



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
Instituto de Física  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física  
Mestrado Profissional em Ensino de Física

## **Material Instrucional**

### **A gravitação e a precessão de Mercúrio: um texto para professores do Ensino Médio**

Ricardo Fagundes Freitas da Cunha

Orientador: Alexandre Carlos Tort

## FICHA CATALOGRÁFICA

C972g Cunha, Ricardo Fagundes Freitas da  
A gravitação e a precessão de Mercúrio: um texto para professores do Ensino Médio / Ricardo Fagundes Freitas da Cunha.  
– Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2017.  
xi, 121 f. : il. ; 30 cm.  
Orientador: Alexandre Carlos Tort.  
Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Física / Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2017.  
Referências Bibliográficas: f. 119-121.  
1. Ensino de Física. 2. Problema de Kepler. 3. Precessão do Periélio. I. Tort, Alexandre Carlos. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física. III. A gravitação e a precessão de Mercúrio: um texto para professores do Ensino Médio.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Órbitas e precessão usando o <i>Modellus</i></b>	<b>1</b>
1.1	Introdução . . . . .	1
1.2	Usando o <i>Modellus</i> no problema de Kepler . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Um argumento de plausibilidade para a gravitação universal</b>	<b>18</b>
<b>3</b>	<b>Nibiru</b>	<b>24</b>

# Capítulo 1

## Órbitas e precessão usando o *Modellus*

### 1.1 Introdução

O *Modellus* é uma ferramenta que pode ser usada tanto pelo professor quanto pelo aluno, no processo de ensino-aprendizagem de Física. Muito simples de usar e não requer nenhum conhecimento prévio de programação.

No site do programa, <http://modellus.co/index.php?lang=pt>, é possível entender o seu propósito, que é estimular a aprendizagem, utilizando a matemática para criar ou explorar modelos de forma interativa. Para isso, basta que os usuários insiram equações matemáticas (e as suas condições iniciais). Ao clicar no play, o programa é capaz de realizar simulações, gráficos e tabelas. Veja o exemplo abaixo:

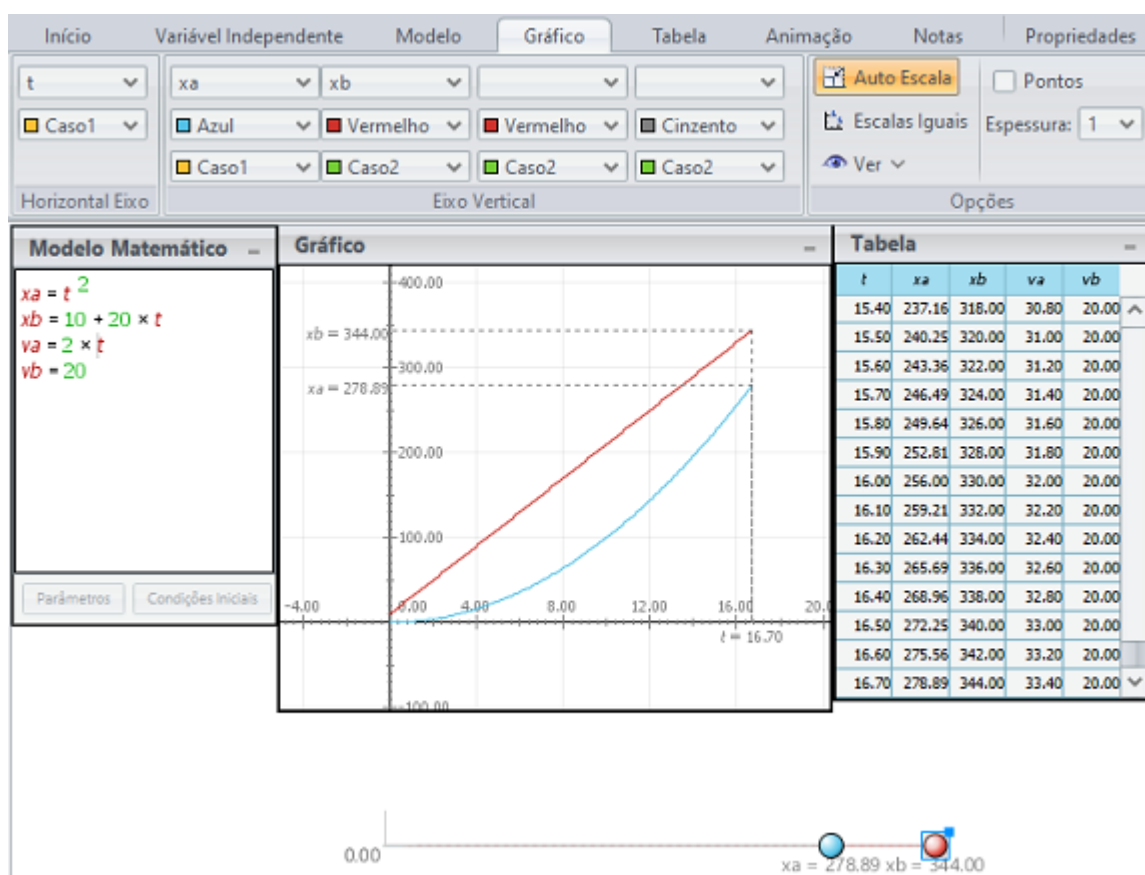


Figura 1.1: antes da encontro.

Nesse exemplo temos dois móveis, A e B, que estão na mesma reta horizontal e seus movimentos possuem o mesmo sentido. Suas equações de movimento estão escritas no canto superior esquerdo, no Modelo Matemático. Com o auxílio do programa, os alunos poderão visualizar os movimentos dos móveis, podendo explorar melhor a Física que o problema aborda: posição a cada instante de tempo de cada móvel, velocidade a cada instante de tempo, tempo de encontro e outras informações.

Tudo isso é possível ver com o auxílio da animação e da tabela. Além disso, construir gráficos no *Modellus* é extremamente simples, basta clicar no ícone gráficos e escolher a grandeza correspondente a cada eixo. O gráfico feito na simulação anterior corresponde a posição x tempo de cada móvel. é possível construir velo-

cidade x tempo também, por exemplo.

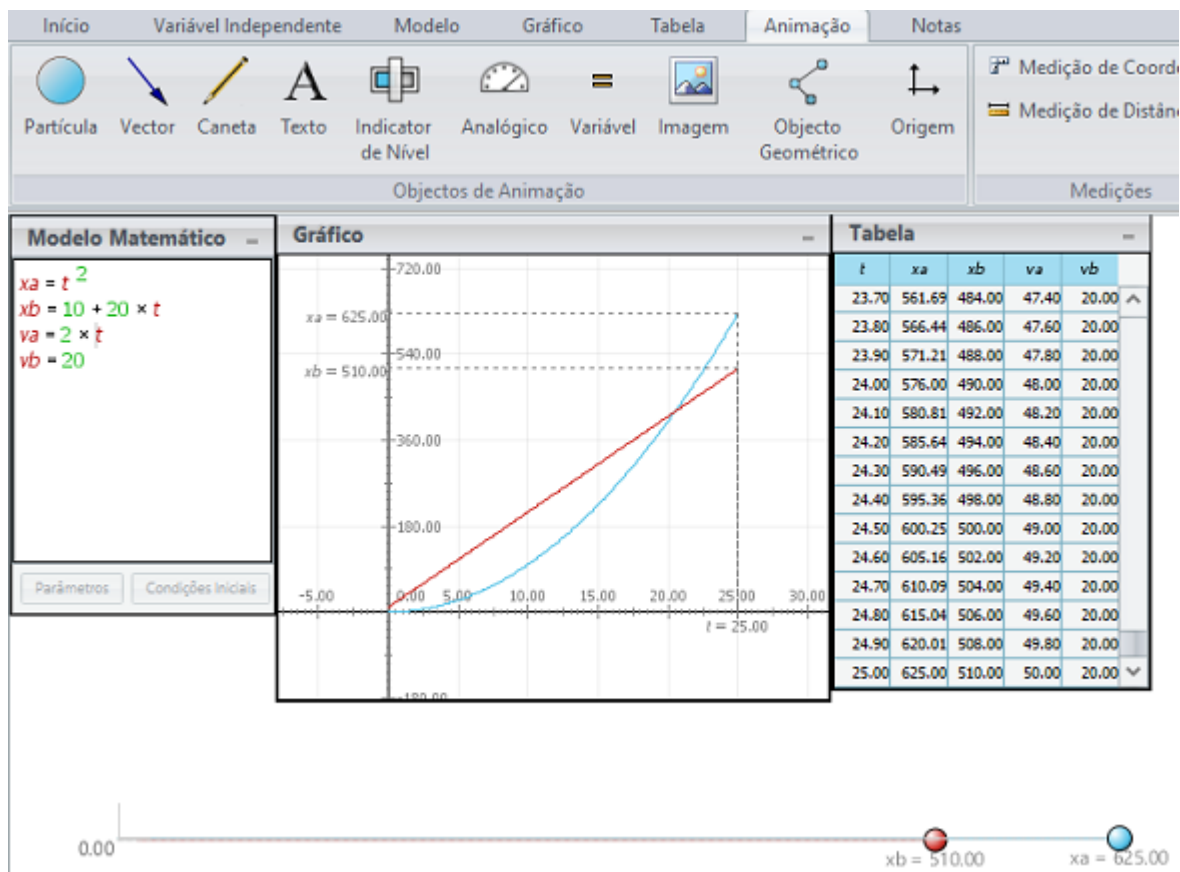


Figura 1.2: depois do encontro.

