



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
Instituto de Física  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física  
Mestrado Profissional em Ensino de Física

**Material Instrucional**

# **A lei de Gauss e a Gravitação Universal**

Leandro Batista Germano

Orientador: Alexandre Carlos Tort

Material instrucional associado á dissertação de mestrado de Leandro Batista Germano, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

## FICHA CATALOGRÁFICA

G1471 Germano, Leandro Batista

A lei de Gauss e a Gravitação Universal (material instrucional) / Leandro Batista Germano. – Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2017.

iii, 47 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Alexandre.C. Tort.

Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Física / Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2017.

Referências Bibliográficas: f. 45-47.

1. Ensino de Física. 2. Gravitação Universal. 3. lei de Gauss. I. Tort, Alexandre C. . II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física. III. A lei de Gauss e a Gravitação Universal (material instrucional).

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>A lei de Gauss no Ensino Médio</b>	<b>3</b>
2.1	A lei de Gauss . . . . .	5
2.2	Mais exemplos . . . . .	10
<b>3</b>	<b>A lei de Gauss e a Gravitação Universal: questionários e aula</b>	<b>26</b>
3.1	Apresentação . . . . .	26
3.2	Questionário Pré aula . . . . .	28
3.3	Questionário Pós aula . . . . .	30
3.4	Aula: A lei de Gauss e a Gravitação Universal . . . . .	31

# Capítulo 1

## Introdução

Este manual é dirigido aos professores que tem por objetivo elaborar novas estratégias para o ensino de Física, especificamente para aqueles que desejam construir uma nova abordagem para o tema Gravitação Universal. Neste material, inicialmente apresentamos uso da lei de Gauss do eletromagnetismo adaptada á gravitação universal, reformulada para o ensino médio em uma analogia com a mecânica dos fluídos, como um instrumento para justificar o tratamento de corpos extensos como pontos materias nos casos onde a simetria esférica está presente. Em seguida apresentamos um plano de aula, onde inicialmente utilizamos um questionário pré-aula, com o intuito de saber os conceitos que os alunos possuem a respeito do tema abordado e por sua vez, criar uma oportunidade, ao professor de minimizar as dificuldades que os alunos encontrarão ao longo da aula. Posteriormente, apresentamos uma aula que foi dividida em dois dias, tendo a duração de uma hora e quarenta minutos, dois tempos de 50 minutos, cada aula, tendo como forma de apresentação o *Data Show* e um quadro branco. Inicialmente os temas abordados na aula foram as leis de Kepler para o movimento planetário, lei de Gauss do eletromagnetismo adaptada á gravitação universal, reformulada para o ensino médio em uma analogia com a mecânica dos fluídos. Em seguida utilizamos a lei de Gauss para a gravitação, propomos alguns exemplos para o cálculo do campo gravitacional como o modelo de terra oca de Haley, o campo gravitacional na superfície da Terra e no interior da Terra e o pro-

blema da curva de rotação das galáxias. Por fim, entregamos aos alunos um questionário pós-aula que tem por objetivo, verificar se o aluno foi capaz de entender o que lhe foi apresentado, de fato, e verificar se existe a necessidade de uma nova forma de abordagem do tema.

## Capítulo 2

# A lei de Gauss no Ensino Médio

A lei da Gravitação Universal representa um passo gigantesco no entendimento da dinâmica do sistema solar e sua importância não pode deixar de ser enfatizada em sala de aula. Entretanto, a maior parte dos textos destinados ao ensino médio, com algumas exceções, limita-se a apresentar a expressão matemática de forma sucinta e discutir alguns exemplos que envolvem o movimento de planetas e satélites. Mas há duas perguntas que são inevitáveis. A primeira é: como Newton descobriu a forma matemática da lei? E a segunda é: por que quando aplicamos a lei aos sistemas Terra-Sol, Terra-Lua, e sistemas similares podemos considerar os corpos envolvidos como pontos materiais? Afinal de contas, o sol e os planetas são corpos extensos.

Embora a lei da Gravitação Universal não possa ser demonstrada, podemos responder à primeira pergunta recorrendo a argumentos de plausibilidade. Há mais de um argumento de plausibilidade que podemos utilizar em sala de aula, veja por exemplo [5], aqui consideraremos um destes argumentos.

Considere a órbita de um satélite em torno da Terra. Por simplicidade suponhamos que a Terra esteja em repouso em relação às estrelas fixas. Ainda por simplicidade, suponhamos também que a órbita do satélite em torno da Terra seja um círculo de raio  $r$ . A terceira lei de Kepler aplicada ao sistema Terra-satélite nos diz que a razão entre o quadrado do período de revolução

do satélite em torno da Terra  $T$  e o cubo do raio da órbita é constante

$$\frac{T^2}{r^3} = C.$$

Como a órbita é circular, a força que a Terra exerce sobre o satélite deve ser centrípeta

$$F = m \frac{v^2}{r},$$

onde  $v^2 = 2\pi r/T$  é a velocidade orbital. Segue que

$$F = \frac{4\pi^2 m r}{T^2}.$$

Eliminando  $T$  com a terceira lei de Kepler obtemos

$$F = \frac{4\pi^2 m}{C r^2}.$$

Invocando a terceira lei de Newton temos:  $\mathbf{F}_{\text{Terra-satélite}} = -\mathbf{F}_{\text{Terra-satélite}}$ . Em particular, a magnitude é igual

$$\|\mathbf{F}_{\text{Terra-satélite}}\| = \|\mathbf{F}_{\text{Terra-satélite}}\| = F,$$

onde  $F$  é dado pela equação (2). Segue que a constante  $C$  deve depender da massa da Terra  $M$ . Escrevendo  $C = 4\pi^2/GM$ , onde  $G$  é uma nova constante – a constante de gravitação universal – temos

$$\boxed{F = \frac{GMm}{r^2}}. \quad (2.1)$$

Para responder à segunda pergunta no ensino superior podemos aplicar as técnicas do cálculo diferencial e integral e justificar rigorosamente esta hipótese mas e no ensino médio? A resposta está na transposição didática para o ensino médio da lei de Gauss que é proposta principal deste trabalho.

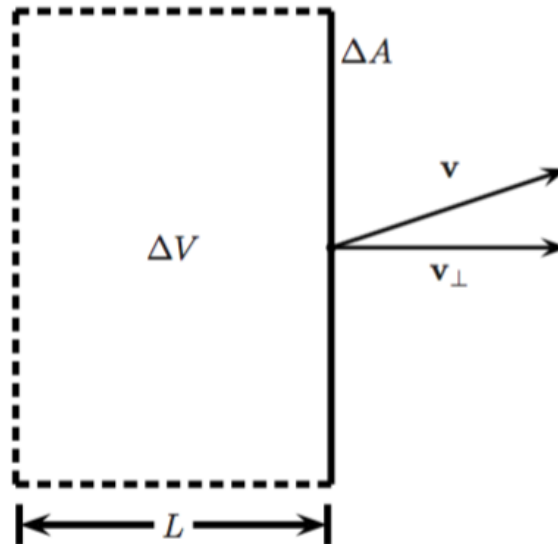


Figura 2.1: Diagrama para o cálculo da massa de água que atravessa a área  $\Delta A$ .  $\Delta V$  é o volume de controle.

