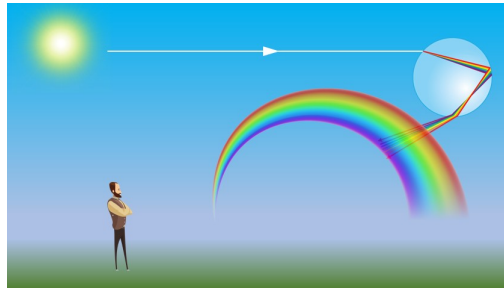


Figura B.37: Feixe de luz que se propaga partindo do sol, passando pela gotícula até chegar aos olhos do observador.

refletida para o ar e outra parte refratada para dentro da gotícula até atingir o ponto C. Neste ponto, novamente parte da luz refrata para o ar e parte da luz reflete para dentro da gotícula, incidindo no ponto D. Por fim, neste ponto, parte da luz também reflete e refrata. A parte refletida no ponto D continuará infinitas interações e a parte refratada enfim chegará ao ponto E, que pode representar os olhos de um observador que está vendo um arco-íris. Portanto, o caminho ABCDE é o caminho que parte do feixe de luz faz e constitui uma das contribuições para a formação do arco-íris.

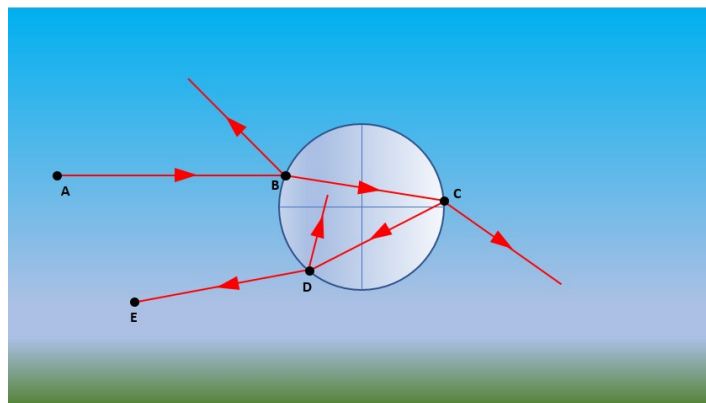


Figura B.38: Representação de todas as refrações que ocorrem pelo feixe de luz na gotícula até que se chegue aos olhos do observador.

É possível ver em algumas páginas da internet menções de que para a ocorrência do arco-íris há uma reflexão total dentro da gotícula, o que não é verdade, conforme discutiremos mais adiante! A figura B.39 mostra um site educacional que, de forma equivocada, diz que há uma reflexão total nas

paredes das gotículas de água.

Como o arco-íris é formado?

O arco-íris é um fenômeno que **ocorre quando a luz branca, como a luz do Sol, é dispersada ao mudar-se o meio**. No caso da chuva, as gotículas de água funcionam como os prismas, a luz branca entra nelas refratando (alterando a velocidade e direção de propagação) e se **refletindo totalmente** nas "paredes" que formam a gota de água. Isso faz a luz refratar de volta para a atmosfera, com diferentes ângulos. Como o **índice de refração** depende da cor, a luz é dispersada em um espectro conhecido como as cores do arco-íris.

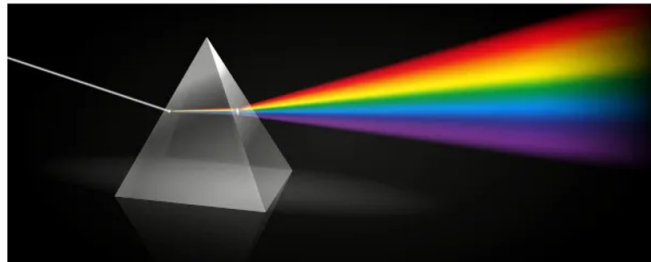


Figura B.39: Informação equivocada sobre a formação de um arco-íris. - Retirado de <https://brasilecola.uol.com.br/fisica/o-arcoiris.htm> - Acessado em Julho de 2023.

Por fim, sabendo que para a ocorrência do arco-íris o sol deve estar atrás do observador, podemos, a partir das sombras de uma foto, distinguir, em certos casos, se uma foto de arco-íris é real ou montagem. Na figura B.40 há uma imagem que podemos concluir claramente que é uma montagem, já que, pela sombra da árvore, é possível perceber que o sol não se encontra atrás do observador, sendo assim impossível a formação do arco-íris.



Figura B.40: Montagem computacional de um arco-íris.

B.3.4 Por que um arco?

A justificativa para essa resposta é algo um pouco mais complexa, e exige domínio de alguns conceitos ópticos e geométricos. Para abordarmos esta questão, vamos começar observando que há um número enorme de gotas na atmosfera. Portanto, há, em princípio, diferentes direções para as quais a luz vermelha, por exemplo, atinge o olho do observador.

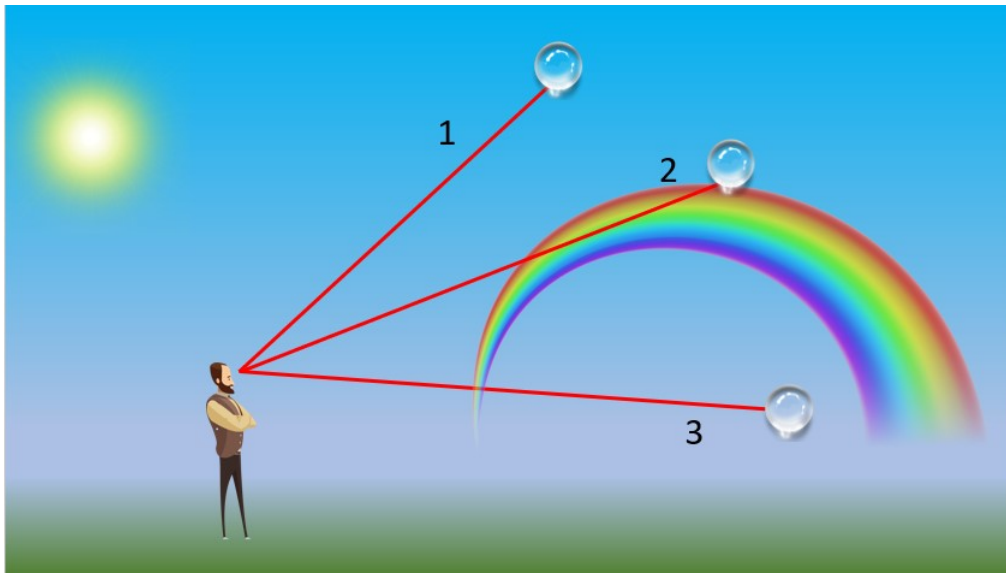


Figura B.41: Diferentes raios de luz vermelha chegando aos olhos de um observador.

Na figura B.41 estão ilustradas três gotas distintas nas quais após a luz do sol refratar, refletir e refratar novamente dá origem a um feixe vermelho indo em direção ao olho do observador. Por que apenas a gota 2 fornece uma cor vermelha percebida pelo observador? Em outras palavras, porque não vemos vermelho em outras direções que olhamos no céu? E, já que este argumento vale para outras cores também, por que não vemos tudo azul, como o céu a nossa volta?

Posto de outra forma, na figura B.42 vemos dois raios de luz que chegam aos olhos do observador na mesma direção, um vermelho e outro violeta. No entanto, o raio vermelho (1) chega aos seus olhos, faz parte do arco-íris que ele observa e o raio violeta (2) de alguma maneira acaba sendo ofuscado. Por

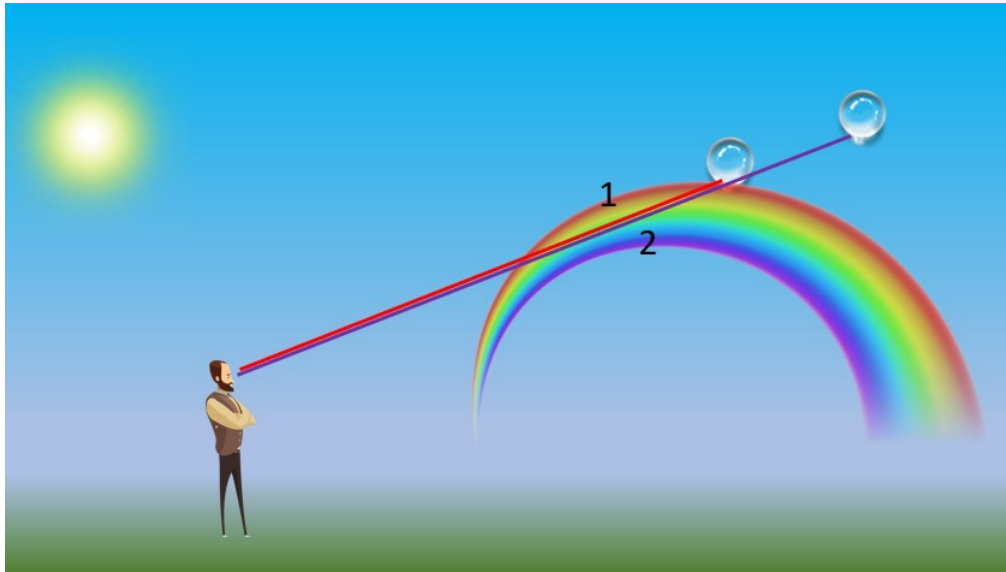


Figura B.42: Raios de luz vermelha (1) e violeta (2) chegando na mesma direção a um observador.

que o raio vermelho se sobrepõe ao violeta?

Nestes casos das figuras B.41 e B.42, vemos que os raios de luz de diferentes cores chegam aos olhos do observador com intensidades diferentes. Isto significa que há um acúmulo de raios de uma certa cor. Por conta disto, é necessário que façamos uma abordagem matemática para entender de forma mais clara o que acontece com esses raios de luz ao entrar e sair de uma gotícula de água. Busquemos, portanto, compreender a trajetória do feixe de luz ao adentrar uma gotícula suspensa no ar. Na figura B.43 é mostrado o que ocorre com feixes de luz monocromáticos ao incidir com a gotícula com diferentes ângulos de incidência.

Vemos na figura B.43 que o ângulo entre a horizontal (direção que os feixes de luz entram na gota) e a direção na qual o raio de luz sai da gota, o qual denotaremos por θ_S , depende do ponto no qual o raio adentra a gota. Mudando o ponto em que o feixe de luz adentra a gota, modifica-se o ângulo, denotado por θ_E , entre o feixe de entrada e a normal à superfície da gota. Desta forma, podemos dizer que θ_S é uma função de θ_E . Isso explica o motivo pelo qual os raios violeta e vermelho da figura B.42 podem sair

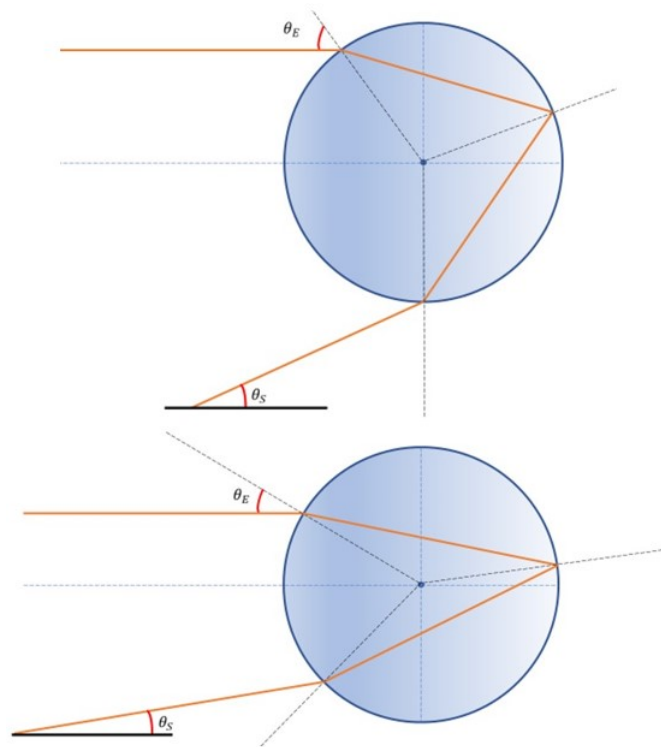


Figura B.43: Raios de luz entrando em pontos diferentes em uma gota de água.

na mesma direção, o que indica que para cada um destes raios o ângulo de entrada na gota foi diferente, já que os raios usados entraram com diferentes ângulos. Para conseguirmos responder ao questionamento inicial será importante determinarmos esta função, o que pode ser feito a partir de relações geométricas e utilizando a lei de Snell-Descartes e a lei da reflexão.

