UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física

A MATEMÁTICA DA REVERBERAÇÃO

(Material para professores e alunos)

Marcio Ferreira Lacerda
&
Carlos Eduardo Aguiar

Material instrucional associado à dissertação de mestrado de Marcio Ferreira Lacerda, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Rio de Janeiro
Janeiro de 2018

A Matemática da Reverberação

Vamos supor que uma pessoa se encontra no centro de um ambiente (sala, quarto, etc.) de comprimento L e emite um som. Este som vai em direção a uma das paredes, onde é refletido e parcialmente absorvido, como mostra a Figura 1.

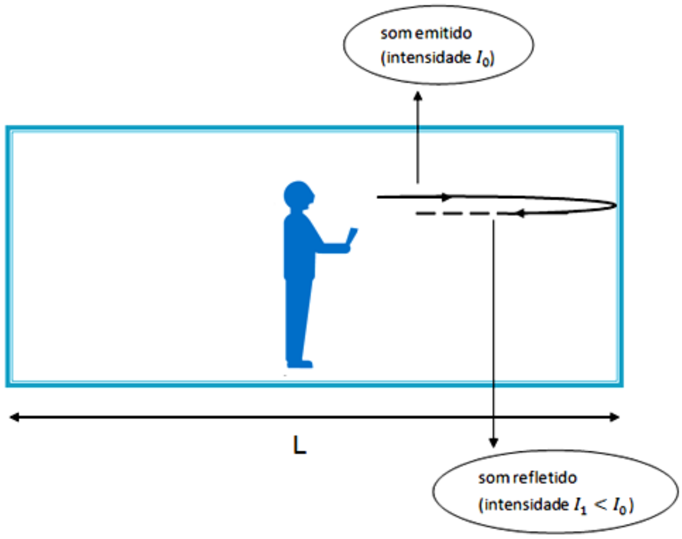

Figura 1: Primeira reflexão do som emitido.

Para simplificar nosso estudo, vamos desconsiderar as reflexões que ocorrem no chão, no teto e nas paredes laterais. O som emitido, com intensidade inicial igual a I_0, vai ser ouvido pela pessoa após a primeira reflexão. Entretanto, sua intensidade agora será I_1, menor que I_0, pois parte da energia sonora que incidiu sobre a parede foi absorvida por ela durante a reflexão.

Essa primeira reflexão é seguida por outra, na parede oposta, e daí em diante o som é sucessivamente refletido pelas paredes conforme ilustrado na Figura 2.

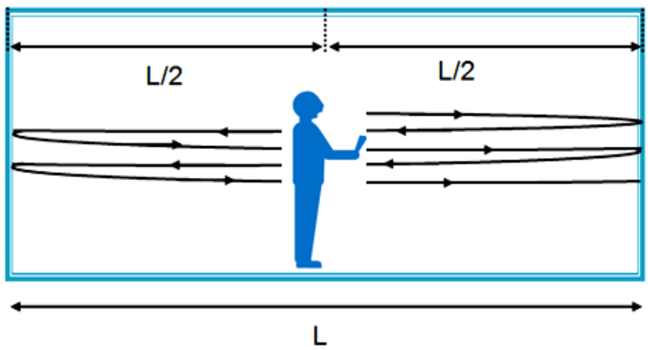

Figura 2. Reflexões sucessivas do som emitido.

A cada reflexão mostrada na Figura 2 o som é um pouco atenuado. Inicialmente, temos que a intensidade é I_0. Após a primeira reflexão, já vimos que a intensidade diminui devido à absorção. Podemos caracterizar essa absorção pelo “fator de atenuação” α, um número (maior que 1) que define como a intensidade diminui a cada reflexão. Com isso a intensidade após a primeira reflexão é

$$I_1 = \frac{I_0}{\alpha}.$$

Após a segunda reflexão, a mesma atenuação ocorrerá e a intensidade será

$$I_2 = \frac{I_1}{\alpha},$$

e substituindo

$$I_1 = I_0/\alpha$$

teremos

$$I_2 = \frac{I_0}{\alpha^2}.$$

Após a terceira reflexão,

$$I_3 = \frac{I_2}{\alpha},$$

e substituindo $I_2 = I_0/\alpha^2$ teremos

$$I_3 = \frac{I_0}{\alpha^3}.$$

Continuando esse raciocínio, após n reflexões a intensidade será

$$I_n = \frac{I_0}{\alpha^n}$$

ou,

$$I_n = I_0\, \alpha^{-n}\,. \qquad (1)$$

É possível relacionar a distância percorrida pelo som com o número n de reflexões da seguinte forma:

$$d = nL\,.$$

O tempo que o som leva para percorrer a distância d é

$$t = \frac{d}{c} = \frac{nL}{c}$$

onde c é a velocidade do som. O número de reflexões n pode ser escrito, então, como

$$n = \frac{c}{L}. \qquad (2)$$

Com isso, podemos obter a intensidade do som em função do tempo, $I(t)$, substituindo a equação (2) na fórmula (1) para I_n, obtendo