## 2.1 A lei de Gauss

Seguindo [6], introduziremos a lei de Gauss por meio de uma analogia com a mecânica dos fluídos: considere um fluído incompressível de densidade  $\rho$ , por exemplo, a água. A quantidade de massa  $\Delta m$  contida no volume de referência  $\Delta V$  que atravessa uma pequena área  $\Delta A$  em um breve intervalo de tempo  $\Delta t$  é dada por

$$\Delta m = \Phi \Delta t,$$

onde  $\Phi$  é o fluxo de massa medida em kg/s através da área  $\Delta A$ . Como  $\Delta m = \rho \Delta V$ , podemos escrever também

$$\rho \Delta V = \Phi \Delta t.$$

Por outro lado,  $V = L \times \Delta A$ , veja a Figura 3.1, logo



$$\Phi = \rho \frac{L}{\Delta t} \Delta A.$$

A razão  $L/\Delta t$  é igual à magnitude da componente da velocidade do fluido perpendicular à área  $\Delta A$  a qual denotaremos por  $v_{\perp}$ . Portanto, podemos escrever

$$\Phi = \rho v_{\perp} \Delta A.$$

Considere agora uma superfície fechada  $A$  que encerra em um dado instante um volume total de água  $V$ . A superfície fechada pode ser dividida em pequenas áreas de tamanho  $\Delta A_j$ , com  $j = 1, 2, \dots, N$ , veja a Figura 3.2. Considere uma dessas pequenas áreas e a seguinte convenção: se o fluxo de água estiver entrando no volume  $V$  então  $v_{\perp}^j \Delta A_j < 0$ , logo  $\Phi_j < 0$ ; se, por outro lado, fluxo de água estiver saindo do volume  $V$ , então  $v_{\perp}^j \Delta A_j > 0$  e  $\Phi_j > 0$ .

Suponhamos agora que no interior da superfície fechada não haja torneiras ou ralos abertos, isto é: não haja fontes e/ou sumidouros. Neste caso, por conservação de massa, a quantidade de água contida em  $V$  deve ser sempre a mesma, logo:

$$\sum_{j=1}^N \rho v_{\perp}^j \Delta A_j = 0,$$

isto é: a quantidade de água que entra no volume de controle  $V$  é igual a quantidade de água que sai. Se houver fontes e sumidouros escrevemos:

$$\boxed{\sum_{j=1}^N \rho v_{\perp}^j \Delta A_j = \sum_{k=1}^n (\text{fontes} + \text{sumidouros})}. \quad (2.2)$$

*Observe que as fontes e sumidouros devem estar localizados no interior do volume  $V$ ; fontes e sumidouros externos não entram na soma do lado direito da equação (3.2).*

Sob certas condições, os campos elétrico e magnético apresentam simi-

laridades com fluídos em regime estacionário. No caso da eletrostática, por exemplo, se substituirmos o termo  $\rho v_{\perp}$  por  $E_{\perp}$  e considerarmos as cargas elétricas no interior do volume  $V$  como fontes (cargas positivas) ou sumidouros (cargas negativas) do “fluído elétrico”, podemos escrever

$$\sum_{j=1}^N E_{\perp}^j \Delta A_j = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_k Q_k, \quad (2.3)$$

onde  $E_{\perp}^j$  é a componente do campo elétrico perpendicular ao elemento de área  $\Delta A_j$ . No limite em que  $N \rightarrow \infty$  e  $\Delta A_j \rightarrow 0$ , recuperamos a lei de Gauss na forma integral:

$$\oint E_{\perp} dA = \frac{Q_{\text{liq}}}{\epsilon_0}; \quad (2.4)$$

onde  $Q_{\text{liq}}$  é a carga líquida encerrada pela superfície fechada.

No caso do campo gravitacional, a troca que deve ser feita é  $\rho v_{\perp}$  por  $g_{\perp}$ , mas a convenção de sinais deve ser mantida. Devemos trocar também a carga elétrica  $Q_k$  pela “carga” gravitacional,  $m_k$ , e substituir a constante de Coulomb por uma constante  $C$  a ser determinada. Neste caso escrevemos:

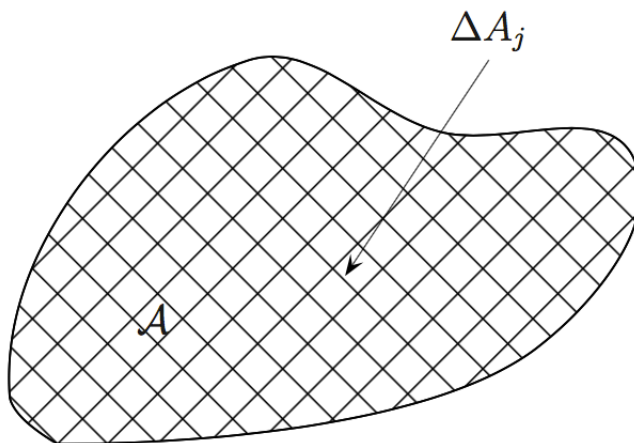


Figura 2.2: Superfície fechada.

$$\sum_{j=1}^N g_{\perp}^j \Delta A_j = C \sum_{k=1} m_k,$$

onde  $m_k$  é a  $k$ -ésima carga gravitacional e  $C$  é uma constante a ser determinada.

Para determinar  $C$  consideremos uma única massa puntiforme  $m$ . De acordo com a lei da gravitação universal, a força de atração entre esta massa e uma massa de prova  $m_0$  é dada por:

$$F(r) = -\frac{Gmm_0}{r^2},$$

onde o sinal algébrico indica que a força é atrativa. Segue que o campo gravitacional  $g(r)$  medido em N/kg (ou m/s<sup>2</sup>) é dado por

$$g(r) = \frac{F(r)}{m_0} = -\frac{Gm}{r^2}.$$

Escolhemos agora como superfície fechada uma esfera de raio  $r$  centrada em torno da massa puntiforme. As componentes perpendicular e paralelas em um ponto sobre a esfera são:  $g_{\perp}^j = g(r)$  e  $g_{\parallel}^j = 0$ , logo, a lei de Gauss aplicada ao campo gravitacional da massa puntiforme permite-nos escrever:

$$-\frac{Gm}{r^2} \sum_{j=1}^N \Delta A_j = C m.$$

Mas, se fizermos  $\Delta A_j \rightarrow 0$  ao mesmo tempo em que fizermos  $N \rightarrow \infty$ , a soma no lado esquerdo da equação acima deve ser igual a área da esfera, isto é:

$$\lim_{\substack{\Delta A_j \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{j=1}^N \Delta A_j = 4\pi r^2. \quad (2.5)$$