Ângulo de saída (θ_S) como função do ângulo de entrada (θ_E).

De início, definiremos que o índice de refração da água é 'n' ($n_{\text{Água}} = n$) e vamos aproximar o índice de refração do ar por 1 ($n_{\text{Ar}} = 1$). A partir disso vamos para uma situação em que um raio de luz monocromático arbitrário entra em uma gotícula. Faremos ainda a aproximação de que a gota de água seja esférica. Chamamos o ângulo refratado, na primeira refração, no ponto A, de α . Esse raio segue pela gotícula até chegar ao ponto B quando parte

do raio reflete ao incidir nesse ponto e segue até o ponto C . Neste ponto C o raio refrata novamente e sai da gotícula, formando o ângulo θ_S com a horizontal, que é a direção que a luz incide na gota. Essa situação é mostrada na figura B.44.

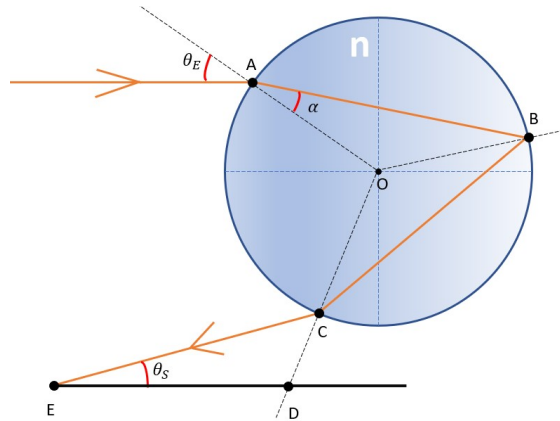


Figura B.44: Análise geométrica de um feixe de luz em uma gota de água. Parte - 1

A partir da figura B.44 vamos começar a análise geométrica do feixe de luz dentro da gota. O triângulo AOB tem os lados \overline{AO} e \overline{OB} iguais entre si, pois correspondem ao raio da esfera. Portanto, o triângulo AOB é isósceles. Com isso, é possível afirmar que o ângulo $O\hat{B}A$ é também α , por ser igual ao ângulo $O\hat{A}B$. A parcela do raio que reflete em B terá ângulo de reflexão igual ao de incidência em relação a normal, dada pela reta \overline{OB} , já que supusemos a gota esférica. Como o triângulo BOC também é isósceles, podemos afirmar que seu ângulo $O\hat{C}B$ é igual ao ângulo $O\hat{B}C$, ambos com mesmo valor α . Por fim, pelo princípio da reversibilidade, podemos afirmar que na refração no ponto C , ocorre exatamente o inverso do que acontece na refração do ponto A , o que poderia ser também diretamente verificado aplicando-se novamente a lei de Snell-Descartes. Neste ponto, fazemos uma pequena digressão para retomar uma discussão anterior. Novamente pelo princípio da reciprocidade, vemos que o raio incidente em B tem uma parcela que será refratada com o ângulo θ_E com relação à normal, demonstrando que para uma gota esférica todo raio que entra pode sair, ou seja é impossível haver reflexão total em B . Voltemos ao nosso objetivo original. Denotemos o ângulo de refração no

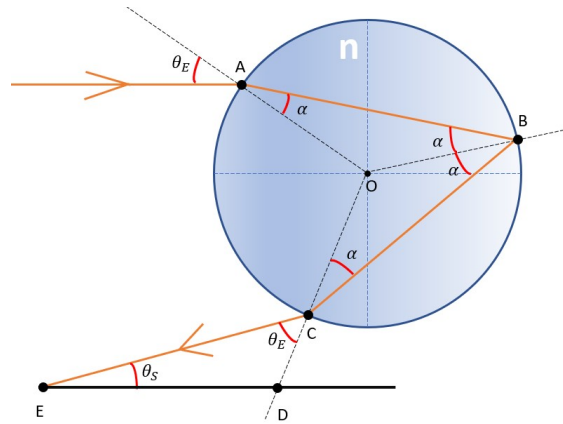


Figura B.45: Análise geométrica de um feixe de luz em uma gota de água. Parte - 2

ponto C de θ_E . Juntando tudo o que obtivemos, temos uma representação conforme a ilustrada na figura B.45.

Estamos, agora, em posição de encontrar a relação entre o ângulo de saída θ_S em função do ângulo de entrada θ_E . Para isso, vamos considerar o ponto O , centro da esfera, e fazer a soma dos ângulos centrais. Nos triângulos AOB e BOC vemos que, em ambos os casos, o ângulo \hat{O} vale $180^\circ - 2\alpha$. Através de ângulos alternos internos, é possível verificar que o ângulo entre a reta \overline{AO} e a horizontal é igual a θ_E . Para fechar o círculo em torno do ponto O , falta um pequeno ângulo entre \overline{OC} e a horizontal. Esse ângulo é igual ao ângulo externo do ponto D , no triângulo CDE . Ou seja, podemos afirmar que $x = \theta_E + \theta_S$. Após essa segunda análise dos ângulos dentro da esfera, podemos ver as marcações de acordo com a figura B.46.

Sabendo que todos os ângulos em torno do ponto O devem somar 360° , chegamos a seguinte relação:

$$180^\circ - 2\alpha + 180^\circ - 2\alpha + \theta_E + \theta_E + \theta_S = 360^\circ \quad (\text{B.7})$$

$$\theta_S = 4\alpha - 2\theta_E. \quad (\text{B.8})$$

Utilizando a Lei de Snell-Descartes para a refração que ocorre no ponto A , chegamos a

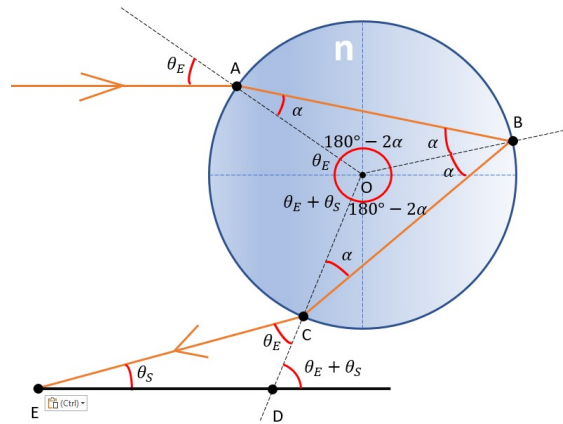


Figura B.46: Análise geométrica de um feixe de luz em uma gota de água. Parte - 3

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{sen } \theta_E}{n}. \quad (\text{B.9})$$

$$\alpha = \arcsen \left(\frac{\text{sen } \theta_E}{n} \right) \quad (\text{B.10})$$

Substituindo B.10 em B.8, obtemos

$$\theta_S = 4 \arcsen \left(\frac{\text{sen } \theta_E}{n} \right) - 2\theta_E. \quad (\text{B.11})$$

Mesmo tendo determinado o ângulo de saída (θ_S) em função do ângulo de entrada (θ_E), é difícil perceber apenas de olhar para a expressão acima a razão de o arco-íris ser visto apenas em uma pequena região e não em toda a região que possui gotículas suspensas. A situação muda completamente ao analisarmos a relação acima graficamente.

Gráficos θ_S x θ_E .

Agora, em posse da função que determina o ângulo de saída em função do ângulo de entrada (equação B.11), podemos plotar o gráfico desta função em alguma calculadora gráfica. Para este trabalho, a ferramenta escolhida foi o *Geogebra*, que além de possuir uma boa interface visual é um recurso gratuito. Para aperfeiçoar o estudo gráfico, vamos, inicialmente, fazer a

análise do gráfico somente para a luz vermelha, cujo índice de refração na água é $n_{\text{VERMELHO}} = 1,33141$, conforme mostrado na figura B.47.

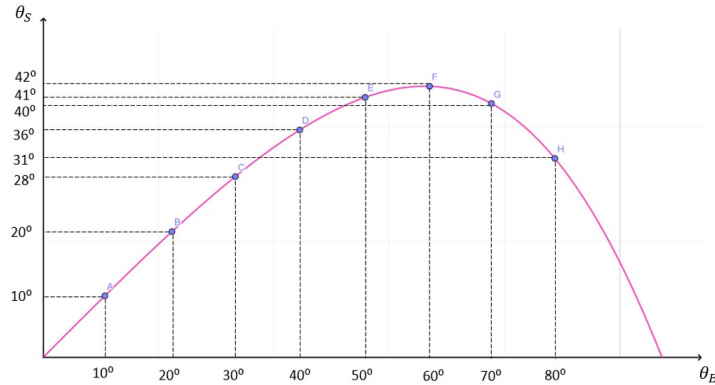


Figura B.47: Gráfico $\theta_E \times \theta_S$ da equação B.11 para a luz vermelha.

Analisando a figura B.47, tomamos o trecho do gráfico delimitado pelos pontos A , B e C . Neste trecho vimos que para um intervalo de 20° para os ângulos de entrada (de 10° a 30°) os valores dos ângulos de saída se concentram em um intervalo de 18° (de 10° a 28°). Entretanto, se pegarmos o trecho delimitado pelos pontos E , F e G , vemos que para o mesmo intervalo de 20° para o ângulo de entrada (de 50° a 70°), se obtém ângulos de saída concentrados em um intervalo de apenas 2° (de 40° a 42°). Isso dá uma ideia de que muitos raios, que entram em pontos distintos acabam se reunindo em uma faixa de ângulos de saída específico. Este ângulo de saída em que há a concentração de raios com diversos ângulos de entrada, para a luz vermelha, é de aproximadamente 42° , justamente o ponto máximo desse gráfico. Isso significa que um observador conseguirá ver a presença dessa cor vermelha com um ângulo de 42° com em relação à direção que os raios de luz do Sol estão chegando naquele local.

Isso explica o motivo do arco-íris ser de fato um arco! Podemos imaginar isso, por exemplo, como se pegássemos um compasso com uma abertura de 42° e fincássemos a ponta seca na direção em que o raio de luz tem uma direção e em que passa pela mesma altura dos olhos do observador e girássemos. Neste ângulo, então, estará presente a cor vermelha do arco-íris. A figura B.48 demonstra essa situação.