De modo geral, alunos de Ensino Médio, especialmente os da 1ª série, apresentam bastante dificuldade em interpretar e contruir gráficos. Um erro muito comum nesse tipo de exercício quando há um gráfico velocidade x tempo é achar que, o instante de tempo em que as retas se encontram é o instante de tempo de encontro dos móveis. Basta o aluno comparar os gráficos posição x tempo e velocidade x tempo que poderá ver que essa afirmativa é falsa.

Realizei essa prática em dezembro de 2015 com 36 alunos ( 21 de 25 da turma A e 23 de 25 da turma D ) da 1ª série do Instituto Federal Fluminense, *campus* Santo Antônio de Pádua. Distribuí aos alunos um papel com a seguinte tarefa: Dois móveis, A e B, estão na mesma horizontal, sendo que o B está 10 m na frente de

A. A velocidade inicial de A é nula e a sua aceleração é constante igual a  $2m/s^2$ , ambas em relação ao solo. Já o móvel B realiza um deslocamento constante de 72 Km a cada hora, em relação ao solo. Usando o *Modellus*:

1. Escreva o Modelo Matemático desse exercício, ou seja, escreva as equações de movimento dos dois móveis;
2. Vá ao ícone Tabela e peça para informar  $t, v_a, v_b$ ;
3. Vá ao ícone Gráfico e faça o gráfico velocidade x tempo dos móveis e diga se os móveis se encontram. Caso se encontrem, informe o instante que o encontro ocorre;
4. Vá ao ícone animação e crie duas partículas, correspondentes a A e a B. Faça a animação e veja novamente se as partículas se encontram, informando, caso sim, o instante que ocorre. A resposta foi igual ao item anterior ?
5. Vá ao ícone Gráfico e construa o gráfico posição x tempo dos móveis. Antes de clicar no play, vá também ao ícone Tabela e acrescente  $x_a$  e  $x_b$ . Os móveis se encontram? Caso sim, sua resposta coincidiu com os dois itens anteriores ?

Durante a tarefa, fui de mesa em mesa auxiliando os alunos quando surgiam algumas dificuldades, tanto na Física do problema quanto no uso do programa. Grande parte dos alunos (32 dos 36 alunos) achou, após a observação do gráfico velocidade x tempo, que quando as retas se encontram, os móveis também se encontravam. Usando a tabela, os estudantes falaram que os móveis se encontravam quando  $t = 10s$ . Quando olharam para a animação e para a nova tabela 1.3, perceberam que os móveis se encontram um pouco depois dos 20 s. Quando fizeram o último item, perceberam que o tempo de encontro era entre  $t = 20,40s$  e  $t = 20,50s$ .

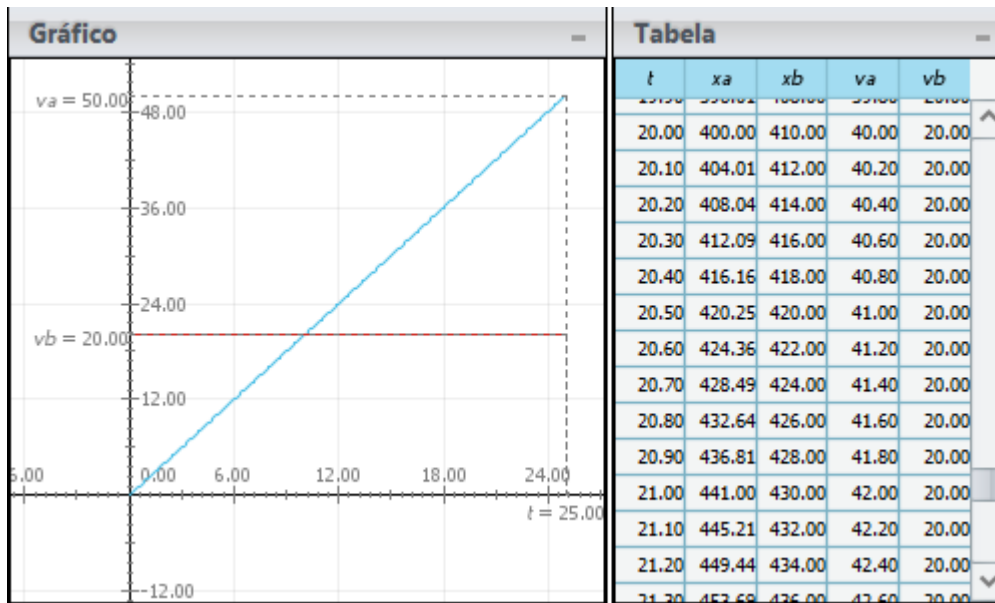


Figura 1.3: passo 0.1.

Perguntei aos alunos como fazer para melhorar a precisão do tempo de encontro. Um, mesmo que baixinho, disse: alterar a marcação do tempo. Ou seja, o *Modellus* estava programado para calcular, a cada intervalo de 0.1s, as posições e velocidades dos móveis, mas esse intervalo pode ser menor, para aumentar a precisão. Mudando para 0.01s de intervalo, por exemplo, descobrimos que o encontro acontece entre  $t = 20.48s$  e  $t = 20.49s$ , conforme a tabela 1.4 nos informa.



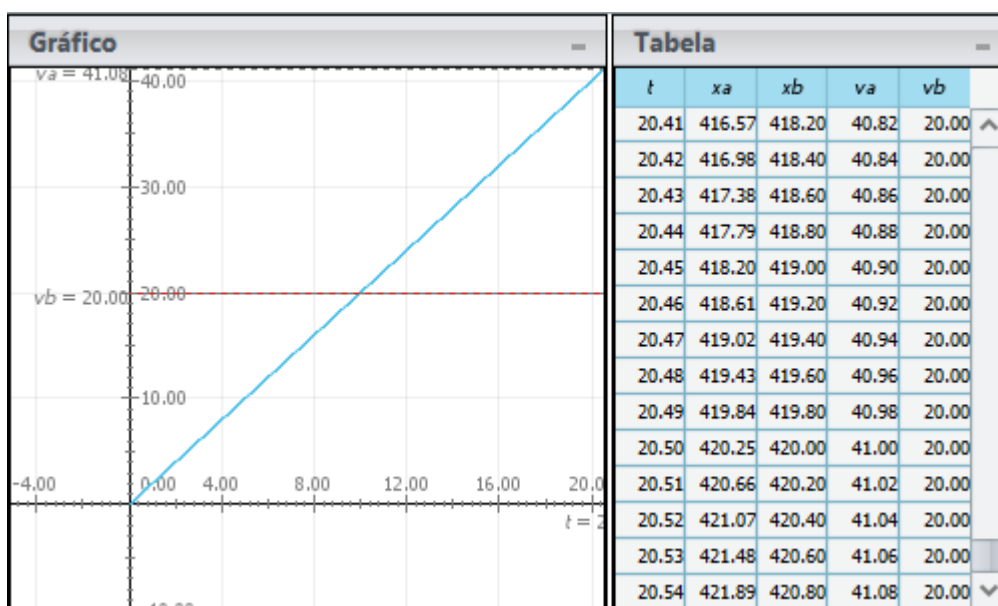


Figura 1.4: passo 0.01.

Após descobrirmos o tempo de encontro, perguntei aos alunos o que significa aquele tempo em que as retas do gráfico velocidade x tempo se encontram e o porquê é diferente do tempo no gráfico posição x tempo quando a parábola (A) encontra a reta (B). O objetivo dessa pergunta era saber se, de fato, os alunos entenderam a essência do problema e ajudá-los a interpretar gráficos.

Encerrada a discussão do problema fomos para a última etapa. Sem o uso do programa, como podemos descobrir o tempo de encontro? Como havíamos discutido bastante, quase todos os alunos responderam: igualando as equações. Sendo assim,  $t^2 = 10 + 20t$ . Com o uso de uma calculadora científica (de celular), obtivemos que  $t = 20.488088482s$ , ou seja,  $t \approx 20.49s$ , que é dentro do esperado.

Essa atividade durou 2h de aula e é apenas um dos inúmeros meios de se utilizar o *Modellus* como ferramenta didática.

## 1.2 Usando o *Modellus* no problema de Kepler

Nessa seção nos dedicaremos à aplicação do *Modellus* em uma aula de órbitas de planetas para alunos do Ensino Médio. Essa aula foi aplicada em três turmas da 1ª série do Ensino Médio do IFFluminense *campus* Santo Antônio de Pádua, em Outubro de 2016. O assunto trabalhado após recesso de Agosto (mês das Olimpíadas do Rio de Janeiro) foi dinâmica em trajetórias curvilíneas e, dando continuidade ao cronograma, iniciamos os estudos de Gravitação.