Portanto,

$$-\frac{Gm}{r^2} 4\pi r^2 = C m. \quad (2.6)$$

Segue que

$$\boxed{C = -4\pi G} \quad (2.7)$$

Portanto, como a constante que determinamos deve ser a mesma para qualquer configuração das fontes do campo gravitacional, a lei de Gauss se escreve

$$\sum_{j=1}^N g_{\perp}^j \Delta A_j = -4\pi G \sum_{k=1} m_k,$$

Para corpos extensos que apresentam simetria esférica, a lei de Gauss pode ser escrita na forma

$$\boxed{g(r)4\pi r^2 = -4\pi GM(r)}, \quad (2.8)$$

onde  $M(r)$  é a massa confinada no interior da superfície gaussiana. Suponhamos que  $M_0 = M(r = R)$  seja a massa total de uma distribuição de massa confinada a uma região esférica de raio  $R$ . Suponhamos que esta distribuição seja envolta por uma superfície esférica concêntrica de raio  $r > R$ . Neste caso, a lei de Gauss particularizada para o caso de simetria esférica, equação (2.8), nos dá

$$-g(r)4\pi r^2 = -4\pi GM_0,$$

ou ainda

$$g(r) = \frac{GM_0}{r^2}, \quad r \geq R. \quad (2.9)$$

Este resultado mostra-nos que é permitido considerar o campo gravitacional de uma distribuição esférica de massa, na região externa à distribuição, como uma massa puntiforme localizada na origem, justificando assim a lei da Gravitação Universal.

Vetorialmente :

$$\mathbf{g} = -g(r)\hat{\mathbf{r}}$$

## 2.2 Mais exemplos

### Campo gravitacional no interior da Terra

Suponhamos que a Terra possa ser modelada por uma esfera de raio  $R$  e massa  $M_{\oplus}$ , uniformemente distribuída. Neste caso,

$$M(r) = M_{\oplus} \frac{r^3}{R^3}, \quad 0 \leq r \leq R.$$

Fazendo uso da equação (2.8), temos

$$g(r) = \frac{GM_{\oplus}}{R^2} \frac{r}{R} = g_{\oplus} \frac{r}{R}, \quad 0 \leq r \leq R,$$

onde  $g_{\oplus}$  é o valor do campo gravitacional (ou aceleração da gravidade) na superfície da Terra.

### A casca esférica

Considere agora uma casca esférica homogênea de massa  $M$  e raio  $R$ . Pela lei de Gauss

$$g(r) 4\pi r^2 = 0. \quad (2.10)$$

Segue que por simetria em qualquer ponto do interior da casca, o campo gravitacional é nulo. Para pontos exteriores ( $r > R$ ), a superfície gaussiana envolve toda a massa da casca, logo, para a casca esférica de massa  $M$  e raio  $R$ , o campo gravitacional se escreve:

$$g(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < R; \\ \frac{GM}{r^2}, & R \leq r < \infty. \end{cases} \quad (2.11)$$

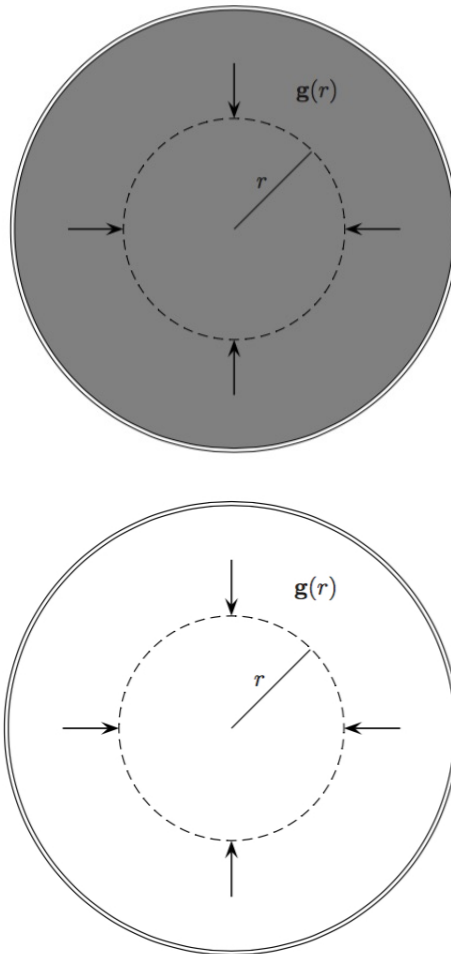


Figura 2.3: Esfera de massa  $M$ , raio  $R$  e densidade uniforme; casca esférica de massa  $M$  e raio  $R$ . A esfera tracejada é a superfície gaussiana de raio  $r$ .

### O modelo da Terra oca de Halley

Em 1692, Edmond Halley propôs um modelo alternativo para explicar a estrutura interna da Terra. No modelo de Halley, a crosta terrestre consiste de uma casca esférica com cerca de 800 km de espessura, duas cascas esféricas internas concêntricas e um núcleo com centro no centro geométrico comum dessa configuração. O espaço entre as cascas esféricas interiores e entre a casca mais interna e o núcleo é preenchido por atmosferas. O modelo deve-



Figura 2.4: Edmond Halley (1656 - 1742) e o modelo da Terra "oca". Fonte: (Imagens Wikipédia)

ria explicar as leituras anômalas das bússolas e com esta finalidade, Halley postulou que cada casca possuiria seu próprio conjunto de polos magnéticos. Se supusermos que a simetria do modelo seja esférica, para distâncias radiais maiores do que o raio da Terra, o campo gravitacional será igual ao campo de uma massa puntiforme, equação (2.9), mas como seria o campo gravitacional no interior da Terra?