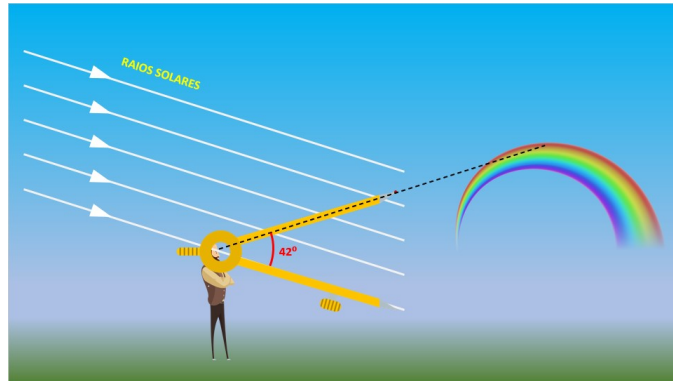


Figura B.48: Abertura de 42° para a luz vermelha de um arco-íris.

Ainda em posse da equação B.11, podemos fazer o gráfico $\theta_S \times \theta_E$ para a cor violeta, que é o outro extremo do arco-íris e cujo índice de refração é $n_{\text{VIOLETA}} = 1,34451$. Novamente, fazemos o gráfico no *Geogebra*, como é visto na figura B.49. Percebemos que os raios de luz para essa cor têm uma concentração maior quando o ângulo de saída está na faixa entre 37° e 40° que é o ângulo com o qual é visto essa cor no arco-íris. Isso explica o fato de as cores do arco-íris terem aquela ordem, o vermelho na extremidade de cima e o violeta na extremidade de baixo, com o restante das cores entre as duas citadas.

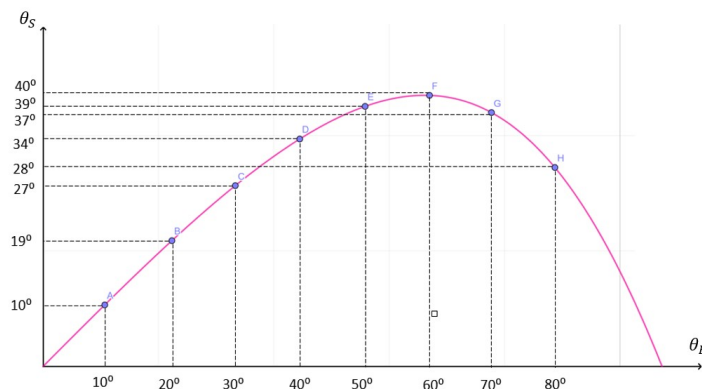


Figura B.49: Gráfico $\theta_E \times \theta_S$ da equação B.11 para a luz violeta.

É possível ou não estar embaixo do arco-íris?

A resposta para essa pergunta é bem curta: não é possível! Assim como não é possível chegar no final do arco-íris e encontrar o tão sonhado pote de ouro. Tendo visto que o ângulo formado pelo arco-íris em relação aos raios de luz incidentes, concluímos que é impossível se ter o arco-íris exatamente em cima do observador, já que para isso ocorrer, seria necessário ter o raio de luz vindo de dentro da Terra, como mostrado na figura B.50.

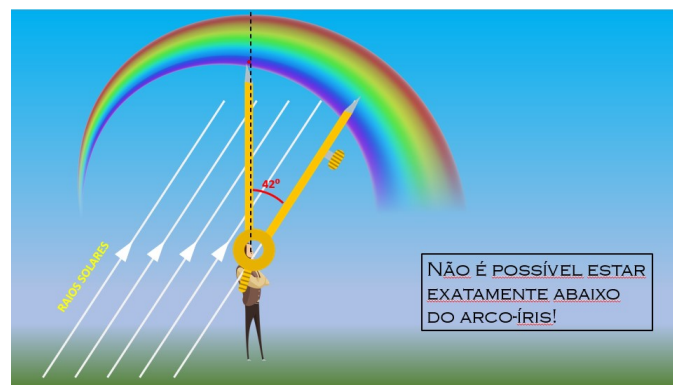


Figura B.50: Demonstração de como a luz deveria incidir para um observador estar exatamente embaixo do arco-íris.

Na realidade, nem sequer o arco-íris tem uma posição bem definida. Afinal, há um conjunto enorme de gotas, em diferentes posições na atmosfera que nos enviam os raios que vão compor o arco-íris que vemos. Nosso cérebro acaba percebendo o arco como se estivesse em uma posição fixa do espaço, mas este não é o caso. Inclusive, para dois observadores distintos, as gotas que produzem o arco-íris são distintas, afinal a construção ilustrada na figura B.48 é dependente da posição do observador. Ao nos deslocarmos, o arco-íris que vemos, portanto, sequer é o mesmo arco-íris que víamos inicialmente.

Determinação analítica do valor máximo de θ_S (Opcional)

Como foi visto na subseção anterior, é possível determinar o ângulo de um arco-íris em relação à direção dos raios de luz que chegam em uma determinada região da Terra. No entanto, a ferramenta utilizada para tal foi o

Geogebra, o que possibilitou uma análise mais qualitativa. Agora, nesta seção, o objetivo é fazer uma abordagem matemática e mostrar como se pode chegar ao valor do ponto onde há maior concentração de feixes de luz saindo de uma gota. Para tal, serão utilizados alguns conceitos de cálculo infinitesimal, porém sem de fato empregar nenhuma ferramenta de limite e derivada. Essa é uma demonstração que pode ser dada em sala de aula até mesmo para nível médio. Analisando as figuras B.47 e B.49, é possível considerar que nos pontos máximos dos gráficos, uma pequena variação no ângulo de entrada θ_E praticamente não altera o valor do ângulo de saída θ_S . Ou seja, nesse ponto, pode se considerar que $\Delta\theta_S = 0$. Com a aplicação deste conceito e utilizando como base a equação B.8, se chega à equação

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta\theta_E} = \frac{1}{2}. \quad (\text{B.12})$$

Consideremos o efeito de um pequena variação Δ_E em α , o que pode ser visto através da equação B.9. Denotando tal variação por $\Delta\alpha$, obtemos

$$\text{sen}(\alpha + \Delta\alpha) = \frac{\text{sen}(\theta_E + \Delta\theta_E)}{n} \Rightarrow \quad (\text{B.13})$$

$$\text{sen}(\alpha) \cos(\Delta\alpha) + \text{sen}(\Delta\alpha) \cos(\alpha) = \frac{\text{sen}(\theta_E) \cos(\Delta\theta_E) + \text{sen}(\Delta\theta_E) \cos(\theta_E)}{n} \quad (\text{B.14})$$

Lembrando da relação trigonométrica de para ângulos muito pequenos, que tendem a zero (uma demonstração para o ensino médio pode ser encontrada no apêndice deste material instrucional), temos as seguintes aproximações $\text{sen} \theta \approx \tan \theta \approx \theta$ e que $\cos \theta \approx 1$. Aplicando-se essa aproximação para $\Delta\alpha$ e $\Delta\theta_E$, chegamos à equação

$$\text{sen}(\alpha) + \Delta\alpha \cos(\alpha) = \frac{\text{sen}(\theta_E)}{n} + \frac{\Delta\theta_E \cos(\theta_E)}{n}. \quad (\text{B.15})$$

Pela equação B.9, obtemos

$$\Delta\alpha \cos(\alpha) = \frac{\Delta\theta_E \cos(\theta_E)}{n} \quad (\text{B.16})$$

Combinando a equação anterior com a equação (B.12) ficamos com

$$\cos \theta_E = \frac{n \cos \alpha}{2}. \quad (\text{B.17})$$

A expressão acima já é a relação desejada. O ângulo θ_E que satisfaz à condição acima é o ângulo de entrada para o qual o ângulo de espalhamento é máximo. O mais conveniente é expressá-lo diretamente em termos do índice de refração, o que pode ser feito empregando novamente a equação (3.3). Para tanto basta escrevermos $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_E / n^2} = \sqrt{1 - (1 - \cos^2 \theta_E) / n^2}$. Substituindo esta relação em (3.8) e isolando $\cos \theta_E$ obtemos

$$\theta_E = \arccos \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}}. \quad (\text{B.18})$$

Substituindo o índice de refração da luz vermelha ($n = 1,33141$) e da luz violeta ($n = 1,34451$) na água na equação B.18, se obtém os ângulos de entrada correspondem ao ângulo máximo de saída para cada cor.

$$\theta_E = \arccos \left(\sqrt{\frac{1,33141^2 - 1}{3}} \right) \approx 1,03852 \text{rad} \approx 59,5^\circ (\text{Vermelho}) \quad (\text{B.19})$$

$$\theta_E = \arccos \left(\sqrt{\frac{1,34451^2 - 1}{3}} \right) \approx 1,02526 \text{rad} \approx 58,7^\circ (\text{Violeta}) \quad (\text{B.20})$$

Substituindo esses valores dos ângulos de entrada das equações B.19 e B.20 na equação B.11, se chegam aos seguintes valores para os máximos ângulos de saída do vermelho e do violeta.

$$\theta_S \approx 42^\circ \text{ Vermelho}$$

$$\theta_S \approx 40^\circ \text{ Violeta}$$

O resultado encontrado confirma que os valores encontrados pela resolução algébrica são coerentes com os valores obtidos pelos gráficos plotados no *Geogebra*.

B.3.5 Por que vemos o arco-íris sendo um arco e não uma circunferência inteira?

Antes de qualquer explicação, é bom deixar claro que é possível ver um arco-íris na forma de uma circunferência completa, porém é necessário que o observador esteja em algum lugar específico que permita que isso ocorra. Isso geralmente ocorre em locais altos, onde se tem gotículas abaixo do observador, para o arco-íris inteiro se formar, como é visto na figura B.51.



Figura B.51: Imagem aérea que demonstra a possibilidade do arco-íris ser uma circunferência inteira. - Retirado de <https://extra.globo.com/noticias/viral/turista-flagra-arco-iris-circular-no-canada-veja-video-16380939.html> - Acessado em Julho de 2023.

Entretanto, a maneira mais comum que vemos o arco-íris é sendo apenas um arco de circunferência e a explicação para isso é bem simples: a parte inferior do arco-íris estaria “se formando” abaixo da Terra, como nós vemos na figura B.52. Na realidade esta parte do arco não se forma pois abaixo da Terra não há a chegada dos raios solares e, tampouco, existem gotículas suspensas.

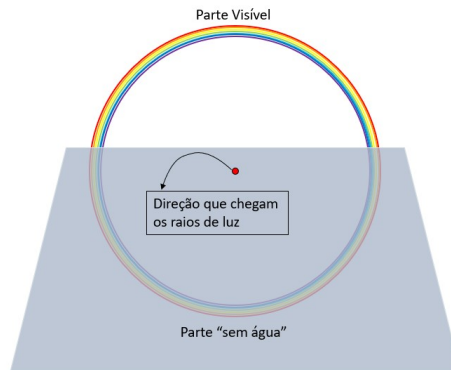


Figura B.52: Esquema que representa a parte visível de um arco-íris convencional.



Figura B.53: Faixa Escura de Alexander entre os arco-íris primário e secundário.

B.3.6 O que são e como se formam os arco-íris secundários?

Como vimos anteriormente, os arco-íris convencionais, também chamados de arco-íris primários, são aqueles formados após uma única reflexão dentro da gotícula de água. Já o arco-íris secundário, que pode ser visto na figura B.53, é formado por parte da luz que sofre duas reflexões dentro de uma gotícula antes de ser refratada para fora dela, como é representado no esquema da figura B.54. É interessante reparar que o arco-íris secundário possui uma luminosidade menos intensa do que o primário. Isso é explicado pelo fato de

que a cada vez que a luz aprisionada incide na gotícula, parte da sua energia é perdida devido a refração que também ocorre. Outra curiosidade que pode ser analisada é que as cores do arco-íris secundário são invertidas em relação ao primário. No entanto, para conseguirmos entender o motivo dessa inversão de cores, vamos recorrer, novamente, a uma análise geométrica do que ocorre com os feixes de luz responsáveis pela formação destes arco-íris.