Cada aula teve duas horas de duração. Na 1ª aula de Gravitação foi feita uma breve abordagem histórica, que perpassa pela origem da palavra planeta, remetendo à relação que os gregos tinham com o céu até a Lei da Gravitação Universal, do sir. Isaac Newton.

Na 2ª aula levei os alunos para o micródomo da escola. Cada turma possui, em média, 25 alunos e o *campus* possui dois micródomos, cada um com um quadro branco e 25 computadores, um por aluno. Realizei todas as atividades dessa seção nas turmas B, C e D, no dia 11 de outubro de 2016.

Tabela 1.1: Aulas.

turma B	turma C	turma D
8:00 - 10:00 h	10:30 - 12:30 h	14:00 - 16:00 h

Os alunos já conheciam o *Modellus*. Os alunos são apresentados ao programa logo no 1º trimestre, no estudo de gráficos de M.U. e M.U.V., porém essa aula pode ser feita independente de os alunos conhecerem ou não o programa. Como é bem simples de usar, com um ou dois exemplos os alunos já conseguirão realizar as atividades propostas. Talvez não seja possível fazer tudo em uma aula, o que não é um problema. Caso a turma tenha mais alunos que computadores, não há prejuízo algum se fizerem as atividades em dupla.

A aula foi dividida nas seguintes etapas :

Etapa 1: A primeira parte da atividade consistiu em relembrar a Lei da Gravitação Universal:

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (1.1)$$

Etapa 2: Na segunda etapa desenhei o plano cartesiano com o Sol no centro, para facilitar, e um planeta em um ponto arbitrário (x,y):

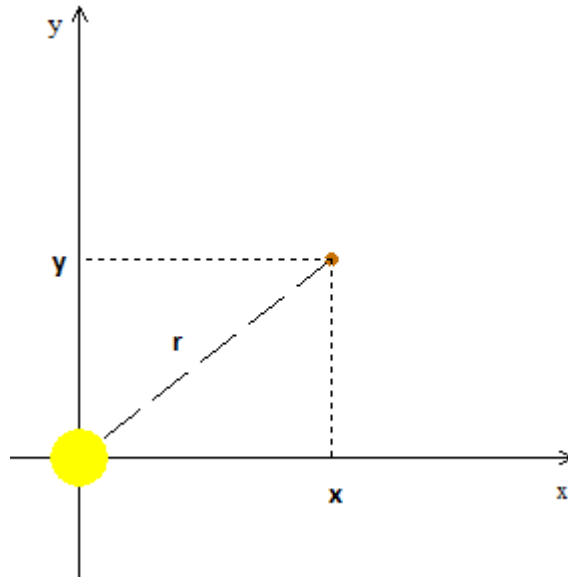


Figura 1.5: Planeta orbitando ao redor de um Sol fixo, centrado na origem.

Aqui vale a pena mostrar aos alunos a relação matemática entre x, y e r:

$$r^2 = x^2 + y^2. \quad (1.2)$$

Etapa 3: Próximo passo é decompor a força  $\mathbf{F}$ . Para isso, vale a pena aproveitar o desenho anterior para mostrar as decomposições e deixar os alunos tentarem chegar às expressões abaixo:

$$\mathbf{F}_x = -F \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \hat{\mathbf{x}} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_y = -F \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \hat{\mathbf{y}}, \quad (1.3)$$

onde  $F = |\mathbf{F}|$ .

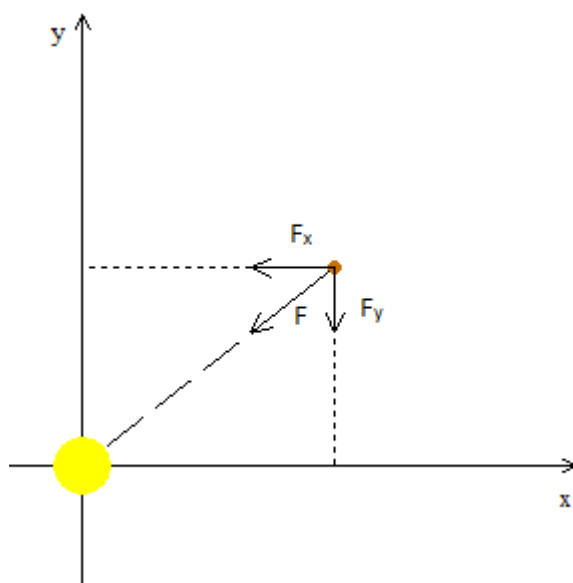


Figura 1.6: decomposição da força  $F$  em  $F_x$  e  $F_y$ .

Etapa 4: Substituindo (1.2) e (1.1) em (1.3), obteremos as equações das decomposições  $F_x$  e  $F_y$ :

$$\mathbf{F}_x = -GMm \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{x}} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_y = -GMm \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{y}}. \quad (1.4)$$

O sinal negativo não deve passar despercebido. Nas turmas que apliquei as atividades, nenhum aluno lembrou de colocar o sinal negativo. Usando a figura anterior, mostre que  $F_x$  aponta para o sentido negativo do eixo  $x$  e  $F_y$  aponta para o sentido negativo do eixo  $y$ . Como estamos trabalhando com força, que é uma grandeza vetorial, temos que analisar direção e sentido.

Nos exercícios que fizemos anteriormente, em outros assuntos, envolvendo velocidade, por exemplo, os alunos puderam perceber que, se não se atentarem ao uso corretos dos sinais, o programa vai calcular algo totalmente diferente que o desejado. Lembrando, mais uma vez, que os alunos já estão familiarizados com *Modellus*.

Etapa 5: Agora que já temos as expressões de cada força, vamos ao programa. Ao abri-lo aparecerá uma aba escrito modelo matemático. É nesse espaço que devemos colocar as equações que regem o nosso sistema, conforme mostra a figura 1.7.

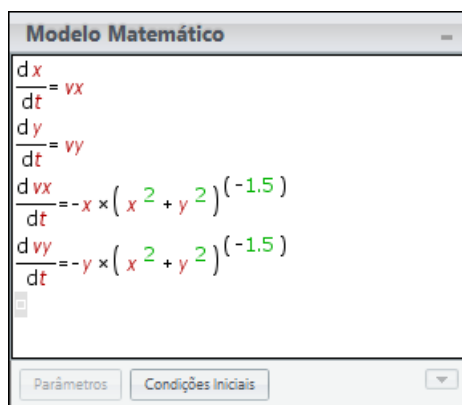


Figura 1.7: Modelo matemático. O objetivo dessa atividade é que aluno veja a órbita de um planeta sujeito apenas a atuação da força gravitacional exercida sobre ele pelo Sol. É uma atividade qualitativa, portanto, ao escrever as equações com os alunos, o professor pode fazer  $GM$  é numericamente igual a 1, explicando o motivo aos alunos. Até porque esse programa apresenta limitações e não roda os valores reais das constantes  $G$  e  $M$  nem tão pouco as distâncias astronômicas.

Aqui, caso seja a primeira vez que os alunos estejam usando o programa, vale a pena comentar que o termo matemático  $\frac{d}{dt}$  mede a variação de uma grandeza em função do tempo. Assim,  $\frac{dx}{dt}$  é a variação de  $x$  em relação ao tempo  $t$ , ou seja, é a medida da velocidade da componente horizontal. Assim, a aceleração nessa componente vale  $\frac{dv_x}{dt}$ . Com isso,  $F_x$  será escrito, no modelo, como  $m \frac{dv_x}{dt}$ . Então:

$$F_x = -GMm \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \rightarrow \frac{dv_x}{dt} = -x(x^2 + y^2)^{-1.5} ,$$

onde, por simplicidade, podemos considerar que  $GM$  numericamente igual a 1, uma vez que estamos trabalhando com os alunos uma análise qualitativa da 1ª lei de Kepler, buscando apenas observar como é

a órbita de um planeta ao redor do Sol (sem perturbações de quaisquer tipos), sem uma preocupação com medidas.

Após escrever as equações conforme mostra a figura (1.7), peça aos alunos para apertarem o item **interpretar**. Tanto o item interpretar quanto o  $\frac{dx}{dt}$ , correspondente à taxa de variação, encontram-se na aba superior do programa (ver figura 1.8):

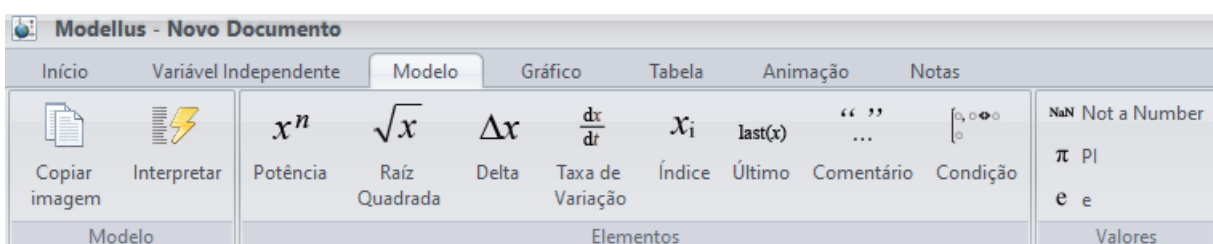


Figura 1.8: aba superior.