Para responder a esta pergunta adotaremos algumas hipóteses simplificadoras adicionais. Como o raio da Terra é da ordem de  $6 \times 10^3$  km e a espessura das cascas é da ordem de  $8 \times 10^2$  km, negligenciaremos o campo no interior das cascas. As atmosferas, assim como a rotação das cascas internas também não serão levadas em conta. Sejam então,  $M_n$ , a massa do núcleo esférico,  $M_a$ ,  $M_b$ ,  $M_c$ ;  $a$ ,  $b$ , e  $c$ , as massas e os raios das cascas esféricas internas e da casca que representa a crosta terrestre, respectivamente, veja a Figura 3.5. Se aplicarmos a lei de Gauss da gravitação judiciosamente obteremos:

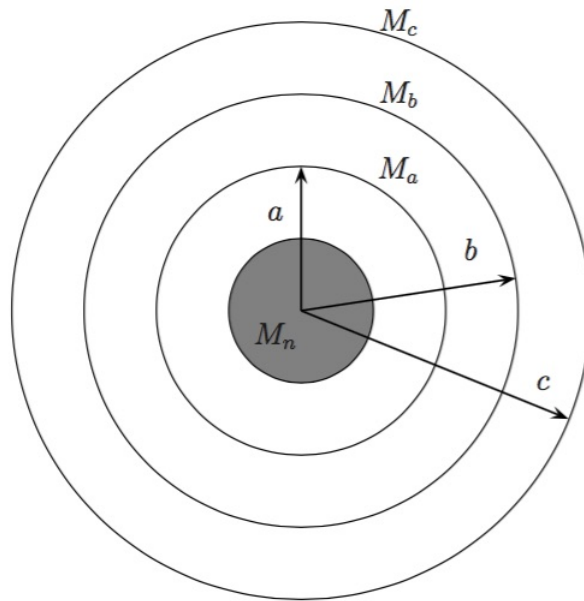


Figura 2.5: O modelo da Terra "oca" de Halley. (Imagens Wikipédia)

$$g(r) = \begin{cases} \frac{GM_n}{r^2}, & a < r < b; \\ \frac{G(M_n + M_a)}{r^2}, & b < r < c; \\ \frac{G(M_n + M_a + M_b)}{r^2}, & b < r < c; \\ \frac{G(M_n + M_a + M_b + M_c)}{r^2}, & c < r < \infty; \end{cases}$$

O modelo de Halley não deve ser confundido com as teorias pseudo-científicas da Terra oca que postulam a existência de civilizações avançadas que habitariam o interior. O modelo de Halley mostrou-se ser errôneo e foi descartado no início do século XIX.



### A matéria escura e as curvas galácticas de rotação

No final dos anos 1960 e início dos anos 1970, a astrônoma Vera Rubin mediu as velocidades orbitais das estrelas localizadas nos braços das galáxias espirais [7,8]. Graças às técnicas modernas utilizadas, os resultados obtidos eram de grande precisão. Em 1975, Rubin e seu colega K. Ford apresentaram os resultados em um encontro *da American Astronomical Society*. Estes resultados mostravam que a maioria das estrelas nos braços espirais orbitavam em torno do centro da galáxia com quase a mesma velocidade orbital, ver Figura 3.6. A conclusão era que ou a mecânica newtoniana não era válida universalmente, ou então boa parte da massa das galáxias estaria escondida na forma de um tipo de matéria não sensível às interações fundamentais, em particular a interação eletromagnética, com exceção da interação gravitacional. Esta forma de matéria chamada *matéria escura* (não confundir com energia escura) é hoje em dia um dos problemas fundamentais ainda não resolvidos pela física moderna.

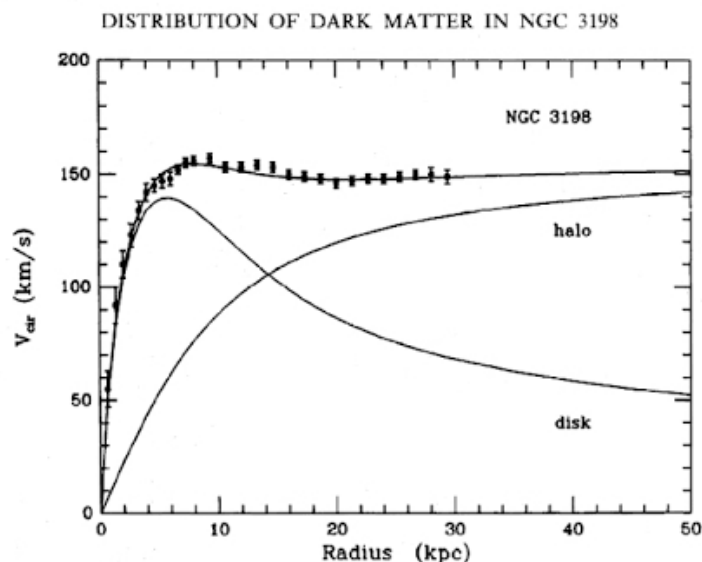


Figura 2.6: Diagrama típico da velocidade orbital em função da distância ao núcleo da galáxia. Fonte: <http://ignatz.phys.rpi.edu/site/index.php/the-physics/>, [?].

Para entender os resultados de Rubin e Ford faremos uso de um modelo muito simples de uma galáxia espiral. Como a maior parte da massa de uma galáxia espiral concentra-se na região central na forma de uma distribuição aproximadamente esférica, faremos a suposição que a galáxia pode ser considerada como uma distribuição esférica uniforme de raio  $R$  e massa  $M$ , e consideraremos o movimento, também por simplicidade, circular de uma estrela de massa  $m$ . Segue então que este caso podemos aplicar os resultados obtidos para o campo gravitacional interior e no exterior da distribuição. Se a estrela move-se no interior da distribuição escrevemos,

$$\frac{GM\varpi}{R^2} \frac{r}{R} = \frac{\varpi v^2}{r}; \quad 0 \leq r \leq R,$$

ou ainda

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM}{R}} \frac{r}{R}; \quad 0 \leq r \leq R. \quad (2.12)$$

Se a estrela move-se exteriormente à distribuição:

$$\frac{GM\varpi}{r^2} = \frac{\varpi v^2}{r}; \quad r \geq R;$$

logo,

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}}; \quad r \geq R; \quad (2.13)$$

Introduzindo a variável adimensional  $x = r/R$ , podemos escrever:

$$\frac{v(r)}{\sqrt{\frac{GM}{R}}} = x, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (2.14)$$

e

$$\frac{v(r)}{\sqrt{\frac{GM}{R}}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad 1 \leq x < \infty; \quad (2.15)$$

O gráfico da Figura 3.7 mostrar o comportamento esperado da velocidade orbital em unidades de  $\sqrt{GM/R}$ . Nosso modelo é muito simples, pois supõe

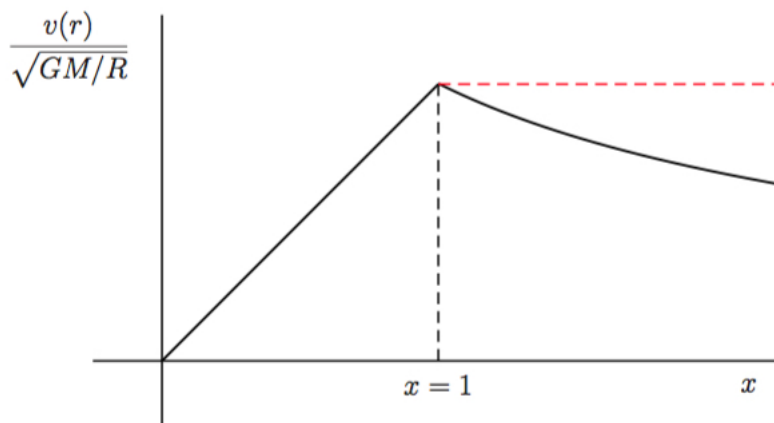


Figura 2.7: Velocidade orbital em função da distância ao centro da galáxia.

uma distribuição contínua e uniforme de matéria, mas permite entender o que está em jogo. Se a gravitação Newtoniana for válida nesta escala, há mais matéria no universo do que supunhamos inicialmente. Há alternativas à hipótese da matéria escura, mas elas implicam em modificações da segunda lei de Newton, veja por exemplo [10].