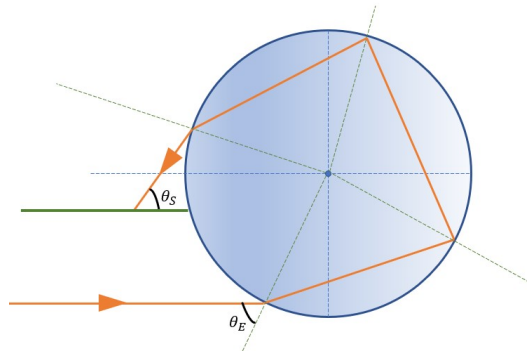


Figura B.54: Análise geométrica de um feixe de luz em uma gota de água para o arco-íris secundário.

Assim como vimos que existe uma equação que determina o ângulo de saída em função do ângulo de entrada para o arco-íris primário, também é possível fazer o mesmo raciocínio matemático para o arco-íris secundário. Fazendo uma manipulação geométrica análoga, obtemos para o arco-íris secundário

$$\theta_S = \pi - 6 \arcsen \left(\frac{\text{sen}(\theta_E)}{n} \right) - 2\theta_E. \quad (\text{B.21})$$

Colocando equação B.21 no *Geogebra*, podemos plotar os gráficos que representam os ângulos de saída em função do ângulo de entrada para a luz vermelha e para a luz violeta, conforme ilustrado nas figuras B.55 e B.56, respectivamente. Analisando estas figuras, podemos ver que a luz vermelha tem um reforço quando o ângulo de saída é de aproximadamente $50,6^\circ$ enquanto a luz violeta tem esse mesmo reforço quando o ângulo de saída é de $53,1^\circ$. Ou seja, para o arco-íris secundário o reforço da luz violeta tem um ângulo maior que o reforço da luz vermelha, logo a cor violeta do

arco-íris secundário se apresenta acima do vermelho, invertendo as cores em relação ao arco-íris primário.

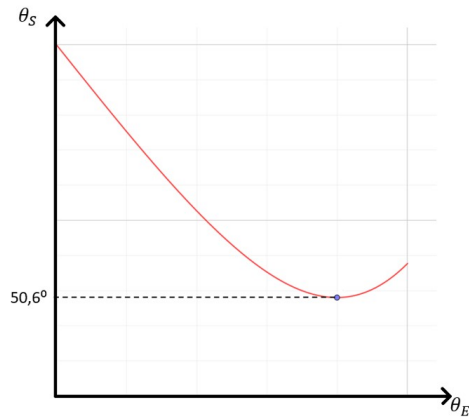


Figura B.55: Gráfico θ_S x θ_E do arco-íris secundário para a luz vermelha.

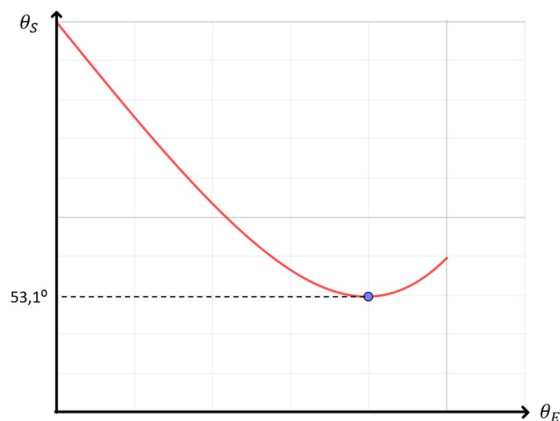


Figura B.56: Gráfico θ_S x θ_E do arco-íris secundário para a luz violeta.

Faixa escura de Alexander

Como já foi visto anteriormente, o arco-íris primário é formado na primeira refração com uma grande concentração de feixes de luz entre os ângulos de 40° e 42° com a direção dos feixes de luz que chegam àquele local. Já no arco-íris secundário há uma grande concentração de luz entre os ângulos de aproximadamente $50,6^\circ$ e $53,1^\circ$. Portanto, vão existir ângulos de saída que

não são contemplados por nenhum ângulo de entrada para as duas primeiras refrações dentro da gotícula. Isso pode ser compreendido de maneira mais clara ao se analisar a figura B.57 que mostra o comportamento dos feixes de luz que saem na primeira e na segunda refração em função do ângulo de entrada.

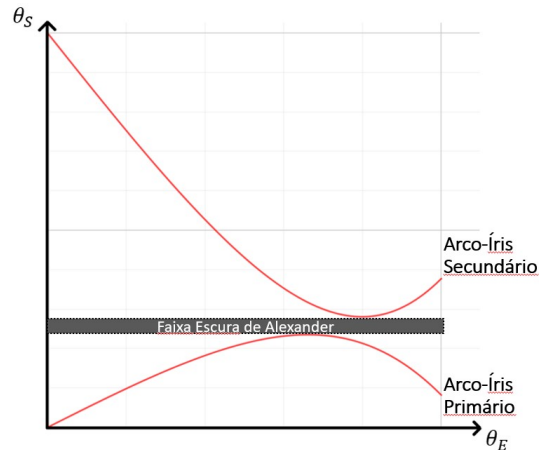


Figura B.57: Gráfico θ_S x θ_E dos arco-íris primário e secundário para a luz vermelha indicando em qual ângulo se encontra a Faixa Escura de Alexander.

Se percebe que há uma faixa para o ângulo de saída que nenhuma dessas duas refrações alcança. Essa faixa é chamada de Faixa Escura de Alexander, que é uma região mais escura entre o arco-íris primário e o secundário. Essa região não se torna completamente escura já que só podemos garantir até agora que os feixes das duas primeiras refrações não atingem essa região, além temos que considerar que essa região é indiretamente iluminada pela luz solar através do processo de espalhamento, independente do que adentra nas gotículas. Na figura B.53 é possível ver a Faixa Escura de Alexander entre os arco-íris primário e secundário.

B.3.7 Por que não vemos o arco-íris de ordem zero?

Em uma das discussões que foi feita anteriormente, ponderamos que o arco-íris secundário é menos intenso do que o primário já que a cada reflexão que ocorre na gotícula, a luz aprisionada perde energia por conta da refração.

Por conta disso podemos imaginar então que o arco-íris mais intenso possível é aquele a parte da luz que formaria o arco-íris não faria nenhuma reflexão, apenas duas refrações, como é ilustrado na figura B.58.

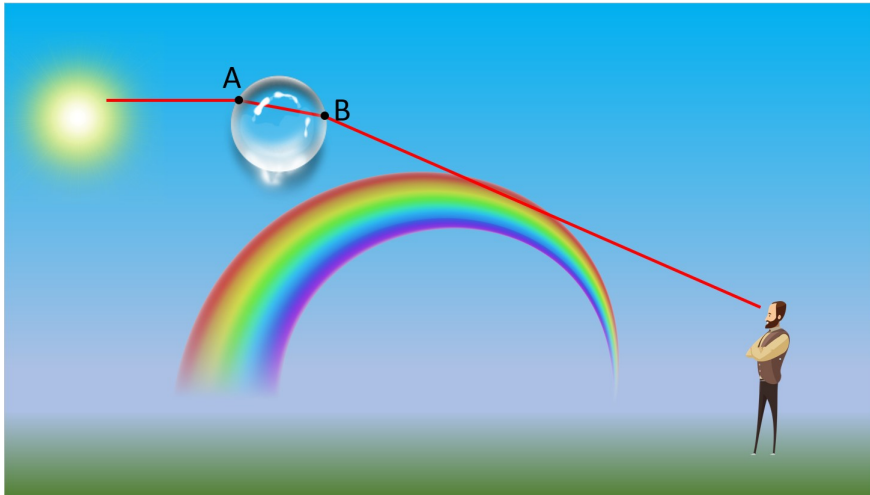


Figura B.58: Parte da luz que entra e sai de uma gotícula sem sofre reflexão.

No entanto, esse arco-íris de ordem zero não existe. Podemos questionar se a não ocorrência é uma limitação por estarmos virados pro Sol e, por conta disso, a luminosidade solar ofuscasse as cores do arco-íris. No entanto, existem arco-íris de ordem superior que são formados por raios de luz que atingem o observador voltado para Sol. Embora o nosso olho não seja capaz de detectá-los, câmeras sensíveis conseguem capturar esse tipo de arco-íris, como é mostrado na figura B.59.

Além desses arco-íris de ordem superiores, também existem situações em que é possível ver um reforço das cores, mesmo em uma situação de estarmos voltados para a direção do Sol, em um fenômeno conhecido como halo solar, conforme é mostrado na figura B.60. Este fenômeno pode ser diretamente observado com nossos olhos, sem a necessidade de câmeras super sensíveis. Portanto, devemos buscar outra alternativa para explicar a não ocorrência do arco-íris de ordem zero.

Para isso, vamos fazer a análise geométrica do que ocorre com o feixe de luz que adentra uma gotícula e sai dela sem sofrer nenhuma reflexão, como é representado na figura B.61.

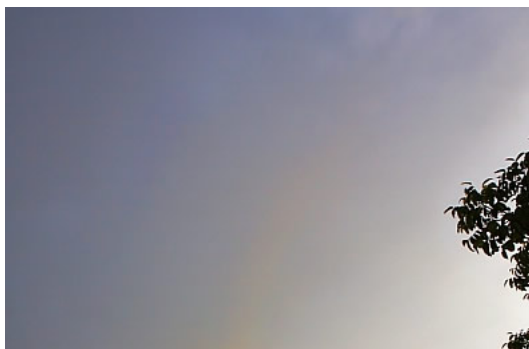


Figura B.59: Arco-íris de ordem 3. - Retirado de <https://atoptics.co.uk/rainbows/ord34.htm> - Acessado em Julho de 2023.



Figura B.60: Halo solar. - Retirado de <https://atoptics.co.uk/halo/circular.htm> - Acessado em Julho de 2023.

Fazendo a análise geométrica similar ao que foi feito no arco-íris primário e secundário, é possível se chegar ao ângulo de saída da gotícula em função do ângulo de entrada da seguinte forma:

$$\theta_S = 2\theta_E - 2 \arcsen \left(\frac{\text{sen}(\theta_E)}{n} \right). \quad (\text{B.22})$$

Ao se plotar o gráfico dessa função no *Geogebra* considerando os índices de refração para luz vermelha e violeta utilizados anteriormente, chegamos a uma curva conforme representado na figura B.62. Neste gráfico está a

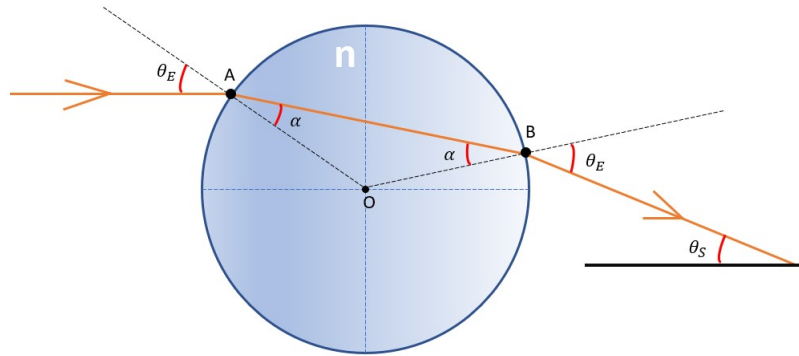


Figura B.61: Análise geométrica de um feixe de luz que formaria o arco-íris de ordem zero.

explicação de não existir um arco-íris de ordem zero: não existem valores extremos (máximos ou mínimos). Isto significa que não há nenhuma direção para a qual há um reforço da intensidade da luz para uma dada cor. Logo não existe um arco-íris de ordem zero.