Etapa 6: Para finalizar essa primeira atividade, basta escolher as condições iniciais e apertar o play:



Figura 1.9: condições iniciais.

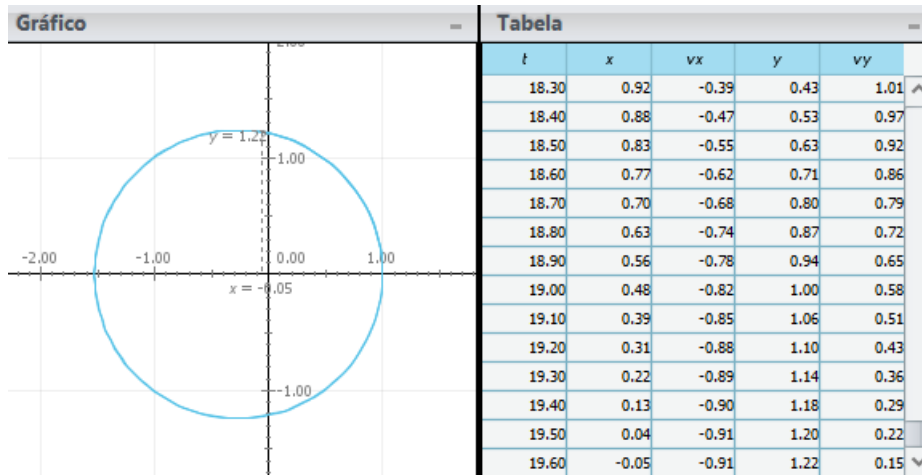


Figura 1.10: trajetória.

- **Dica 01:** Para os alunos visualizarem a trajetória acima eles devem ir à aba superior, clicar no item **Gráfico**, construir  $x$  e  $y$  e apertar no botão **Auto Escala**:

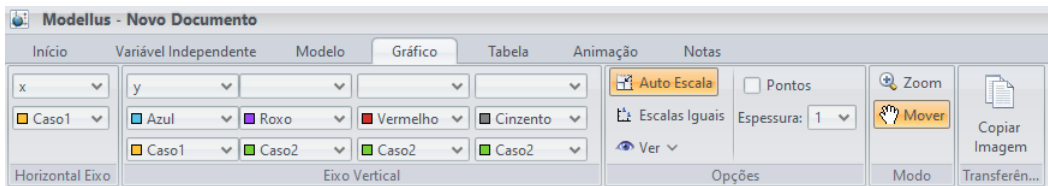


Figura 1.11: gráfico.

- **Dica 02:** Para os alunos visualizarem a tabela com os valores de  $x$ ,  $y$ ,  $v_x$  e  $v_y$ , por exemplo, devem clicar no item **Tabela** e escrever o que querem que a tabela apresente. Na figura abaixo estão as grandezas mencionadas:

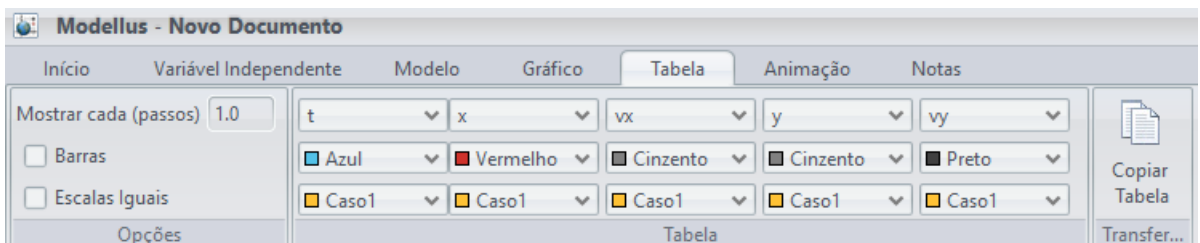


Figura 1.12: Criando tabela com *Modellus*.

Com essa atividade os alunos poderão ver que a trajetória de um planeta ao redor do Sol é elíptica quando consideramos que a força atuante é do tipo  $\mathbf{F} = -k/r^2 \hat{\mathbf{r}}$  (considerando que a sua velocidade orbital seja sempre inferior à velocidade de escape).

Etapa 7: Agora seguiremos para a segunda atividade da aula: a órbita de Mercúrio. Os planetas sofrem, além da força gravitacional, a ação de uma força perturbativa  $f(r)$ , também central:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = -3 \frac{GML^2}{mr^4 c^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (1.5)$$

sendo  $L$  a intensidade da componente do momento angular ortogonal ao plano da órbita, constante durante a trajetória e  $c$ , a velocidade da luz no vácuo. A priori, o professor pode apenas forçar esse termo adicional para a realização dessa atividade. Depois que os alunos observarem o que acontecerá com a trajetória, o professor poderá explicar a origem da perturbação e a sua importância <sup>1</sup>.

Sendo assim, a força que atua em Mercúrio pode ser representada como:

$$\mathbf{F} = - \left( \frac{GMm}{r^2} + 3 \frac{GML^2}{mr^4 c^2} \right) \hat{\mathbf{r}}, \quad (1.6)$$

ou ainda, fazendo  $k = GMm$  e  $\gamma = \frac{3GML^2}{mc^2}$ , onde  $k$  e  $\gamma$  são constantes, podemos reescrever a equação anterior de uma forma mais simples:

$$\mathbf{F} = - \left( \frac{k}{r^2} + \frac{\gamma}{r^4} \right) \hat{\mathbf{r}}. \quad (1.7)$$

Seguindo o mesmo raciocínio da atividade anterior, escreveremos então as componentes da força que atua em Mercúrio:

$$\mathbf{F}_x = \left( -k \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \gamma \frac{x}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \right) \hat{\mathbf{x}} \quad (1.8)$$

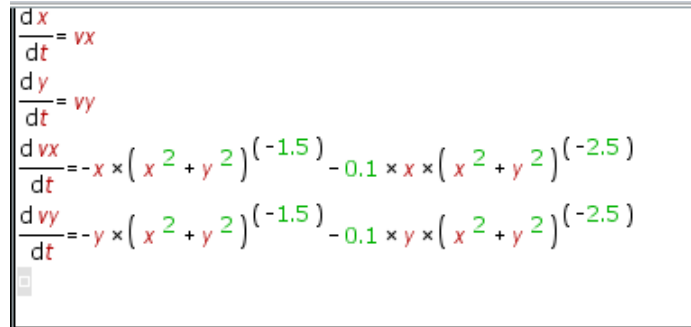
e

<sup>1</sup>No capítulo *Precessão* desse trabalho há um texto com essas informações. Caso o professor queira, também pode recorrer às referências [2, 4, 5], por exemplo.



$$\mathbf{F}_y = \left( -k \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \gamma \frac{y}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \right) \hat{\mathbf{y}} \quad (1.9)$$

No *Modellus*, as equações que representarão a trajetória de Mercúrio estão na figura 1.13:



```

dx/dt = vx
dy/dt = vy
d vx/dt = -x * (x^2 + y^2)^(-1.5) - 0.1 * x * (x^2 + y^2)^(-2.5)
d vy/dt = -y * (x^2 + y^2)^(-1.5) - 0.1 * y * (x^2 + y^2)^(-2.5)
    
```

Figura 1.13: Como estamos preocupados com a parte qualitativa – o aluno observar que a órbita não fecha – o professor pode explicar aos aluno que, ao colocar as equações no programa, a força perturbativa deve ter módulo bem menor que a gravitacional e, para garantir que isso aconteça, multiplicou o termo perturbativo por 0.1. O professor pode mostrar que, para cada valor que escolher multiplicar esse termo, a órbita será diferente e que, para valores muito pequenos, a órbita parece que é fechada.

Etapa 8: Uma vez escritas as equações no programa, basta apertar o botão interpretar, colocar as mesmas condições iniciais da primeira atividade (1.9) a mandar rodar.

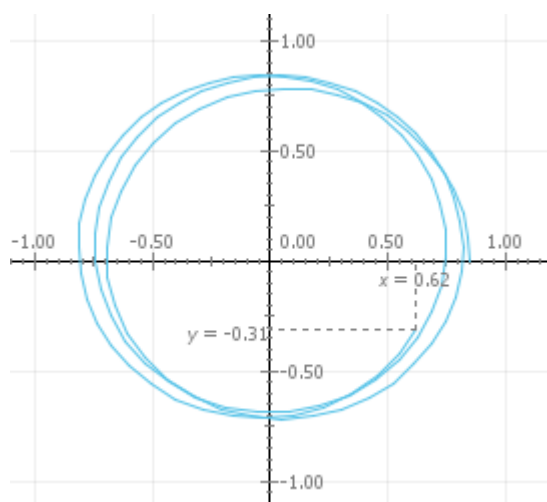


Figura 1.14: Órbita com precessão.