### Cavidades esféricas

Finalmente, como último exemplo discutiremos o que acontece com o campo gravitacional medido em um ponto  $P$  exterior á uma distribuição esférica se esta contiver uma cavidade esférica. Considere a Figura 3.8 onde se mostra a Terra representada por uma bola de massa  $M$  e raio  $R$ . Como antes, faremos a suposição que a Terra tem uma distribuição de massa uniforme. Uma cavidade esférica de raio  $R/2$  também é representada na figura. Observe que o centro da Terra, o centro da cavidade e o ponto  $P$  estão alinhados. Qual é o valor do campo gravitacional no ponto  $P$ . Há mais de um modo de responder a esta pergunta, mas todas envolvem nosso conhecimento do campo no interior da distribuição esférica obtida pela lei de Gauss e o princípio de superposição.

$$g(r) = \frac{GM}{r^2} - \frac{GM'}{\left(r - \frac{R}{2}\right)^2};$$

onde  $M'$  é a massa da cavidade dada por

$$M' = \rho V' = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \times \frac{4}{3}\pi (R/2)^3 = \frac{M}{8}.$$

onde  $M$  é a massa da Terra. Portanto,

$$g(r) = \frac{GM}{r^2} - \frac{GM}{8\left(r - \frac{R}{2}\right)^2}$$

que pode ser rescrita na forma

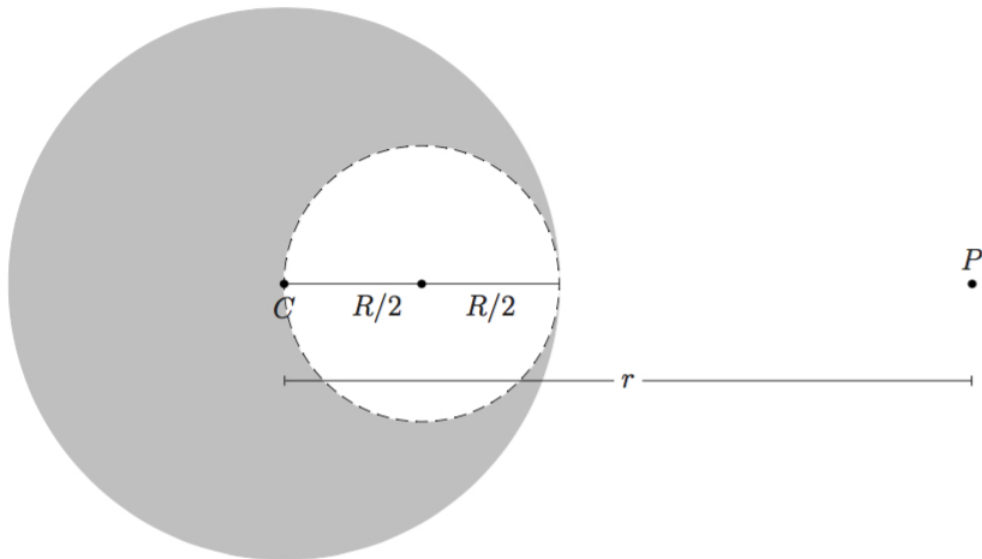


Figura 2.8: Cavidade esférica tangente à superfície da Terra.

$$g(r) = \frac{GM}{r^2} \left[ 1 - \frac{1}{8 \left( 1 - \frac{R}{2r} \right)^2} \right]. \quad (2.16)$$

Suponha agora que o ponto  $P$  seja um ponto bem próximo à superfície da Terra, isto é:  $r = R$ , Então a expressão acima nos dá  $g = g_0/2 \approx 4,9 \text{ m/s}^2$ .

Considere agora a Figura 3.9. Como antes, o centro da Terra, o centro da cavidade e o ponto de observação  $P$  estão alinhados. Seja  $R'$ , o raio da cavidade e  $M'$ , a sua massa. A variável  $x$  é a distância entre o centro da Terra e o centro da cavidade. Convém expressar  $x$  e  $R'$  como múltiplos do raio da Terra, isto é:  $x = \lambda R$ , e  $R' = \epsilon R$ , onde  $\lambda$  e  $\epsilon$  são números reais positivos. Se quisermos que a cavidade apenas tangencie a superfície da Terra, a condição:

$$x + R' = R,$$

deve ser obedecida. Se a cavidade não tangencie a superfície da Terra escre-

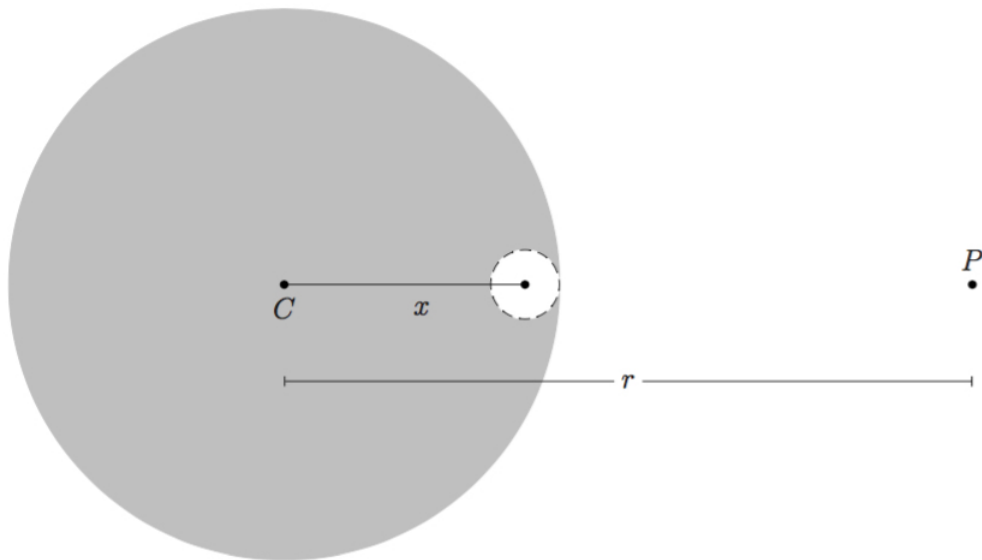


Figura 2.9: Cavidade esférica de massa e raio arbitrários.

vemos:

$$x + R' < R.$$

Fazendo uso da parametrização introduzida acima, podemos rescrever estas condições na forma:

$$\lambda + \epsilon \leq 1.$$

Como antes, o campo no ponto  $P$  será dado por

$$g(r) = \frac{GM}{r^2} - \frac{GM'}{(r-x)^2}.$$

A massa da cavidade pode ser escrita como:

$$M' = \epsilon^3 M.$$

Portanto, levando em conta os parâmetros  $\lambda$  e  $\epsilon$ , a intensidade do campo gravitacional em  $P$  será dada por:

$$g(r; \lambda, \epsilon) = \frac{GM}{r^2} \left[ 1 - \frac{\epsilon^3}{\left(1 - \frac{\lambda R}{r}\right)^2} \right] \quad (2.17)$$

Observe que para  $\lambda = 1/2$  e  $\epsilon = 1/2$  obtemos o resultado dado pela equação (2.16), os cálculos envolvendo as cavidades são um bom exemplo do uso do princípio da superposição no caso do campo gravitacional.