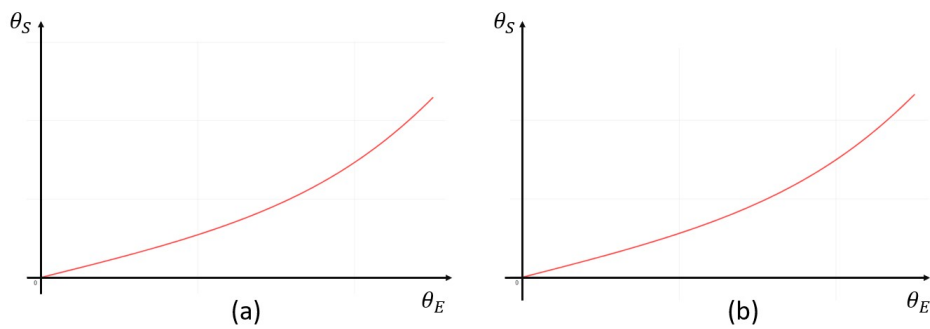


Figura B.62: Gráfico θ_S x θ_E do feixe de luz que entra e sai da gotícula sem sofrer reflexão para a cor: (a) vermelha; (b) violeta.

B.4 A Óptica Ondulatória

Em todas as situações vistas nos materiais sobre Princípios de Propagação da Luz e Arco-íris, vimos que a óptica geométrica é suficiente para explicar os fenômenos ópticos. Em particular, vimos que o Princípio de Fermat é uma base satisfatória para nossa compreensão fenomenológica. No entanto, alguns fenômenos podem colocar em xeque a teoria da óptica geométrica. Por exemplo, considere a figura B.63. Na parte de baixo do arco-íris observamos alternâncias de cores. Como explicá-las? Por que não são sempre perceptíveis? Já na figura B.64, há uma pequena lâmina que está sendo iluminada em que também é possível vermos uma situação em que a luz se “estilhaça” iluminando de forma meio que aleatória a região interna da lâmina, ocorrendo novamente a alternância entre a ocorrência de luz e de sombra.



Figura B.63: Supernumerárias em um arco-íris. - Retirado de - Acessado em Julho de 2023. Figura retirada de <https://atoptics.co.uk/rainbows/supers.htm> (consultado em 23/07/2023)



Figura B.64: "Estilhaços" de luz adentrando a região de uma lâmina. - Retirado de <https://sciencedemonstrations.fas.harvard.edu/presentations/edge-diffraction> - Acessado em Julho de 2023.

Por fim, podemos analisar um *Compact Disk* ao ser iluminado com uma luz branca, como mostrado na figura B.65. Nessa situação podemos ver a luz sendo refletida em cores que formam um padrão aparentemente aleatório, diferentemente, por exemplo, do que ocorre na dispersão, em que as cores tem uma sequência bem definida. Ao observar esses fenômenos podemos continuar considerando que a luz satisfaz a leis geométricas? Ao contrário, estas oscilações estão longe dos fenômenos que tratamos na óptica geométrica, contudo essa alternância de aparecer e não aparecer luz (ou cores) nos sugere que a luz está se apresentando como um fenômeno ondulatório, conforme exploraremos mais detalhadamente a seguir.

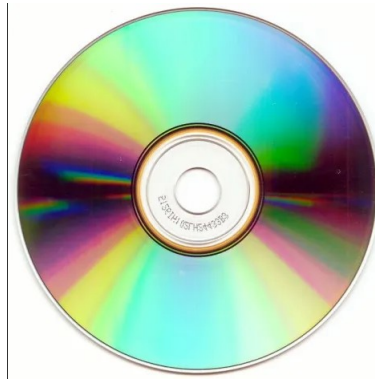


Figura B.65: CD ao ser iluminado por uma luz branca. - Retirado de <https://en.wikipedia.org/wiki/Iridescence> - Acessado em Julho de 2023.

Alguns fenômenos observados na natureza ou em experimentos começaram a refutar o caráter corpuscular da luz que foi defendido por diversos cientistas ao longo da história, notadamente por Isaac Newton. No lugar de uma concepção corpuscular, foi proposto que a luz pudesse se propagar como uma onda. Por exemplo, o físico Thomas Young, com seu famoso experimento da dupla fenda, veio a reforçar a teoria de Christiaan Huygens de que a luz tinha um caráter ondulatório. No experimento da dupla fenda Young, como é representado na figura B.66, é possível visualizar um padrão de interferência já que são vistos pontos escuros alternando-se a pontos iluminados.

A partir de todas essas evidências, se tentou formular um teoria que en-

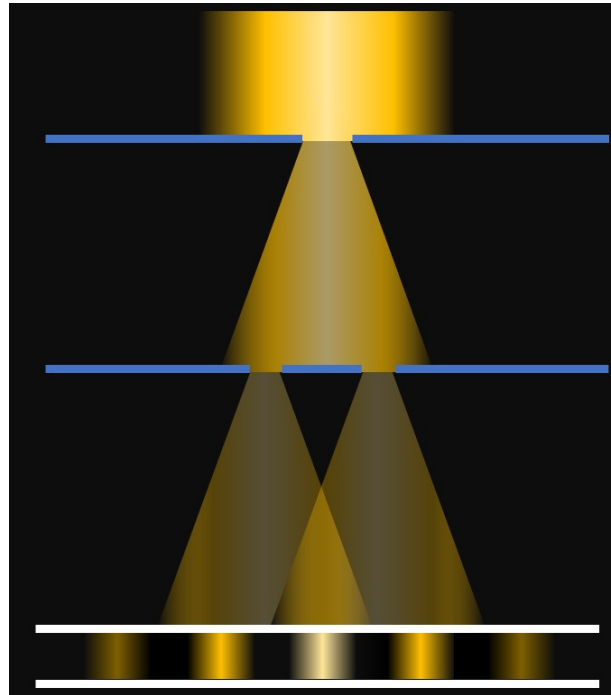


Figura B.66: Representação esquemática do Experimento da Dupla Fenda de Young.

globasse todos os fenômenos ópticos: a óptica ondulatória. Com essa análise inicial, pode surgir um questionamento: por que a óptica geométrica ainda é estudada e ensinada tanto na educação básica quanto na educação superior? Um ponto central é que para muitos aspectos de nosso cotidiano a óptica geométrica é uma teoria capaz de fornecer uma descrição adequada do que observamos. Um dos nossos objetivos neste roteiro é justamente delimitar o domínio de validade da óptica geométrica. Em suma, neste material vamos abordar alguns conceitos e algumas curiosidades sobre a teoria ondulatória da luz. Veremos, em especial, que há diversos fenômenos presentes em nosso cotidiano que requerem a teoria ondulatória. Nesta instrução, vamos mostrar como utilizar a apresentação feita em *Powerpoint*, que pode ser acessado clicando [aqui](#). Caso tenha alguma dúvida de como foi idealizada a aplicação deste material, acesse o vídeo, no *Youtube*, em que é aplicado este material clicando [aqui](#).

B.4.1 Se a luz é uma onda, como ela se propaga no vácuo?

Vamos lembrar que a onda, de acordo com a sua natureza, pode ser classificada de duas formas: mecânica e eletromagnética. As ondas mecânicas, são ondas que se propagam através de meios materiais, sejam eles sólidos, líquidos ou gasosos. Neste tipo de ondas, ocorrem vibrações ou deformações em meios elásticos. Já as ondas eletromagnéticas são ondas que não necessitam de meio, ou seja, podem, inclusive, se propagar no vácuo. Essa propagação se dá através de oscilações perpendiculares de campos. No caso da luz são campos elétricos e magnéticos que oscilam, como representado na figura B.67.

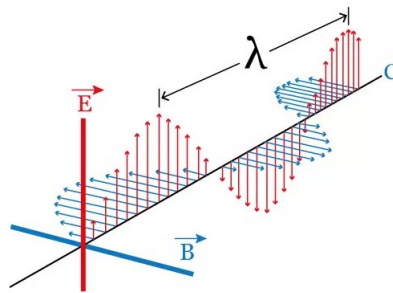


Figura B.67: Representação da propagação de uma onda eletromagnética. - Retirado de <https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/fisica/ondas-eletromagneticas> - Acessado em Julho de 2023.

Portanto, podemos classificar a luz como uma onda eletromagnética e isso explica o motivo dela conseguir se propagar na ausência de matéria. Na realidade, foi justamente a constatação de que a luz não necessita de meio para se propagar que pavimentou o caminho para a relatividade de Einstein. Contudo, a fenomenologia que testemunhamos envolvendo a luz também não parece exatamente análoga ao que observamos com as ondas usuais de nosso cotidiano, como as ondas na superfície de um lago. A partir das questões a seguir buscaremos entender as semelhanças e diferenças entre os dois fenômenos.

B.4.2 Se a luz é uma oscilação, por que não a vemos piscando e sim como algo contínuo?

Ao analisarmos uma onda mecânica sendo gerada por uma vibração na água, por exemplo, é possível diferenciar onde se encontram os vales e cristas facilmente, como é mostrado na figura B.68. No entanto, ao enxergarmos a luz, não temos essa sensação de oscilação e sim de que a luz chega aos nossos olhos de forma contínua. Portanto, isso seria mais um motivo que pode confrontar a teoria ondulatória da luz, mas com o conhecimento que temos atualmente, é um questionamento que pode ser respondido. No entanto, trazer essa discussão histórica pode enriquecer a resposta dessa pergunta.



Figura B.68: Ondas sendo geradas por vibrações feitas na superfície da água. - Retirado de <https://youtu.be/Iuv6hY6zsd0> - Acessado em Julho de 2023.

Tudo começa no século XVII quando o astrônomo dinamarquês Ole Rømer, através de suas observações do eclipse de uma das luas de Júpiter, determinar que a velocidade da luz era finita. Hoje isso pode parecer bem óbvio, mas para a época em que não se sabia se a luz tinha velocidade finita ou infinita, isso já foi um grande passo para a determinação da velocidade da luz. Porém, foi Huygens, ainda no mesmo século, que, partindo das observações de Rømer, conseguiu inferir que a velocidade da luz era algo em torno de $2,12 \times 10^8 m/s$. Apesar de sabermos que isso não está coerente com o valor atualmente aceito, o erro dele foi de apenas 30%, algo completamente aceitável, levando em consideração os equipamentos utilizados naquele período. No entanto, o que importa, nesse momento, para entendermos o motivo de não conseguirmos ver a oscilação da luz é apenas a ordem de grandeza da

velocidade da luz: 10^8 m/s.

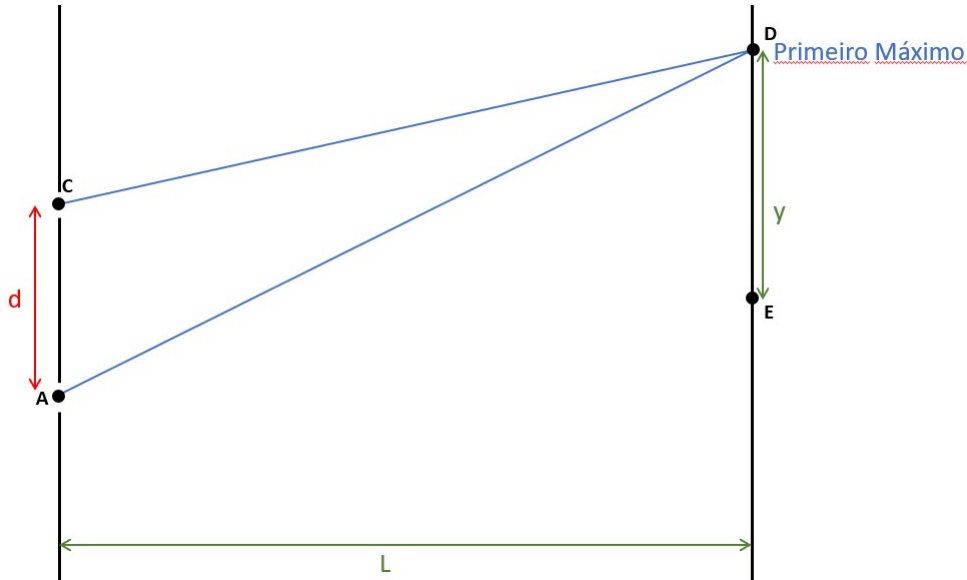


Figura B.69: Representação esquemática do Experimento de Young.