Etapa 9: Pede-se para os alunos interpretarem a trajetória calculada pelo programa. O objetivo é que percebam que continua sendo uma elipse, mas que não fecha. Então, após essa conclusão, o professor explica que essa perturbação causa uma precessão na órbita.

- **Para o professor e para o aluno** Precessão: Dizemos que uma órbita precessa quando o periélio muda de posição com o tempo. Assim, a órbita não fecha. Todos os planetas apresentam precessão, um mais, outros menos, pois não sofrem ação apenas da força gravitacional planeta - Sol. No caso do Mercúrio, por exemplo, ele sofre força dos outros planetas, do seu satélite e o fato de o Sol não ser perfeitamente esférico também influencia. A tabela 1.2 mostra detalhadamente os fatores que influenciam a precessão de Mercúrio:

Precessão (segundos de arco por século)	Origem
531,4	efeito gravitacional dos demais planetas
0,0254	o fato de o Sol ser oblato
43	relatividade geral

Tabela 1.2: Origens da precessão do periélio de Mercúrio.

Etapa 10: As principais atividades foram feitas. Essa última é apenas mais um exemplo de precessão, onde o professor pode sugerir mudar o parâmetro 0.1 para 0.01. Assim o efeito fica quase que imperceptível. O importante é manter o segundo termo muito menor que o primeiro. A trajetória, nesse caso, apresentará uma precessão menos acentuada, conforme mostra a figura 1.15:

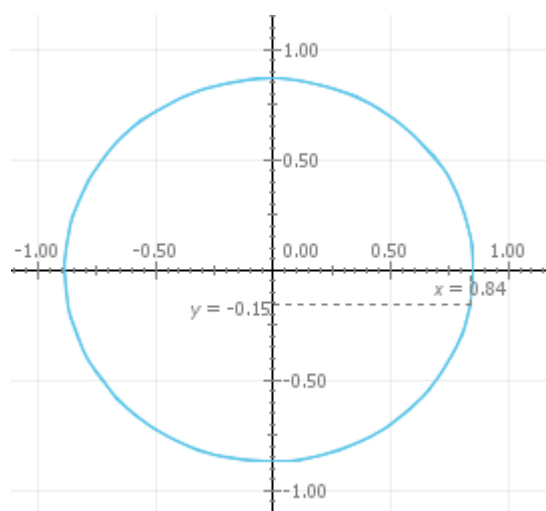


Figura 1.15: O fator multiplicativo 0.01 garante que a perturbação seja bem pequena, parecendo que a órbita é limitada e fechada. Após pedir para que os alunos façam esse exemplo, o professor pode comentar que, de fato, a precessão causada pelo efeito relativístico é bem pequena e, mesmo em Mercúrio, planeta que, pela proximidade com o Sol, sofre mais com esse efeito, a precessão é de aproximadamente 43 segundos de arco (vale a pena explicar a relação entre segundo de arco e grau para os alunos) a cada cem anos.

Usando a ferramenta **zoom** é possível ver com mais clareza que, após algumas voltas, o planeta não retorna ao ponto inicial, ou seja, que a órbita não fecha, como mostra a figura 1.16:

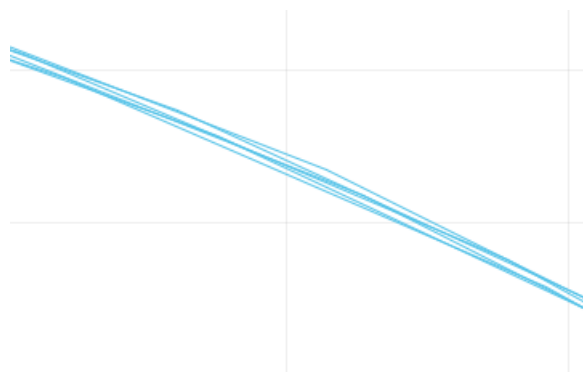


Figura 1.16: A figura representa uma ampliação de parte da trajetória da figura 1.15, mostrando uma pequena perturbação nessa órbita.

Assim, usando o *Modellus*, o professor poderá trabalhar a 1<sup>a</sup> lei de Kepler e o fenômeno da precessão com seus alunos de uma maneira não tradicional (uma aula menos expositiva), dando maior liberdade aos alunos, tornando-os menos passivos e mais participativos na sala de aula.

## Capítulo 2

# Um argumento de plausibilidade para a gravitação universal

Há duas maneiras bem testadas de introduzir a lei da gravitação universal aos alunos: i) começando com a lei de Newton da gravitação universal, descrevendo como ela foi descoberta e como ele funciona, e depois discutir algumas de suas implicações e, posteriormente, trabalhar as três leis de Kepler; ii) seguir a "ordem cronológica", começando com as leis de Kepler do movimento planetário como empíricas e prosseguir com a discussão da lei de Newton da gravitação universal.

Em ambas as abordagens, em algum momento após a introdução qualitativa, a expressão matemática da magnitude da lei da gravitação universal de Newton é apresentada e suas principais características são discutidas. Entretanto, independentemente da ordem escolhida pelo professor, ao introduzir esta lei fundamental da natureza aos alunos argumentando com exemplos de plausibilidade apropriados pode propiciar uma maior possibilidade de compreensão dos alunos sobre este importante tema da Física.

Argumentos de plausibilidade para a lei de gravitação universal podem ser encontrados em alguns livros didáticos de nível universitário como, por exemplo, em [2] e [27], mas no nível médio é mais difícil de encontrar.

No que se segue, analisamos alguns exemplos de plausibilidade que podem facilitar a introdução da lei de Newton da gravitação universal na sala de aula. Dessa forma, esse apêndice dedica-se à apresentação de um roteiro para o professor que queira apresentar argumentos de plausibilidade para a Lei da gravitação universal em sala de aula. Para facilitar, foram elaboradas etapas, sugestões de sequência de raciocínio a apresentar aos alunos. O texto escrito a seguir, nesse capítulo, deu origem ao trabalho [1].

**ETAPA 1:** Ao iniciar a aula o professor pode perguntar aos alunos como é o movimento da Lua em relação ao planeta Terra. Esse será o nosso ponto de partida. A Lua realiza um movimento aproximadamente circular (consideraremos circular) ao redor da Terra. Após essa conclusão, a próxima pergunta será: se a Lua está realizando uma trajetória circular, qual é o módulo da sua aceleração?

A expectativa é que os alunos relembrem que, em um movimento circular com módulo da velocidade constante, o módulo da aceleração (centrípeta)  $a$  é:

$$a = \frac{v^2}{r}. \quad (2.1)$$

Aplicando a equação acima ao problema Terra - Lua,  $v$  corresponde ao módulo da velocidade orbital da Lua e  $r$  a distância entre os astros (raio orbital), conforme mostra a figura a seguir:

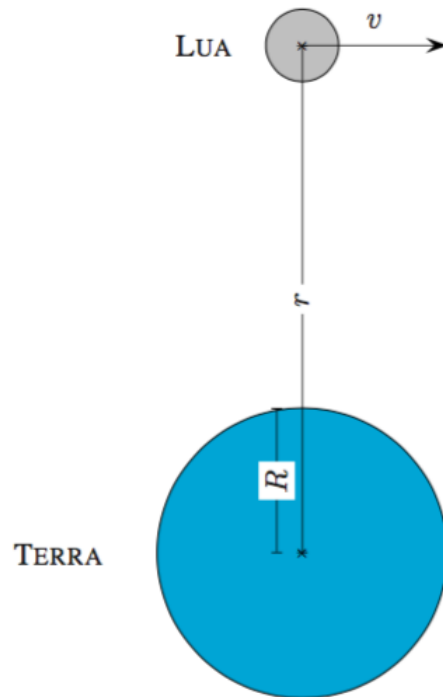


Figura 2.1: Sistema Terra - Lua.