### Um modelo simples para anomalia gravitacional

Os resultados obtidos para o campo gravitacional por meio da lei de Gauss podem ser utilizados para criar exemplos simples de anomalias gravitacionais para discussão em sala de aula. Uma anomalia gravitacional é simplesmente a diferença entre o valor observado da aceleração de um corpo em queda livre nas proximidades da superfície da Terra e o valor predito pelo modelo teórico da sua gravidade superficial. Aqui discutiremos um exemplo simples.

Considere uma esfera homogênea maciça cujo centro se encontra a uma profundidade  $z$  contada a partir da superfície da Terra. A massa da esfera  $M_e$  e raio  $a$ . A componente  $g_z$  do campo gravitacional da esfera no ponto  $A$  – veja a Figura 3.10 – a distância do ponto  $A$  à reta perpendicular à superfície da Terra e que passa pelo centro geométrico da esfera é  $x$ . A componente vertical do campo gravitacional da esfera no ponto  $A$  se escreve:

$$g_z = \frac{GM_e}{r^2} \times \frac{z}{r} = \frac{GM_e z}{r^3};$$

onde

$$r = (x^2 + z^2)^{1/2};$$

logo,

$$g_z = \frac{GM_e z}{(x^2 + z^2)^{3/2}},$$

ou ainda

$$g_z^*(x^*) = \frac{g_z}{GM_e/z^2} = \frac{1}{(x^{*2} + 1)^{3/2}}, \quad (2.18)$$

onde  $x^* = x/z$ . A Figura 3.11, mostra o gráfico da equação (2.18). É fácil perceber que o valor máximo de  $g_z^*(x^*)$  acontece quando  $x^* = 0$ . Neste caso,

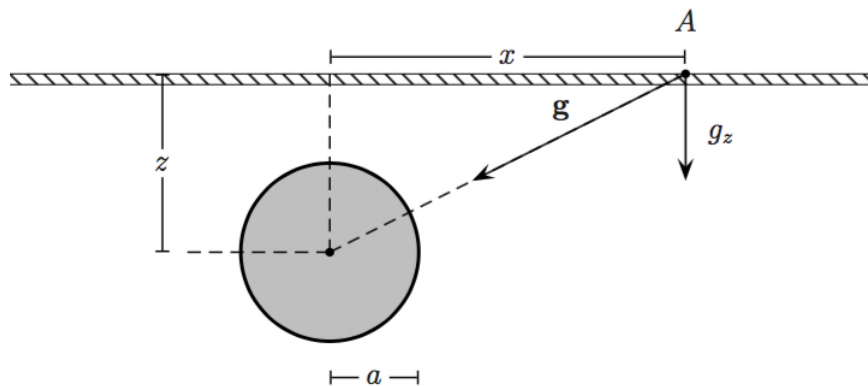


Figura 2.10: Anomalia gravitacional esférica.

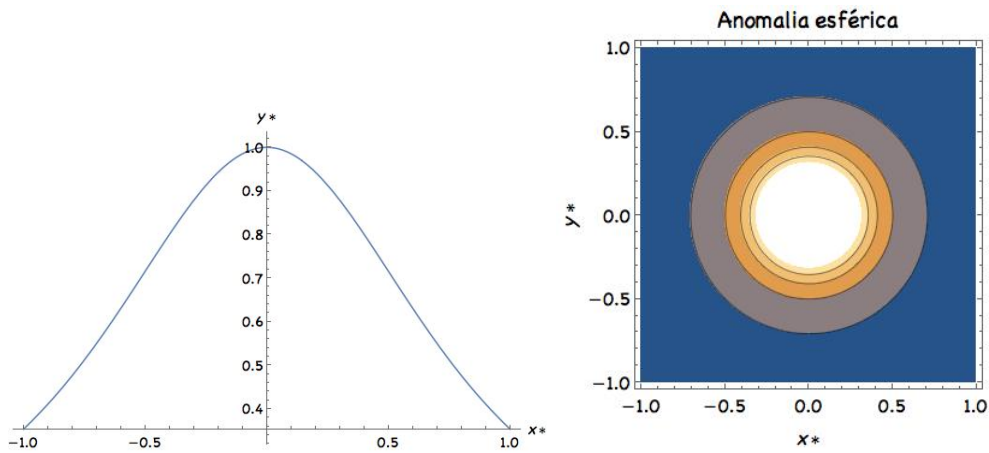


Figura 2.11: Anomalia esférica.

$g_z^*(0) = 1$ , e

$$g_z^{\text{máx}} = \frac{GM_e}{z^2}.$$

Para que valor de  $x^*$  a aceleração adimensional  $g^*(x^*)$  cai para a metade do seu valor? Isto é:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{(x^{*2} + 1)^{3/2}}.$$

Resolvendo esta equação obtemos

$$x_{1/2}^* = \pm 0,766.$$

Portanto, a profundidade do centro da anomalia esférica será:

$$z = \frac{x}{0,766}.$$

Para  $x = 100$  m,

$$z = \frac{100}{0,766} \approx 130,55 \text{ m}.$$

Neste caso, a massa da anomalia esférica será



$$M_e = \frac{g^{\text{máx}} z^2}{G};$$

onde  $g^{\text{máx}}$  é o valor medido com um gravímetro.

O estudo das anomalias gravitacionais é de grande utilidade na análise geofísica dos solos.