Além da velocidade, é possível chegar, experimentalmente, a outro parâmetro da propagação da luz: a ordem de grandeza do comprimento de onda. O valor aproximado do comprimento de onda da luz pode ser medido através do Experimento de Young, que é esquematicamente representado na figura B.69, em que o primeiro máximo (ponto iluminado) pode ser representado de acordo com a seguinte equação

$$y = \frac{\lambda \cdot L}{d}. \quad (\text{B.23})$$

Ou seja, podemos chegar que o comprimento de onda da luz através da seguinte relação

$$\lambda = \frac{y \cdot d}{L}. \quad (\text{B.24})$$

Dispondo da modelagem apresentada acima, podemos realizar esse experimento em sala de aula com a utilização de um *laserpoint* e uma dupla fenda (caso não tenha disponível a dupla fenda, pode ser utilizado um fio de cabelo). No experimento que foi realizado para a realização deste material,

foi utilizado um *laserpoint* de cor verde, uma dupla fenda separada por uma distância de 25 milímetros ($d = 2,5 \times 10^{-4}$ m) que estava separada do anteparo por 2 metros ($L = 2$ m). Os materiais utilizados podem ser vistos na figura B.70.



Figura B.70: Materiais utilizados para reproduzir o Experimento de Young.

Para esta configuração, medimos que o primeiro máximo estava a uma distância de 4 milímetros ($y = 4 \times 10^{-3}$ m) da região central, como representado na figura B.71. Substituindo esse valor na equação B.24 chegamos ao valor para o comprimento de onda dado por

$$\lambda = \frac{4 \times 10^{-3} \cdot 2,5 \times 10^{-4}}{2} = 5 \times 10^{-7} \text{ m} = 500 \text{ nm}. \quad (\text{B.25})$$

Com o resultado obtido acima, concluímos que comprimento de onda da luz é da ordem de 10^{-6} m. De posse dessa estimativa, e também da ordem de grandeza da velocidade da luz, podemos utilizar a equação fundamental da ondulatória ($V = \lambda \cdot f$) e deduzir que a frequência com que a

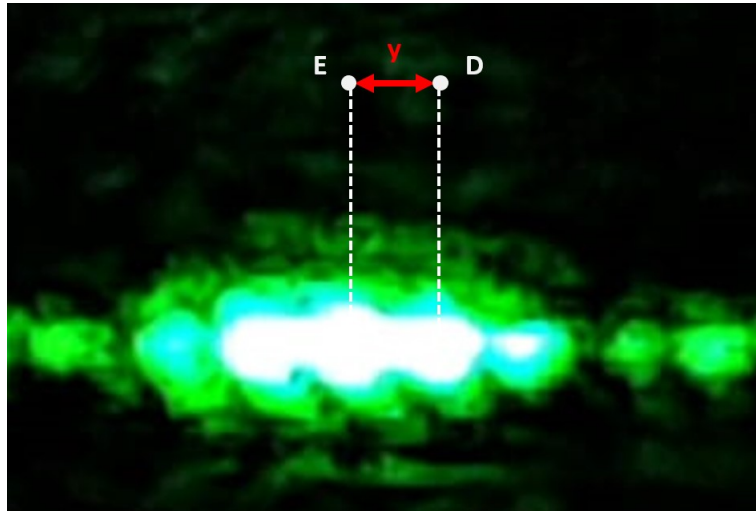


Figura B.71: Padrão de interferência apontando a distância y do primeiro máximo.

luz oscila é na ordem de 10^{14} Hz. Esse é o motivo pelo qual não enxergamos a luz oscilando, já que essa oscilação ocorre centenas de trilhões de vezes por segundo, algo imperceptível ao olho humano, que enxerga apenas a média dessas oscilações, ou seja, uma propagação contínua.

B.4.3 O diferencia as cores?

Vamos recorrer novamente a um exemplo da mecânica para responder a este questionamento. Para isso, vamos pegar uma simulação do *Phet*, uma plataforma da Universidade do Colorado, que oferece simulações para ciências e matemática. Dentro dessa plataforma, há um simulador que replica a situação de gotas que caem simultaneamente de duas torneiras diretamente em um recipiente com água. As gotas ao tocarem a superfície da água, formam ondulações e essas ondas ao se cruzarem, geram um padrão de interferência. Isso pode ser visto na figura B.72a. No entanto, ao aumentar a frequência das gotas que caem, ou seja, deixar pingar mais gotas em menos tempo, o padrão de interferência se altera, como é possível ver na figura B.72b.

De posse dessa situação, agora analisamos como se comporta o experimento de Young para duas cores que estão sendo emitidas separadamente,

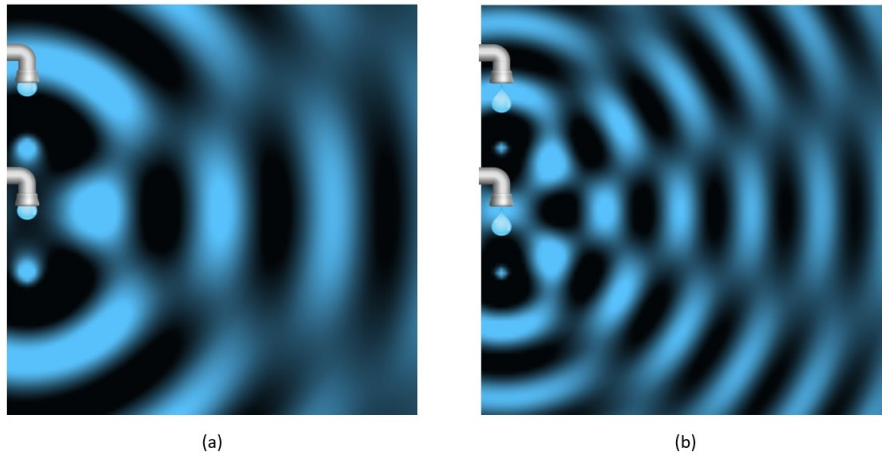


Figura B.72: Padrão de interferência formado pela simulação do *Phet*. Há um aumento da frequência de (a) para (b). Figura capturada em https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-interference/latest/wave-interference_pt_BR.html. - Acessado em Julho de 2023.

como é mostrado na figura B.73. É possível verificar que a o padrão de interferências construtivas e destrutivas, de acordo com a cor da luz, é alterado. Algo similar ao que foi observado na situação das gotas. Isso sugere que as cores da luz são as ondas eletromagnéticas em diferentes frequências de oscilação. Vale lembrar que a velocidade da luz em um meio homogêneo é constante e que a equação fundamental das ondas é $V = \lambda \cdot f$. Por isso, podemos afirmar que as cores são diferentes frequências ou diferentes comprimentos de onda. Esse procedimento de incidir duas cores distintas em uma mesma dupla fenda, é um experimento que pode ser feito em sala de aula de forma semelhante ao que já foi citado neste capítulo, sendo a única diferença a configuração inicial, para este caso, exige dois *laserpoints* de cores diferentes.

Com isso, podemos analisar algumas outras situações que comprovam tanto o caráter ondulatório da luz, quanto essa relação direta das cores com a frequências destas ondas. Como primeiro exemplo, podemos averiguar a figura B.74 que mostra que ao ser iluminada por uma luz branca, a face espelhada de um *compact disk* (CD) apresenta cores diferentes. Dependendo da angulação em que se olha para ele, é possível ver reforço de apenas uma cor



Figura B.73: Experimento da Dupla Fenda feito simultaneamente por um laser vermelho e outro verde. À esquerda o experimento com um laser vermelho e à direita com o verde.

em uma região. Isso ocorre por conta das ranhuras micrométricas existentes na estrutura de um CD que podem gerar, por meio da difração, interferências construtivas e destrutivas para determinadas frequências.

Outro caso que se pode observar essas relações, é analisar algumas borboletas se apresentam coloridas, mas não apresentam pigmento da cor em suas asas. A espécie *Morpho menelaus*, por exemplo, possui pigmentos de cor marrom escuras em suas asas, mas é possível ver a parte superior delas na cor azulada, como representado na figura B.75. Como podemos saber que tal cor não se deve a um pigmento? Já Isaac Newton e Robert Hooke observaram que a cor da asa variava a depender do ângulo de mirada. O mesmo fenômeno acima descrito para o CD, embora aqui muito menos intenso.

A coloração se dá por conta de uma interação entre a luz branca, vinda do sol, e nanoestruturas presentes nas asas destas borboletas. Essa interação

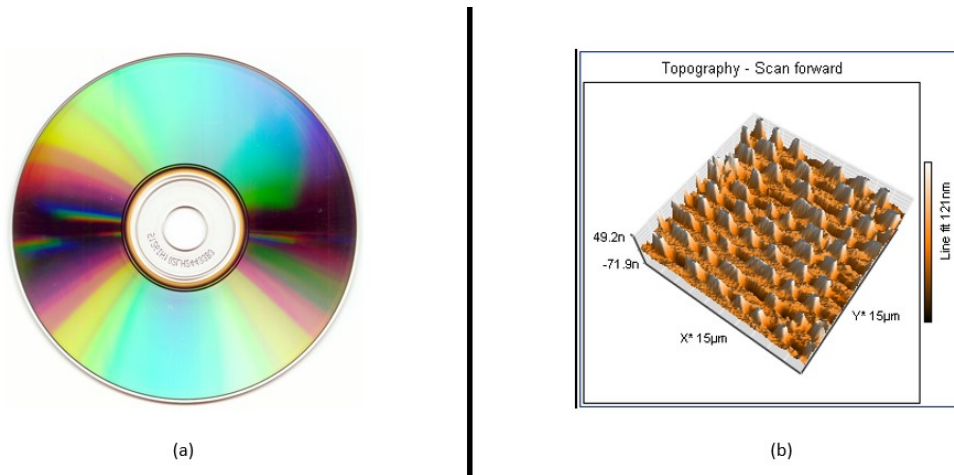


Figura B.74: (a) Imagem de um CD e (b) suas respectivas ranhuras micro-métricas. Retirado de https://en.wikipedia.org/wiki/Compact_disc - Acessado em Julho de 2023.