Podemos ainda relacionar a velocidade  $v$  com o período orbital  $T$ :

$$v = \frac{2\pi}{T}r. \quad (2.2)$$

Substituindo na equação (2.1), temos o módulo da aceleração da Lua em função de  $T$  e  $r$ :

$$a = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r. \quad (2.3)$$

Para o nosso problema,  $r = 3,8 \cdot 10^8$  m e  $T = 2,4 \cdot 10^6$  s. Então;

$$a = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2.$$

**ETAPA 2:** Calculada a aceleração que a Lua está submetida, iremos relacioná-la com o valor da gravidade na superfície terrestre:

$$\frac{a}{g} = \frac{2,6 \cdot 10^{-3}}{9,8} = 2,7 \cdot 10^{-4}, \quad (2.4)$$

Por outro lado essa distância  $r$  é cerca de 60 vezes o raio  $R$  da Terra, como Newton já sabia. Assim:

$$\frac{R^2}{r^2} = \frac{R^2}{(60R)^2} = \frac{1}{3600} = 2,8 \cdot 10^{-4}. \quad (2.5)$$

Observando os valores encontrados nas duas relações, podemos inferir que:

$$\frac{a}{g} \approx \frac{R^2}{r^2}, \quad (2.6)$$

ou ainda:

$$a \approx g \frac{R^2}{r^2}. \quad (2.7)$$

Segue então da 2ª Lei de Newton que:

$$ma = mg \frac{R^2}{r^2}, \quad (2.8)$$

onde  $m$  é a massa da Lua. Concluímos que a força  $F$  à qual a Lua está submetida é dada por:

$$F = mg \frac{R^2}{r^2} \quad (2.9)$$



**ETAPA 3:** A partir daqui faremos duas hipóteses importantes:

- 1:  $F$  deve obedecer à 3ª Lei de Newton. Analisando a equação (2.9) sob a ótica desse ponto, podemos escrever que  $g$  deve ser proporcional a  $M$

$$g \propto M.$$

- 2: Terra comporta-se como um ponto massivo. Com isso o termo  $R^2$  que diz respeito à geometria de Terra não deve aparecer no resultado final. Combinando isto com a hipótese anterior, temos que:

$$g \propto \frac{M}{R^2} \quad \rightarrow \quad g = G \frac{M}{R^2}, \quad (2.10)$$

onde  $G$  é uma constante de proporcionalidade cuja dimensão é:

$$\frac{m}{s^2} = [G] \frac{kg}{m^2} \quad \rightarrow \quad [G] = \frac{m^3}{kg \cdot s^2}. \quad (2.11)$$

Portanto:

$$F = m \frac{g M R^2}{R^2 r^2} = \frac{GMm}{r^2}. \quad (2.12)$$

A atividade acima é um exemplo de como o professor pode trabalhar em sala de aula determinado tema dentro da gravitação. O professor pode fazer com que os alunos obtenham a Lei da gravitação por meio de um método heurístico simples, preparando um roteiro, de modo que as perguntas conduza-os para o objetivo.

Segue abaixo o roteiro exemplo:

- a) Calcule a aceleração da Lua em relação à Terra. O raio da órbita da Lua vale  $3,8 \cdot 10^8 \text{ m}$  e o período de translação da Lua ao redor da Terra vale  $27,3 \text{ dias}$ .
- b) Calcule a razão  $\frac{a}{g}$ , onde  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

c) Newton sabia que o raio da órbita da Lua em relação à Terra é aproximadamente 60 vezes o raio da Terra, i.e.:  $r = 60R$ . Mostre que:

$$\frac{a}{g} \approx \frac{R^2}{r^2}. \quad (2.13)$$

d) Mostre que a força que a Terra exerce sobre a Lua é dada, em módulo, por:

$$F = m g \frac{R^2}{r^2}, \quad (2.14)$$

onde  $m$  é a massa da Lua.

e) Mostre que:

- $F$  deve obedecer à terceira Lei de Newton (ação e reação);
- A Terra deve ser tratada como um ponto, o que leva a relação de proporcionalidade abaixo:

$$g \propto \frac{M}{R^2}, \quad (2.15)$$

onde  $M$  é a massa da Terra.

f) Após as conclusões até aqui, mostre que  $F \propto \frac{Mm}{r^2}$ .

Para transformar a proporcionalidade ( $\propto$ ) em igualdade (=) precisamos de uma constante que você pode indicar por  $G$ . Segue então que:

$$F = \frac{GMm}{r^2}. \quad (2.16)$$

Calcule também qual a dimensão de  $G$ .

# Capítulo 3

## Nibiru

O objetivo dessa atividade é mostrar como funciona a 3ª Lei de Kepler e escrevê-la sob a forma adimensional.

**EXERCÍCIO 1.** Enuncie a 3ª lei de Kepler.

### Resolução

A 3ª lei de Kepler nos mostra que a razão entre o quadrado do período orbital de uma planeta qualquer do Sistema Solar  $T^2$  e o cubo do semi-eixo maior de sua órbita  $a^3$  é constante, ou seja:

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{constante}, \quad (3.1)$$

sendo essa constante igual a  $\frac{4\pi^2}{GM_{\odot}}$  e válida para qualquer planeta do Sistema Solar. Podemos, ainda, escrever a 3ª lei sob a forma adimensional, uma vez que podemos igualar a razão  $\frac{T^2}{a^3}$  de um planeta qualquer do Sistema Solar com a da Terra:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_{\oplus}^2}{a_{\oplus}^3}, \quad (3.2)$$

ou ainda, reorganizando:

$$\frac{T^2}{\frac{T_{\oplus}^2}{a^3}} = 1. \quad (3.3)$$

Fazendo  $T^2/T_{\oplus}^2 = p^2$  e  $a^3/a_{\oplus}^3 = q^3$ , a equação anterior pode ser reescrita sob uma forma mais simples:

$$\frac{p^2}{q^3} = 1. \quad (3.4)$$

Essa razão, como veremos na tabela (3.2), é válida para todos os planetas do Sistema Solar.

**EXERCÍCIO 2.** *A energia mecânica do sistema Sol-planeta* Mostre que para uma órbita circular de raio  $R$ , a energia mecânica do sistema *Sol – planeta* é dada por

$$E = -\frac{GM_{\odot}m}{2R}. \quad (3.5)$$

**Resolução:**

Primeiramente começaremos com a equação da energia mecânica:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_{\odot}m}{R}. \quad (3.6)$$

Para órbitas circulares, teremos que a força gravitacional é justamente a resultante centrípeta do movimento. Logo:

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{GM_{\odot}m}{R^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM_{\odot}}{R}, \quad (3.7)$$

onde  $v$  é o módulo da velocidade orbital do planeta nessas condições. Substituindo a equação (3.7) na (3.6) concluiremos que a energia mecânica do sistema Sol - planeta vale:

$$E = \frac{1}{2}m\frac{GM_{\odot}}{R} - \frac{GM_{\odot}m}{R} = -\frac{GM_{\odot}m}{2R}. \quad (3.8)$$

Um cálculo da energia total que leva em conta o fato da órbita de um planeta em torno do Sol ser na verdade uma elipse nos mostra que o raio da órbita circular deve ser substituído pelo semi-eixo maior  $a$ , resultando em (??).

**EXERCÍCIO 3.** A Tabela 3.1 mostra os valores para os semi-eixos maiores e períodos em anos terrestres dos oito planetas do Sistema Solar. A última linha diz respeito a um planeta hipotético que discutiremos no próximo exercício. **Complete a última coluna da tabela.**

Planeta	$a/a_{\oplus}$	$T/T_{\oplus}$	$p^2/q^3$
Mercúrio	0,387	0,241	?
Vênus	0,723	0,615	?
Terra	1,000	1,000	?
Marte	1,524	1,881	?
Júpiter	5,204	11,862	?
Saturno	9,582	29,457	?
Urano	19,201	84,011	?
Netuno	30,047	164,79	?
Nibiru	?	?	?

Tabela 3.1: A terceira lei de Kepler e o Sistema Solar ([8]).

**Resolução:**

Para resolvermos esse exercício basta realizarmos a operação  $p^2/q^3$  para cada planeta. É de se esperar, conforme vimos no 1º exercício, que essa razão seja igual a 1 (ou bem próxima de 1) para qualquer planeta do Sistema Solar. Vejamos:

Planeta	$a/a_{\oplus}$	$T/T_{\oplus}$	$p^2/q^3$
Mercúrio	0,387	0,241	1,002
Vênus	0,723	0,615	1,000
Terra	1,000	1,000	1,000
Marte	1,524	1,881	0,999
Júpiter	5,204	11,862	0,998
Saturno	9,582	29,457	0,986
Urano	19,201	84,011	0,997
Netuno	30,047	164,79	1,001
Nibiru	?	?	?

Tabela 3.2: Razão  $p^2/q^3$  dos planetas.

**EXERCÍCIO 4.** Use os dados da Tabela 3.2 e faça um gráfico em escala log-log no qual no eixo horizontal são representados os valores de  $p^2$  e no eixo vertical os valores  $q^3$ . Identifique cada ponto do gráfico com o planeta correspondente.

**Resolução:**

Para identificarmos cada planeta, vamos acrescentar à tabela os valores de  $\log q^3$  e  $\log p^2$  correspondentes:

Planeta	$a/a_{\oplus}$	$T/T_{\oplus}$	$p^2/q^3$	$\log q^3$	$\log p^2$
Mercúrio	0,387	0,241	1,002	-1,237	-1,236
Vênus	0,723	0,615	1,000	-0,423	-0,422
Terra	1,000	1,000	1,000	0	0
Marte	1,524	1,881	0,999	0,549	0,549
Júpiter	5,204	11,862	0,998	2,149	2,148
Saturno	9,582	29,457	0,986	2,944	2,938
Urano	19,201	84,011	0,997	3,849	3,849
Netuno	30,047	164,79	1,001	4,433	4,434
Nibiru	?	?	?		