### Um modelo simples para a gravidade no interior da Terra.

Façamos a suposição que a Terra possa ser modelada por uma esfera de densidade de massa uniforme e raio  $R$ . Neste caso, o modo mais simples de calcular o campo gravitacional terrestre no interior de Terra é por meio da lei de Gauss para a gravitação Newtoniana. Como há simetria esférica, podemos escrever:

$$4\pi r^2 g(r) = 4\pi GM(r),$$

ou ainda

$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2},$$

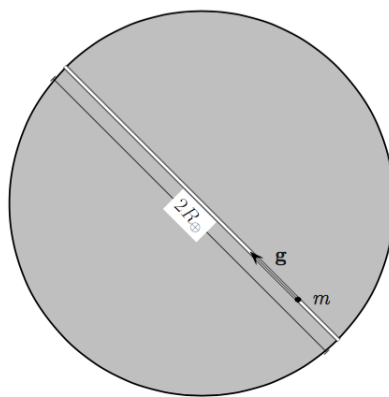


Figura 2.12: Superfície gaussiana no caso de simetria esférica.

Como a densidade é uniforme temos

$$\frac{M(r)}{M} = \frac{r^3}{R^3},$$

onde  $M$  é a massa da Terra. Segue que no interior da Terra, isto é: para  $0 \leq r \leq R$ :

$$g(r) = \frac{GM}{R^2} \frac{r}{R} = g_0 \frac{r}{R},$$

onde identificamos

$$g_0 = \frac{GM}{R^2} = 9,81 \text{ m/s}^2,$$

como a aceleração gravidade na superfície da Terra. Portanto, um corpo de prova de massa  $m$  que se move ao longo do diâmetro da esfera terrestre estará sujeito a uma força radial é dada por

$$P_r = -mg(r) = mg_0 \frac{r}{R}. \quad (2.19)$$

Portanto  $P_r$  é uma força do tipo restauradora, como a força em uma mola  $-kx$ . Segue que o corpo oscila de acordo com a equação:

$$r(t) = R \cos\left(\sqrt{\frac{g_0}{R}} t\right). \quad (2.20)$$

e o período será:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g_0}}. \quad (2.21)$$

Se substituirmos os valores médios aceitos de  $g_0$ , aceleração do campo gravitacional na superfície da Terra e  $R$ , raio da Terra, obteremos o resultado bem conhecido:

$$T \approx 84 \text{ minutos},$$

para o período de uma oscilação completa e  $T_{1/2} \approx 42$  minutos como a duração da viagem entre pontos antípodas. É possível mostrar que o túnel

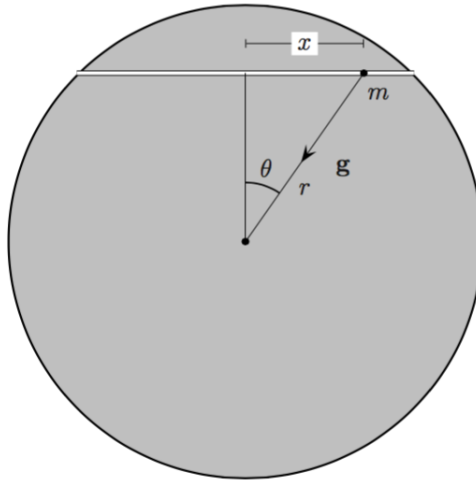


Figura 2.13:

escavado no interior da Terra não precisa passar necessariamente pelo centro da Terra pois o período, e logo, o meio período, serão iguais aos calculados acima, em outras palavras: os pontos de partida e chegada na superfície da Terra não são necessariamente antípodas. Considere a Figura 3.13: a projeção da força gravitacional ao longo do túnel é dada por

$$P_r = -mg(r) \cos \theta = -mg(r) \frac{x}{r},$$

ou ainda

$$P_r = -mg_0 \frac{r}{R} \frac{x}{r},$$

onde usamos a expressão de  $g(r)$  para o interior da Terra. A equação de movimento da massa  $m$  se escreve:

$$ma_x = -mg_0 \frac{x}{R}.$$

Simplificando e rearranjando obtemos,

$$a_x + \frac{g_0}{R} x = 0,$$

que é a equação de movimento de um oscilador harmônico simples com

frequência angular e período iguais aos calculados anteriormente.

# Capítulo 3

## A lei de Gauss e a Gravitação Universal: questionários e aula

### 3.1 Apresentação

Este trabalho apresenta uma sugestão de aplicação do tema *a lei de Gauss e a Gravitação Universal* no ensino médio. Os pré-requisitos para a introdução do tema no ensino médio são:

*As leis de Kepler, em particular a terceira*

*Força Gravitacional*

*Cálculo de área de figuras geométricas, em particular a área da superfície de uma esfera*

*Movimento circular uniforme*

O material didático aqui apresentado não trata dos temas, listados acima, por supor que os mesmos já foram lecionados aos estudantes. Caso isso, não tenha ocorrido, o uso deste material deve ser precedido da discussão dos temas, listados cima. A saber, esse material, tem duas partes: dois questionários pré e pós aula direcionados aos estudantes e uma aula (ou sugestão de abordagem) ao professor. Os questionários foram pensados de modo a

inserir os alunos ao tema e em seguida verificar se o aluno alcançou o nível de aprendizagem esperado ou se ainda se faz necessário uma abordagem mais detalhada, sobre um determinado assunto. Os slides em *PowerPoint*, que foram utilizados nas aulas, lecionada aos alunos do ensino médio se encontram neste apêndice. As duas aulas ministradas, tiveram um tempo de duração de dois tempos de 50 minutos, cada uma.

## 3.2 Questionário Pré aula

**Universidade Federal do Rio de Janeiro**  
**Instituto de Física**  
**Mestrado Profissional em Ensino de Física**

Questionário introdutório  
A lei de Gauss e a Gravitação Universal

Aluno: Leandro Batista Germano

Nome do aluno(a):

Turma:

Série:

1. O que são: Estrelas, Planetas e Satélites naturais?
2. O que é um sistema planetário?
3. Como é chamado o nosso sistema planetário?
4. Quantos planetas há no nosso sistema planetário?
5. Quantas Estrelas?
6. Você sabe dizer o nome de cada planeta que faz parte do nosso sistema solar? Quais os nomes?
7. O que é um planeta Anão?
8. O que é um asteróide?
9. Quantas Luas tem a Terra?
10. Quantas Luas tem Marte? Você sabe o nome dessas Luas?
11. Quantas Luas tem Júpiter?
12. Qual a “cola” que mantém os planetas girando em torno do Sol?

13. O que é uma órbita?
14. Qual a forma geométrica da órbita de um planeta?
15. Por que a Lua não cai sobre a Terra?



### 3.3 Questionário Pós aula

**Universidade Federal do Rio de Janeiro**  
**Instituto de Física**  
**Mestrado Profissional em Ensino de Física**

Questionário Final  
A lei de Gauss e a Gravitação Universal

Aluno: Leandro Batista Germano

Nome do aluno(a):

Turma:

Série:

1. Qual a “cola” que mantém os planetas girando em torno do Sol?
2. O que é uma órbita?
3. Qual a forma geométrica da órbita de um planeta?
4. Por que a Lua não cai sobre a Terra?