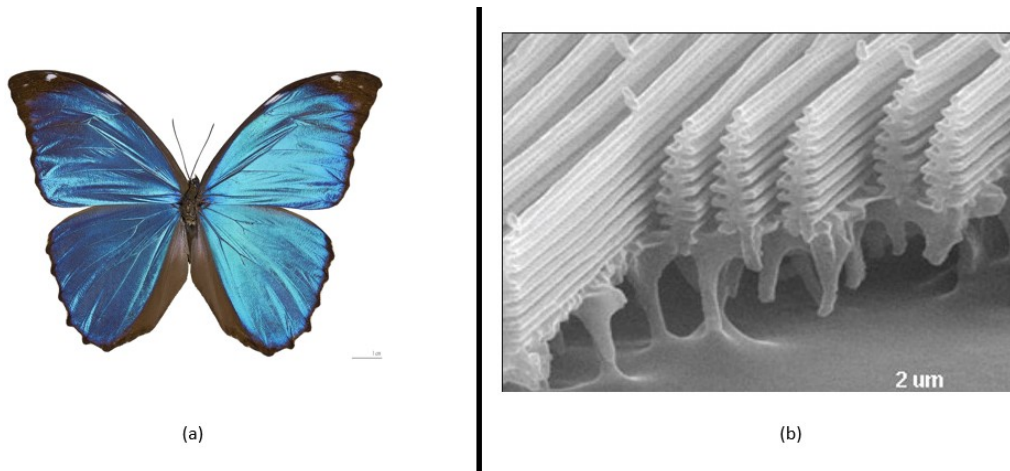


Figura B.75: (a) *Morpho melanaeus* (b) e suas nanoestruturas. - Retirado de <https://pubs.acs.org/doi/full/10.1021/acs.jchemed.7b00463> - Acessado em Julho de 2023.

gera uma interferência construtiva para uma determinada frequência (cor) que faz com que somente essa parte da luz seja refletida de maneira coerente. As demais frequências são absorvidas pela melanina presente nas asas. O tamanho e o índice de refração médio dessas nanoestruturas são os fatores que fazem a asa de uma borboleta poder assumir diversas cores, do vermelho

ao violeta. Com isso é possível imaginar que em uma situação em que a borboleta molhe a sua asa com água, poderia ocorrer uma alteração em sua coloração, já que alteraria o índice de refração de suas nanoestruturas. No entanto, isso não ocorre. As asas desse tipo de borboleta possuem uma característica hidrofóbica, ou seja, não absorvem água. Por conta disso vemos as borboletas sempre da mesma cor, mesmo estando na chuva.

Entretanto, é possível alterar o índice de refração da asa ao cobrir a asa da borboleta com outros tipos de líquido diferentes da água. Na figura B.76 é possível ver uma borboleta *Morpho menelaus*, dividida em quatro quadrantes. No primeiro quadrante, a asa está in natura, ou seja, está no seu estado original, refletindo a luz azul. Já no segundo quadrante, ao se banhar essa parte da asa em etanol, ela passa a refletir a cor verde, já que há uma alteração no índice de refração médio das suas estruturas. O mesmo acontece no terceiro quadrante, ao se banhar a asa da borboleta com uma mistura de água com açúcar. Neste caso, o índice de refração da luz é próximo do índice de refração das nanopartículas que compõem a asa da borboleta, de modo que há pouca reflexão. Por fim, no quarto quadrante temos uma parte da asa que foi banhada com água e, como é possível ver, não alteração nenhuma em relação a asa *in natura*. Como a água fica concentrada em uma gota sem cobrir a asa, demonstramos que a borboleta tem asas hidrofóbicas.

B.4.4 Por que o céu é azul?

De todos os fenômenos tratados até agora nesse material, talvez esse seja o mais democrático, já que observar o céu não necessita de condições especiais e pode ser observado em todo o mundo quase que diariamente. No entanto, explicação para isso talvez não seja tão simples quanto as condições para a ocorrência desse fenômeno óptico.

Para se compreender o motivo do céu se apresentar na cor azulada, pode ser iniciada com um pequeno questionamento: o sol emite todas as cores na mesma intensidade? De acordo com a teoria do corpo negro de Steffan-Boltzmann, a intensidade da emissão da luz solar em relação a frequência que está sendo emitida, se comporta de acordo com a figura B.78. Portanto,



Figura B.76: Asas de uma *Morpho melanaeus* imersas em diferentes meios. - Retirado de <https://pubs.acs.org/doi/full/10.1021/acs.jchemed.7b00463> - Acessado em Julho de 2023.



Figura B.77: O céu azul. - Retirado de https://br.freepik.com/fotos-gratis/paisagem-de-inverno-nevado-contra-o-ceu-azul-claro_4513663.htm - Acessado em Julho de 2023.

a frequência emitida com mais intensidade pelo sol é referente a cor verde.

Porém, o fato de o sol emitir a frequência referente a luz verde com maior intensidade esse pode nos trazer uma outra indagação: por que não

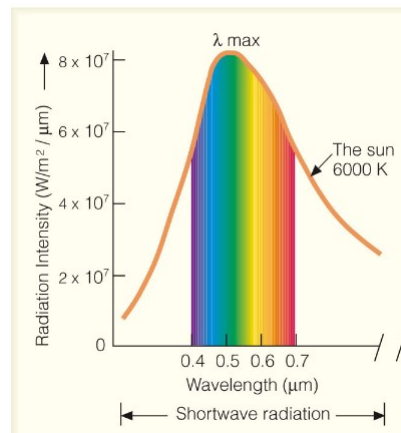


Figura B.78: Intensidade de radiação do Sol emitido de acordo com o comprimento de onda. - Retirado de <https://atmos.washington.edu/~hakim/101/radiation/> - Acessado em Abril de 2023.

enxergamos o céu esverdeado? Pois bem, para entender melhor o fenômeno óptico em questão, vamos ter que entender mais um tipo de interação da luz com partículas: o espalhamento da luz.

O espalhamento da luz é a interação entre a luz e a matéria. Nesse processo, a energia da onda eletromagnética, que chega em uma direção, é absorvida pela matéria para posteriormente ser reemitida em diversas direções. O espalhamento pode ocorrer de diversas formas, dependendo do tipo de partícula e de seu tamanho em relação ao comprimento de ondas. No caso de entender o motivo do céu azulado, a interação que estamos analisando é entre as ondas eletromagnéticas vindas do sol com os gases que se encontram na atmosfera terrestre, similar ao que é representado na figura B.79.

O ponto central no espalhamento da luz pela atmosfera é que a sua intensidade é inversamente proporcional à quarta potência do comprimento de onda ($I \propto \lambda^{-4}$), ou seja, quanto menor o comprimento de onda, maior maior a intensidade espalhada. Este resultado é conhecido como espalhamento Rayleigh, em homenagem ao físico que primeiramente obteve este resultado. Em seu trabalho, Rayleigh empregou análise dimensional para demonstrar a lei de potência. Na dissertação que acompanha este produto apresentamos esta derivação. Por conta deste resultado, temos que a luz violeta é a que possui maior intensidade espalhada na atmosfera terrestre, já que no espectro da luz



Figura B.79: Espalhamento da Luz - Interação da onda eletromagnética com a matéria suspensa na atmosfera. - Retirado de <https://circuitglobe.com/rayleigh-scattering.html> - Acessado em Abril de 2023.

visível, ela é a que tem menor comprimento de onda, como mostra a figura B.80. Ainda em posse dessa figura, podemos ver que a segunda cor mais espalhada é o azul e a menos espalhada é o vermelho. Se a luz violeta é a mais espalhada, por que não enxergamos o céu violeta?

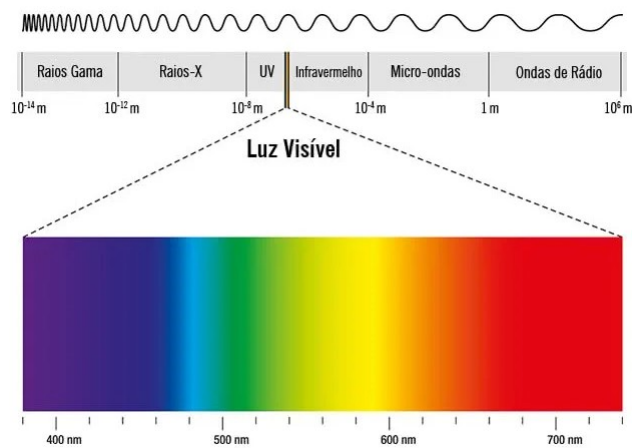


Figura B.80: Espectro eletromagnético da luz de acordo com o comprimento de onda. - Retirado de <https://www.todamateria.com.br/espectro-eletromagnetico/> - Acessado em Abril de 2023.

O motivo de não vermos o céu violeta e ver azulado é uma conjunção de alguns fatores. Apesar da a cor violeta ser a mais espalhada pela atmos-

fera, é emitido em menor quantidade pelo Sol do que o azul. Ou seja, já dá para imaginar que na média, o azul 'está na briga' para conquistar a cor do céu, já que ele é emitido com mais intensidade pelo Sol e seu espalhamento tem intensidade bem elevada, já que possui pequeno comprimento de onda também. Por fim chegamos ao fator final para enxergarmos o céu na cor azulada: o olho humano. O olho humano é composto por cones de luz, que são responsáveis por processar as cores que enxergamos. O olho humano possui três diferentes cones de luz. Cada um deles é mais sensível a um certo comprimento de onda, sendo as cores azul, verde e vermelho as cores contempladas por essa sensibilidade. Logo, o olho humano é mais sensível para a cor azul do que para a cor violeta e isso explica o motivo de enxergarmos o céu azulado durante o dia.

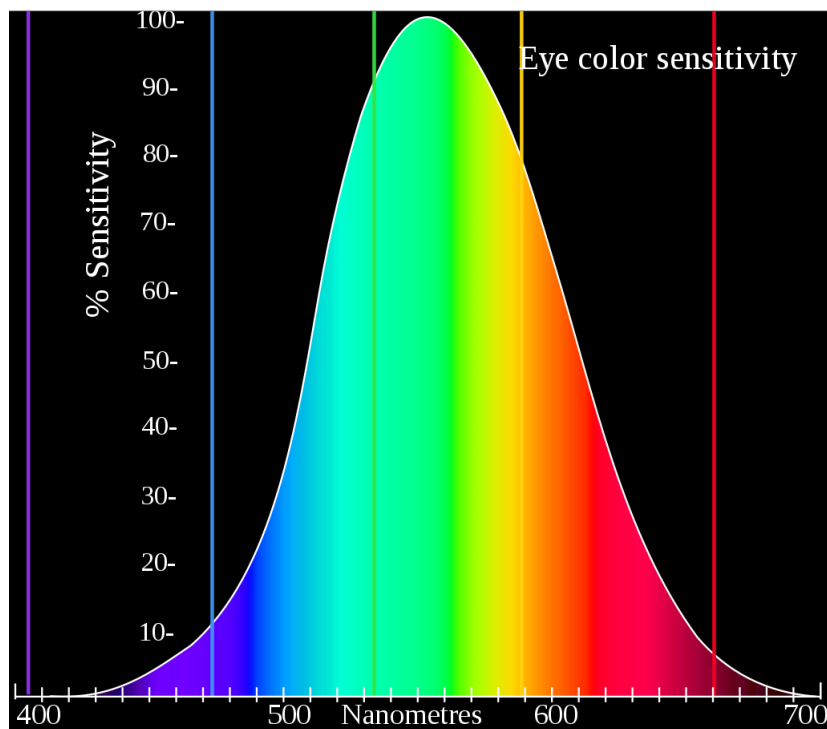


Figura B.81: Sensibilidade do olho humano a diferentes comprimentos de onda. - Retirado de https://en.wikipedia.org/wiki/Color_vision - Acessado em Julho de 2023.

B.4.5 E no amanhecer e anoitecer, por que o céu se apresenta alaranjado?