Tabela 3.3:  $\log p^2$  e  $\log q^3$  dos planetas.

A partir dos valores acima, podemos plotar o gráfico  $\log q^3$  e  $\log p^2$ :

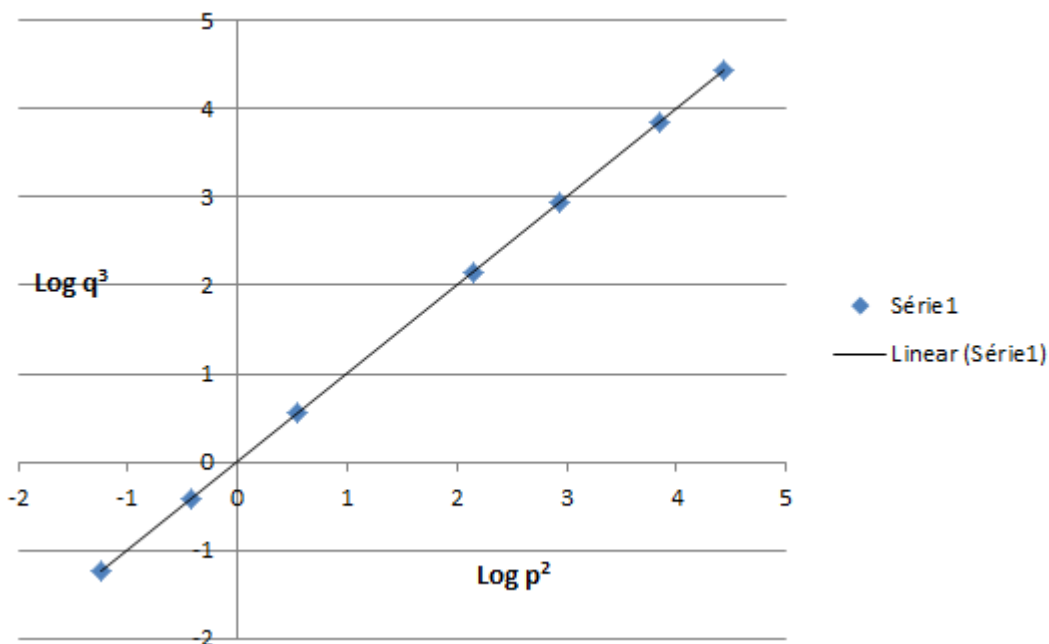


Figura 3.1: Gráfico  $\log q^3$  x  $\log p^2$ .

Outro gráfico interessante para que os alunos construam é o

$\log q \times \log p$ . A partir desse gráfico, os alunos podem extrair a 3ª lei de Kepler. Veja o resultado na figura abaixo 3.2:

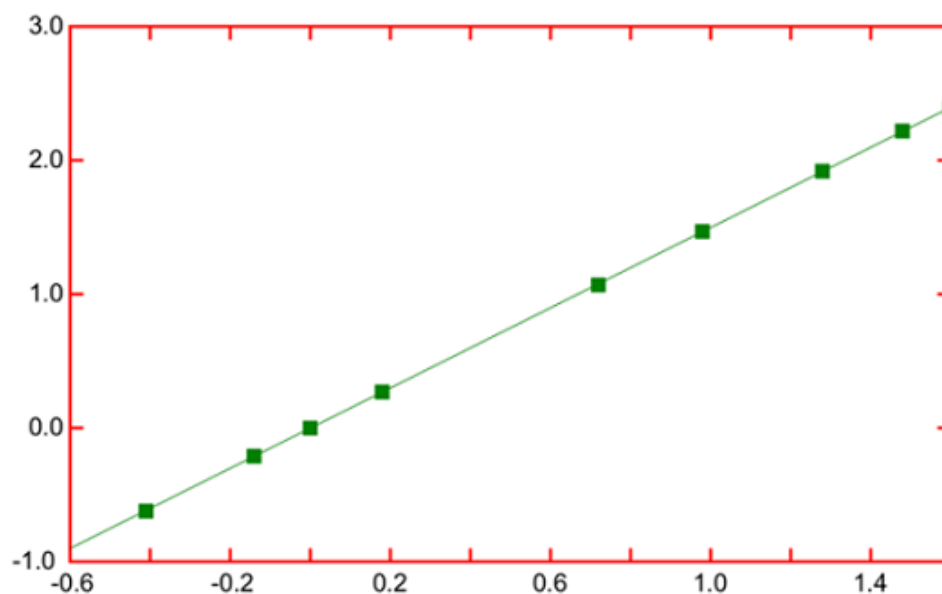


Figura 3.2: Gráfico  $\log q \times \log p$  é uma reta cuja tangente vale  $\frac{3}{2}$ , comprovando a 3ª lei de Kepler  $\frac{q^3}{p^2} = \text{constante}$ .

**EXERCÍCIO 5.** *Nibiru ou o Planeta X* De acordo com uma tradução e interpretação peculiares do escritor e estudioso amador, *Zecharia Sitchin* (1920–2010), os sumérios reconheciam a existência de 12 planetas, os atuais oito planetas do Sistema Solar mais Plutão, o Sol, a Lua e um décimo segundo planeta chamado *Nibiru*. De acordo com Sitchin, o período orbital de Nibiru seria de 3 600 anos terrestres e sua massa igual a 10 vezes a massa da Terra. Ainda de acordo com Sitchin, a órbita elíptica de Nibiru seria muito alongada, isto é, sua excentricidade seria próxima da unidade. Os estudiosos profissionais da cultura sumeriana e da escrita cuneiforme descartam como errôneas as traduções e as interpretações de Sitchin, e os astrônomos descartam a existência de Nibiru. Suponhamos, porém, que Nibiru seja um planeta



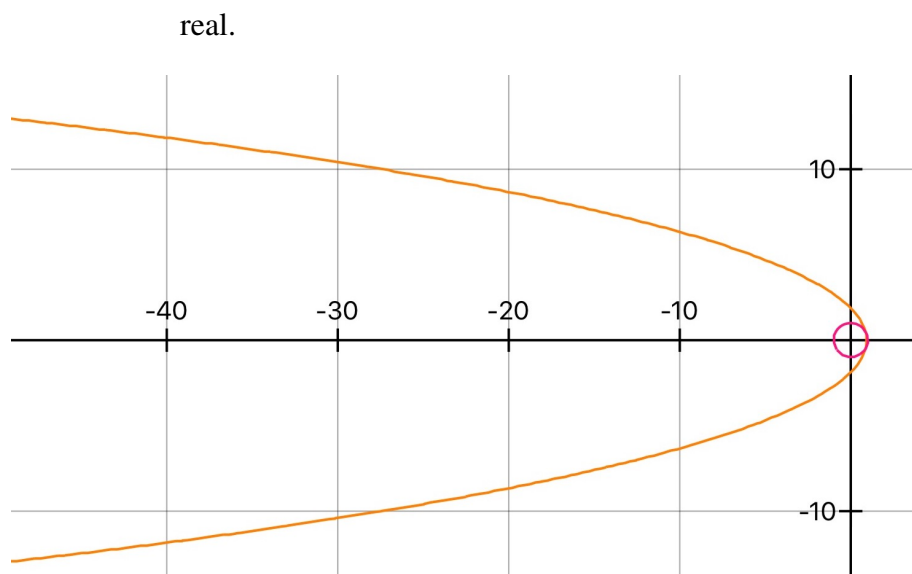


Figura 3.3: A órbita excêntrica de Nibiru e órbita quase circular da Terra.

- (a) Calcule o semi-eixo maior da órbita de Nibiru.

**Resolução:**

Conforme vimos anteriormente, no 1º exercício, todos os planetas do Sistema Solar obedecem a relação (3.2), então:

$$\frac{a^3}{3600^2} = a_{\oplus}^3 \quad \Rightarrow \quad a = 3600^{(2/3)} a_{\oplus} \approx 234,892 a_{\oplus}. \quad (3.9)$$

- (b) Observando a figura 5, podemos ver que a menor distância entre Nibiru e o Sol é da ordem de um semi-eixo terrestre. Calcule a excentricidade da órbita de Nibiru e compare-a com a excentricidade das órbitas da Terra e de Marte.

**Resolução:**

A resolução desse exercício permissa pelo cálculo geométrico da excentricidade  $\epsilon$  de uma elipse, conforme mostra a equação abaixo:

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{a_{\oplus}}{3600 a_{\oplus}^{4/3}}} \Rightarrow \epsilon = 0,999. \quad (3.10)$$

Perceba, fazendo uso da figura (5), que o semi - eixo menor na órbita de Nibiru  $b$  é da ordem de semi - eixo maior da órbita da Terra  $a_{\oplus}$ . Assim, podemos considerar, por simplicidade, que  $b = a_{\oplus}$ .

Em uma elipse,  $0 < \epsilon < 1$ . Para  $\epsilon = 1$ , a trajetória é uma parábola. Assim, podemos dizer que sua órbita é quase parabólica.