$$I(t) = I_0\, \alpha^{-\frac{c}{L}t}. \tag{3}$$

Vamos definir o Nível de Pressão Sonora (NPS), medido em decibéis (dB), como

$$NPS\,(dB) = 10\, log_{10}\left(\frac{I}{I_{ref}}\right).$$

Substituindo a equação (3) na fórmula acima encontramos

$$NPS\,(dB) = 10\, log_{10}\left(I_0.\alpha^{-\frac{c}{L}t}/I_{ref}\right)$$

ou seja,

$$NPS\,(dB) = 10\, log_{10}\left(\frac{I_0}{I_{ref}}\right) + 10\, log_{10}\, \alpha^{-\frac{c}{L}t}.$$

Usando as propriedades do logaritmo, temos

$$NPS\,(dB) = -\left(\frac{c}{L} 10\, log_{10}\alpha\right) t + N_0$$

onde N_0 é independente do tempo:

$$N_0 = 10\, log_{10}\left(\frac{I_0}{I_{ref}}\right).$$

Definindo uma constante b como

$$b = \frac{c}{L} 10\, log_{10}\alpha \tag{4}$$

teremos

$$NPS\,(dB) = -bt + N_0\,. \tag{5}$$

Note que a fórmula (5) é a equação de uma reta, cujo gráfico está representado na Figura 3 (onde tomamos $N_0 = 0$). Podemos ver que a queda do nível sonoro é proporcional ao tempo transcorrido desde a emissão do som.

O tempo de reverberação TR_{60} é definido como o intervalo de tempo necessário para que a intensidade sonora caia 60 dB, ou seja, de N_0 para $N_0 - 60$ dB, como mostrado na Figura 3. Usando a equação (4) obtemos

$$N_0 - 60dB = -b\, TR_{60} + N_0$$

e, portanto,

$$TR_{60} = \frac{60}{b}\,.$$

Substituindo na fórmula anterior a equação (4) obtemos

$$TR_{60} = \frac{60}{\frac{c}{L} 10 \log_{10} \alpha}$$

e, com isso,

$$TR_{60} = \frac{6L}{c \log_{10} \alpha}$$

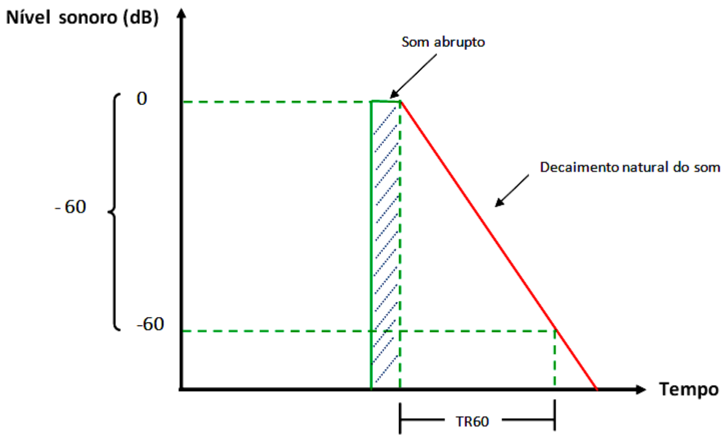

Figura 3: Diminuição do nível sonoro após a emissão de um som abrupto. O tempo de reverberação (TR_{60}) está indicado na figura.

No nosso modelo simplificado, o som é refletido apenas pelas paredes que se encontram à frente e atrás do ouvinte representado nas Figuras 1 e 2. Se a área total das paredes refletoras for S, a área de cada parede será $S/2$. Multiplicando por $S/2$ o numerador e o denominador da fórmula acima obtemos

$$TR_{60} = \frac{6L\frac{S}{2}}{c\frac{S}{2}\log_{10} \alpha} .$$

Mas o produto da área $S/2$ pelo comprimento L, será igual ao volume V do ambiente. Portanto

$$TR_{60} = \frac{12\,V}{c\,S \log_{10} \alpha}$$

Trocando a base do logaritmo na equação anterior, $\log_{10} \alpha = \log_{10} e \; \ln \alpha$, teremos

$$TR_{60} = \frac{12V}{c\,S\; \log_{10} e\; \ln \alpha}$$

e como $\log_{10} e = 0{,}43$ chegamos a

$$TR_{60} = \frac{12\,V}{c\,S\; 0{,}43 \ln \alpha}$$

Vamos considerar que a velocidade do som seja $c \approx 344\, m/s$, e vamos definir o coeficiente de absorção da superfície como $a = \ln \alpha$. Com isso obtemos

$$TR_{60} = \frac{0{,}08\, V}{aS}$$

onde o tempo é medido em segundos e os comprimentos em metros. Esta é uma aproximação para a *fórmula de Sabine*, um resultado empírico obtido no século XIX por Wallace Sabine:

$$TR_{60} = \frac{0{,}161\, V}{aS}\ .$$