A resposta também é dada pelo espalhamento da luz. Só que nesse caso, a posição do local da Terra que está entardecendo é preponderante para essa explicação. No caso do entardecer, a luz solar percorre uma grande trajetória pela superfície terrestre até chegar a região da superfície onde se está amanhecendo ou anoitecendo. Por conta disso, as cores de menor comprimento de onda (azul e violeta) são mais espalhadas e vão perdendo intensidade. Já as cores vermelho e laranja são as que chegam com maior intensidade naquela região. A figura B.82 mostra essa situação de como na região de Sol a pino, um observador olha para o céu e tende a ver a cor do céu na cor azulada. Porém na região em que está amanhecendo ou anoitecendo, um observador ao olhar para o céu tende a ver a cor mais avermelhada, já que as cores mais espalhadas tendem a “ficar pelo caminho”.

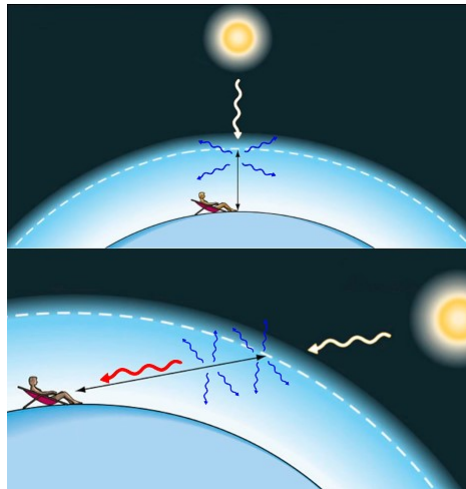


Figura B.82: Acima: observador vendo o céu azul - Abaixo: observador vendo o céu alaranjado.

B.4.6 Quando a descrição da óptica geométrica é boa?

Nesse material que foi dedicado a trazer algumas aplicações sobre a óptica ondulatória, foram demonstradas situações diversas em que não é possível uti-

lizar da óptica geométrica. Vimos que a luz se propaga como uma onda de natureza eletromagnética e que diversos fenômenos conseguem ser explicados satisfatoriamente apenas ao lidarmos com a sua natureza ondulatória, como é o caso da interferência, por exemplo. No entanto, todo o estudo de óptica geométrica não perde sua função. A propagação retilínea da luz para certas situações segue sendo verdadeira. Por conta disso, é possível limitar até que ponto a óptica geométrica é satisfatória? Esse é objetivo deste último tópico. Para uma interação em que os obstáculos possuam ordem de grandeza bem maior que o comprimento de onda, a óptica geométrica é satisfatória para a análise dos fenômenos. No entanto, quando os obstáculos passam a ter ordem de grandeza similar ao comprimento de onda, os fenômenos da difração e interferência começam a surgir e a apresentar um caráter ondulatório da luz. Para finalizar, quando se tem um obstáculo com dimensões muito inferiores em relação ao comprimento de onda, surge o espalhamento da luz, que também é um fenômeno de caráter ondulatório. A figura B.83 resume bem o que foi exposto nesse material.

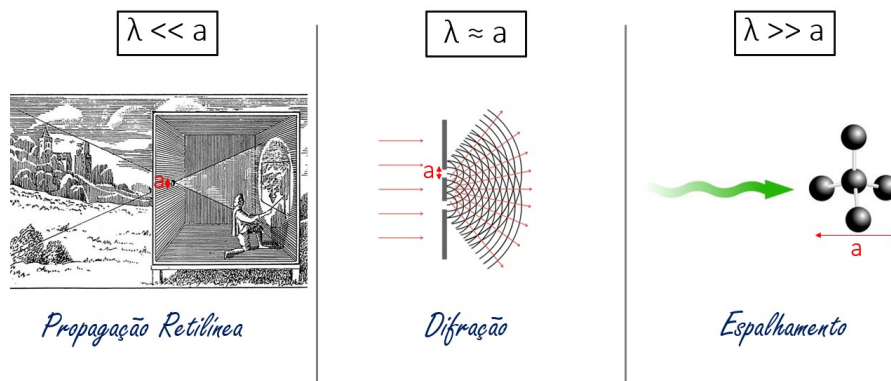


Figura B.83: Análise dimensional para o estudo óptico

Assim, embora a interação da luz com a matéria esteja toda encapsulada nas equações fundamentais do eletromagnetismo, a fenomenologia apresentada é dramaticamente diversa a depender das escalas de comprimento envolvidas. Para uma análise física é, portanto, muito conveniente separar a discussão nos diferentes casos, como fizemos ao longo das aulas deste produto.

Apêndice C

Apresentações para os alunos



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Instituto de Física

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física

Mestrado Profissional em Ensino de Física

Ensino de Óptica a Partir de Fenômenos Atmosféricos

Bruno Cezar Leandro Gimenez
Reinaldo Faria de Melo e Souza

Material instrucional associado à dissertação de mestrado de Bruno Cezar Leandro Gimenez, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Rio de Janeiro
Agosto de 2023

Neste apêndice, são colocados os *links* para os materiais produzidos visando à aplicação junto aos alunos. É bom ressaltar que os *slides* têm suas animações e transições garantidas quando abertas pelo *Microsoft Powerpoint 2021* ou versão superior. Utilizar aplicativos e programas similares podem não trazer de forma satisfatória as animações e transições elaboradas e ainda podem trazer problemas na formatação.

Links para as apresentações:

- 1 - Princípios de Propagação da Luz - Clique [aqui](#)
- 2 - Arco-Íris - Clique [aqui](#)
- 3 - Óptica Ondulatória - Clique [aqui](#)

Apêndice D

Links para as aulas gravadas



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Instituto de Física

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física

Mestrado Profissional em Ensino de Física

Ensino de Óptica a Partir de Fenômenos Atmosféricos

Bruno Cezar Leandro Gimenez
Reinaldo Faria de Melo e Souza

Material instrucional associado à dissertação de mestrado de Bruno Cezar Leandro Gimenez, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Rio de Janeiro
Agosto de 2023

Segue nesse apêndice as aulas gravadas para a aplicação deste material instrucional.

Aula 1 - Princípios de Propagação da Luz - Clique [aqui](https://youtu.be/ltZQnwLxo2s) (https://youtu.be/ltZQnwLxo2s)

Aula 2 - Arco-íris - Clique [aqui](https://youtu.be/6-N9_tGfL8)(https://youtu.be/6-N9_tGfL8)

Aula 3 - Óptica Ondulatória - Clique [aqui](https://youtu.be/9ZPXHzn5FTY)(https://youtu.be/9ZPXHzn5FTY)

Referências Bibliográficas

- [1] RAMALHO, F.; NICOLAU, G. F.; TOLEDO, P. A. Fundamentos da Física. Vol.2 9. ed. São Paulo: Moderna, 2014.
- [2] HEWITT, P. G. Física Conceitual. Porto Alegre: Bookman, 2001.
- [3] VILLAS BÔAS, N.; DOCA, R. H.; BISCUOLA, G. J. Tópicos de Física - Volume 2. 19. ed. São Paulo: Saraiva, 2012.
- [4] ALVARENGA, B. A.; MÁXIMO, A. Física - Ensino Médio. Vol. 2 São Paulo: Scipione, 2012.
- [5] M.P. Martinho e V. Soares, Rev. Bras. Ensino Fís. **39** e3603 (2017).
- [6] O. Darrigol, A history of optics from Greek antiquity to the nineteenth century, Oxford Univesity Press (2012).
- [7] R.A. Pimentel Jr., Uma história da interferometria no século XIX. Tese de doutorado, UFRJ (2012).
- [8] Walter da Silva Santos, Refração, as velocidades da luz e metamateriais. Dissertação de mestrado em ensino de física, UFRJ (2010).
- [9] MOYSÉS NUSSENZVEIG, H. Curso de Física Básica. Vol. 4: Ótica, Relatividade e Física Quântica. 2. ed. São Paulo: Blücher, 2014.
- [10] M. Se-yuen, Phys. Educ. **21** 365 (1986).
- [11] V.G. Veselago, Phys.-Usp. **45** 1097 (2002).
- [12] Laurence Viennot, Eur. J. Phys. **42** 055705 (2021).
- [13] Kenneth W. Ford, The Physics Teacher **58** 152 (2020).
- [14] Camila Manni Dias do Amaral, A Física na Escola, **21** 210201 (2023)

- [15] C.E. Aguiar, Óptica e geometria dinâmica, Revista Brasileira de Ensino de Física, Rev. Bras. Ensino Fís. **31**, 3302. (2009)
- [16] Os sites a seguir foram todos consultados no dia 7/7/2023. <https://www.quora.com/Does-total-internal-reflection-take-place-in-a-rainbow-or-not>, <https://physics.stackexchange.com/questions/608426/how-can-internal-reflection-occur-in-a-rainbow-if-the-angle-is-less-than-th> e <https://www.tutorialspoint.com/rainbow>.
- [17] Jukka O. Mattila, The Physics Teacher **58** 372 (2020).
- [18] R. Descartes, 8th discourse of 'Les météores' (Leyde: Jan Maire) (1637).
- [19] Alexander Haußmann, Eur. J. Phys. **37** 063001 (2016).
- [20] Carlos E. Aguiar, Antonio C. F. Santos, Eric B. Lopes, and Walter S. Santos, Phys. Teach. **51**, 522 (2013).
- [21] Eric Barros Lopes, Refração e o Ensino de Óptica. Dissertação de mestrado profissional em ensino de física, UFRJ (2014).
- [22] Michael Großmann, Elmar Schmidt, and Alexander Haußmann, Applied Optics, **50** F134 (2011).
- [23] Applied Optics, M.Theusner **50** F129 (2011).
- [24] Harald E. Edens, Applied Optics, **54** B26 (2015).
- [25] Jearl D. Walker, Am.J.Phys. **44** 421 (1976).
- [26] Craig F. Bohren and Alistair B. Fraser, Am.J.Phys. **59** 325 (1991).
- [27] S. Sakkopoulos, Eur. J. Phys. **9** 123 (1988).
- [28] Walter Scheider, The Physics Teacher **24** 217 (1986).
- [29] Veritasium, The Original Double Slit Experiment. Youtube, 19 de fev. de 2013. Disponível em:<https://www.youtube.com/watch?v=Iuv6hY6zsd0>. Acesso em: 11/06/2023.
- [30] M. Romer and I Bernard Cohen, Isis **31** 327 (1940).
- [31] Márcio Velloso da Silveira, A Percepção da Cor – Abordagens Didáticas para o Ensino, Dissertação de Mestrado em Ensino de Física, UFRJ (2016).

- [32] E.C. Montenegro, Ondas Eletromagnéticas: Conceitos Básicos, (São Paulo: Blucher) (2023).
- [33] A. Sommerfeld, Optics, (New York: Academic Press) (1954)
- [34] Robert Hooke, Micrographia: or Some Physiological Descriptions of Minute Bodies Made by Magnifying Glasses. With Observations and Inquiries Thereupon. (The Royal Society, London) (1665).
- [35] Isaac Newton, Opticks: or, A Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and Colours of Light. (William Innys at the West-End of St. Paul's, London) (1730).
- [36] Ball, Philip, Scientific American. **306**, 74 (2012)
- [37] Brittany A. Bober *et al.*, J. Chem. Educ. **95**, 1004 (2018).
- [38] H.M. Nussenzveig, Scientific American. **236**, 116 (1977).
- [39] R.G. Greenler, Science **173**, 1231 (1971).
- [40] Lord Rayleigh, Philos.Mag. **41**, 447 (1871).
- [41] C.F. Bohren and A.B. Fraser, Phys. Teach. **23**, 267 (1985).
- [42] T.S. Kuhn, Black-Body Theory and the Quantum Discontinuity, 1894-1912. (Oxford University Press, 1978).
- [43] A. Sommerfeld, Thermodynamics and Statistical Mechanics (Academic Press, 1956).