(c) Complete a última linha da Tabela 1.

**Resolução:**

Planeta	$a/a_{\oplus}$	$T/T_{\oplus}$	$p^2/q^3$
Mercúrio	0,387	0,241	1,002
Vênus	0,723	0,615	1,000
Terra	1,000	1,000	1,000
Marte	1,524	1,881	0,999
Júpiter	5,204	11,862	0,998
Saturno	9,582	29,457	0,986
Urano	19,201	84,011	0,997
Netuno	30,047	164,79	1,001
Nibiru	234,892	3600	1,000

Tabela 3.4: Nibiru.

- (d) Mostre que a magnitude da velocidade de Nibiru em qualquer ponto da órbita é dada por

$$v = \sqrt{2GM_{\odot} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)}, \quad (3.11)$$

onde  $v = \|\mathbf{v}\|$  e  $r$  é a distância radial entre o Sol e o planeta.

**Resolução:**

A energia cinética  $K$  é dada pela diferença entre as energias mecânica  $E$  e potencial  $U$ :

$$K = E - U. \quad (3.12)$$

Fazendo uso da equação (??) e sabendo-se que:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{e} \quad U = -\frac{GM_{\odot}m}{r}, \quad (3.13)$$

podemos reescrever a energia cinética como:

$$\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GM_{\odot}m}{2a} - \left(-\frac{GM_{\odot}m}{r}\right), \quad (3.14)$$

então:

$$v = \sqrt{2GM_{\odot} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)}. \quad (3.15)$$

- (e) Calcule  $v$  para a menor distância entre Nibiru e o Sol (o periastro).

**Resolução:**

Usando a relação do exercício anterior e substituindo  $r$  por  $a_{\oplus}$ , a menor distância entre Nibiru e o Sol, teremos que:

$$v = \sqrt{2GM_{\odot} \left(\frac{1}{a_{\oplus}} - \frac{1}{2a}\right)}, \quad (3.16)$$

onde, conforme calculamos anteriormente, o semi-eixo maior da órbita de Nibiru ao redor do Sol é  $a = 3600^{2/3} a_{\oplus}$ . Assim:

$$v = \sqrt{2GM_{\odot} \left(\frac{1}{a_{\oplus}} - \frac{1}{2 \cdot 3600^{2/3} a_{\oplus}}\right)} = \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{a_{\oplus}} \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 3600^{2/3}}\right)}, \quad (3.17)$$

ou ainda:

$$v = 0,999 \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{a_{\oplus}}}. \quad (3.18)$$

Sendo  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{Kg^2}$ ,  $M = 1,989 \cdot 10^{30} Kg$  e  $a_{\oplus} = 1,521 \cdot 10^9 m$ , a velocidade de Nibiru no ponto quisto é:

$$v \approx 417 Km/s. \quad (3.19)$$

Como trata-se do ponto mais próximo do Sol, essa é velocidade orbital máxima de Nibiru.



Figura 3.4: Os sumérios, como quase todos os povos da antiguidade, reconheciam 7 planetas: Utu (o Sol), Nanna (a Lua), Enki (Mercúrio), Inanna (Vênus), Gugalanna (Marte), Enlil (Júpiter) e Ninurta (Saturno). Zecharia Sitchin afirma que a tableta representa os oito planetas do Sistema Solar mais Plutão, Sol e Lua. O 12º planeta, mostrado no detalhe, é Nibiru. Na verdade, de acordo com os estudiosos, o que está sendo representado é um grupo de estrelas. A estrela central não representa o Sol.

## Referências Bibliográficas

- [1] CUNHA, Ricardo F. F.; TORT, A. C . Plausibility arguments and universal gravitation. *Physics Education*, v. 52, n. 3, p. 035001 (6 pp), 2017.
- [2] NUSSENZVEIG, H. Moysés, *Curso de Física Básica*, vol.1, 4ª edição rev., São Paulo: Edgard Blücher, 2002;
- [3] <http://www.ghtc.usp.br/Biografias/Newton/Newtonopticks.htm>;
- [4] MORIN, D. *Introduction to Classical Mechanics*. CUP, Cambridge, 2007.
- [5] MARION, J. B.; THORNTON, S. T. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. 5th edition. Belmont: Brooks/Cole, 2004.
- [6] UZÊDA, Diego Dias. *Tópicos em Física Clássica*. Rio de Janeiro: UFRJ, 2011. 181p. Dissertação (mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.
- [7] [astro.if.ufrgrs.br/ssolar.htm](http://astro.if.ufrgrs.br/ssolar.htm).
- [8] KITTEL, C.; KNIGHT, W. D.; RUDERMAN, M. A. *Berkeley Physics Course, vol. 1 Mechanics*, 2nd edition. McGraw-Hill, NY, 1965.
- [9] [http://www.math.toronto.edu/~colliand/426\\_03/Papers03/CPollock.pdf](http://www.math.toronto.edu/~colliand/426_03/Papers03/CPollock.pdf).
- [10] RICE, Michael P.; RUSH, William F. Nonrelativistic contribution to Mercury's perihelion precession. *Am. J. Phys.*, v. 47, n. 6, p. 531 - 534 (1979).

- 
- [11] SANTOS, Farina C.; SOARES, V.; TORT, A. C. Uma tradução da demonstração original do teorema de Bertrand. IF/UFRJ (2010).
- [12] FARINA, Carlos; TORT, A. C. A Simple Way of Evaluating the Speed of Precession of Orbits. *Am. J. Phys.*, v. 56, n. 8, p.761 - 763 (1988).
- [13] D'ELISEO, Maurizio M. The First-order orbital equation. *Am. J. Phys.*, v. 75, n. 4, 352 - 355, 2007.
- [14] GOLDSTEIN, H., *Classical Mechanics*, 2nd edition. Addison-wesley (1980).
- [15] BAUM, R.; SHEEHAN, E. *In Search of Planet Vulcan: The Ghost in Newton's Clockwork Universe*. Plenum, NY (1997).
- [16] RYDIN, Roger A. *The Theory of Mercury's Anomalous Precession*. College Park, MD (2011).
- [17] GREENBERG, David F. Accidental degeneracy. *Am. J. Phys.*, v. 34, n. 12, p. 1101 - 1109 (1966).
- [18] SILVARDIÈRE, J. Precession of Elliptical Orbits. *Am. J. Phys.*, v. 52, n. 10, p. 909-912 (1984).
- [19] MCDONALD, K. T.; FARINA, C.; TORT, A. C. Right and wrong use of the Lenz vector for non-Newtonian potentials. *Am. J. Phys.*, v. 58, n. 6, p. 540-542 (1990).
- [20] GOLDSTEIN, H. More on the prehistory of the Laplace or Runge-Lenz vector. *Am. J. Phys.*, v. 44, n. 11, p. 1123 - 1124 (1976).
- [21] STEWART, M. G. Precession of the perihelion of Mercury's orbit. *Am. J. Phys.*, v. 73, n.8, p. 730 - 734 (2005).
- [22] DAVIES, B. Elementary theory of perihelion precession. *Am. J. Phys.*, v. 51, n. 10, p. 909 - 911 (1983).
- [23] GARAVAGLIA, T. The Runge - Lenz vector and Einstein perihelion precession. *Am. J. Phys.*, v. 55, n. 2, p. 164 - 165 (1987).

- [24] TORT, A. C.; FARINA, C. Equivalence of different methods for evaluating the speed of precession of orbits. *IF/UFRJ* (1989).
- [25] CORNBLEET, S. Elementary derivation of the advance of the perihelion of a planetary orbit. *Am. J. Phys.*, v. 61, n. 7, p. 650-651 (1993).
- [26] FARINA, C.; MACHADO, M. The Rutherford cross section and Perihelion Shift of Mercury with the Runge-Lenz Vector. *Am. J. Phys.*, v. 55, n. 10, p. 921 - 923 (1987).
- [27] FRENCH, A. P. *Newtonian Mechanics*. W. W. Norton, NY (1971).
- [28] FEYNMAN, Richard P. *Lições de Física de Feynman*, edição definitiva / Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, Matthew Sands; tradução Adriana Válio Roque da Silva ... [et al.].- Porto Alegre: Bookman (2008).
- [29] <http://www.jpl.nasa.gov/news/news.php?release=2011-135>.
- [30] [http://www.observatorio-phoenix.org/t\\_proj/Sonear/sonear.htm](http://www.observatorio-phoenix.org/t_proj/Sonear/sonear.htm).
- [31] <http://www.jpl.nasa.gov>.
- [32] SYMON, Keith R. *Mechanics*, 3rd edition. Addison-Wesley (1971).
- [33] MAJAESS, D. *Concerning the Distance to the Center of the Milky Way and Its Structure*. *Acta A.* 60 (2010);
- [34] <https://www.youtube.com/watch?v=HiN6Ag5-DrU>;
- [35] STORCHI - BERGMANN, Thaisa. *O tamanho, idade e conteúdo do Universo*. IF/UFRGS.