## **3.4 Aula: A lei de Gauss e a Gravitação Universal**

## Universidade Federal do Rio de Janeiro -UFRJ



**Mestrado Profissional em Ensino de Física**  
**Aluno: Leandro Batista Germano**

**RIO DE JANEIRO, 22 de Maio de 2017**

**A lei de Gauss e a Gravitação Universal**

## As Leis de Kepler



Johannes Kepler (1571-1630)  
Fonte: <http://www.siteastronomia.com>

Em 1609, publicou:

***Nova Astronomia baseada nas causas ou Física do Céu Junto com comentários sobre o movimento do planeta Marte.***

Nesta publicação estão enunciadas as duas primeiras leis.

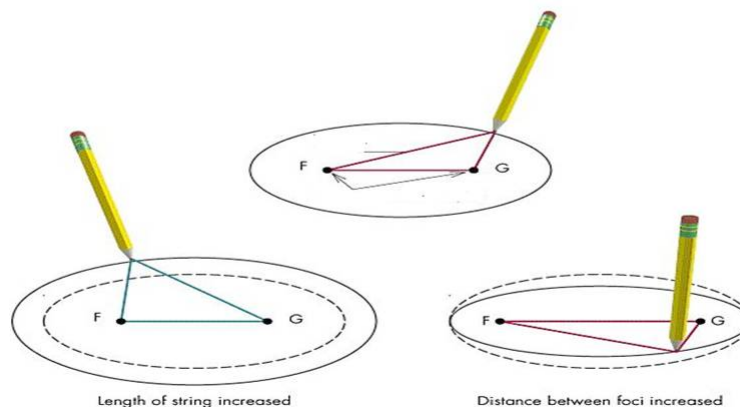
Em 1619, publicou:

***A Harmonia do Mundo.***

Nesta publicação, em meio a uma enorme quantidade de informações se encontra enunciada a Terceira lei dos movimentos planetários

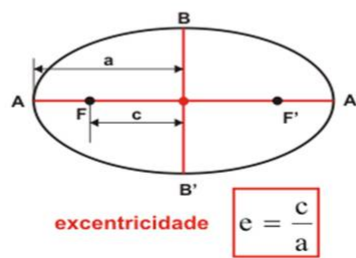
## 1ª Lei – A Lei das órbitas

***Todos os planetas se movem em órbitas elípticas, com o Sol ocupando um dos focos.***



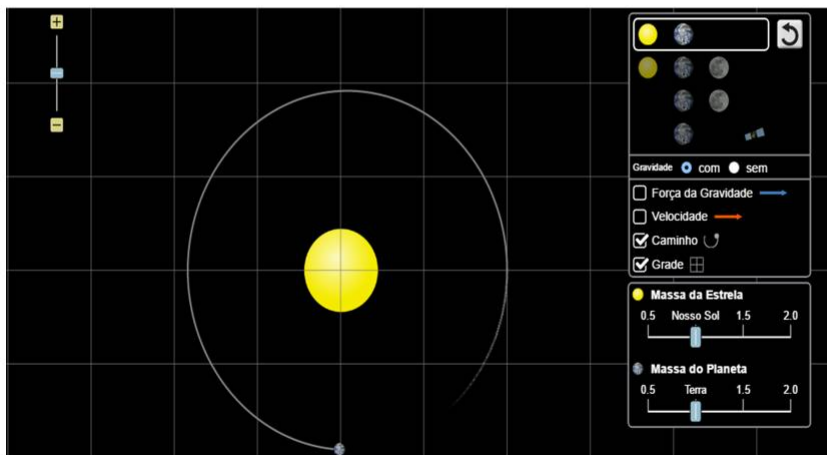
## 1ª Lei – A Lei das órbitas

No entanto, no caso das órbitas planetárias do sistema solar essas elipses possuem baixa excentricidade, isto é, são quase circunferências.



Elipse (cálculo da excentricidade)  
Fonte : [www.objetoeducacionais2.mec.gov.br](http://www.objetoeducacionais2.mec.gov.br)

## 1ª Lei – A Lei das Órbitas

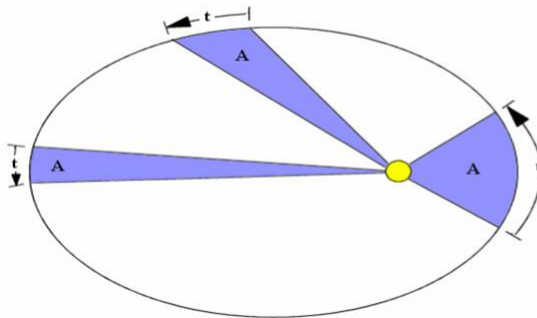


Órbita, Simulação

Fonte: [https://phet.colorado.edu/pt\\_BR/simulation/gravity-and-orbits](https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/gravity-and-orbits)

## 2ª Lei – Lei das áreas

**Uma linha imaginária que liga um planeta até o Sol varre áreas iguais em iguais intervalos de tempo.**



*Quanto mais perto um planeta estiver do Sol (periélio) mais rápido ele se move e quanto mais afastado estiver do Sol (afélio) mais devagar o planeta se move.*

Lei das áreas

Fonte:

[https://en.wikibooks.org/wiki/General\\_Astronomy/Print\\_version](https://en.wikibooks.org/wiki/General_Astronomy/Print_version)

## 3ª Lei – Lei dos períodos

**Para todo os planetas, o quadrado de seu período de revolução é diretamente proporcional ao cubo do raio médio de sua órbita.**

$$\frac{T^2}{r^3} = C$$

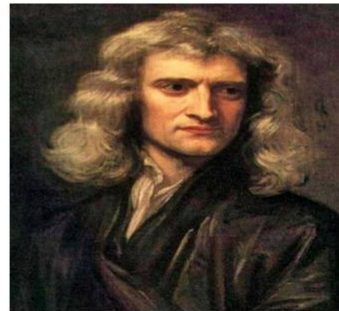
Planeta	Valores de Copérnico			Valores atuais		
	T (anos)	R (U.A.)	$T^2/R^3$	T (anos)	R (U.A.)	$T^2/R^3$
Mercúrio	0,241	0,38	1,06	0,241	0,387	1,00
Vênus	0,614	0,72	1,01	0,615	0,723	1,00
Marte	1,881	1,52	1,01	1,881	1,524	1,00
Júpiter	11,8	5,2	0,99	11,862	5,203	1,00
Saturno	29,5	9,2	1,12	29,457	9,539	1,00

Fonte: Nussenzveig, 2013, p.242

## Gravitação Universal

Do ponto de vista dinâmico, que tipo de força o Sol exerce sobre os planetas, obrigando-os a se moverem de acordo com as leis que Kepler?

A resposta foi dada por Isaac Newton:



Fonte:

[https://pt.wikipedia.org/wiki/isaac\\_Newton/](https://pt.wikipedia.org/wiki/isaac_Newton/)

## A Força Gravitacional !

## Gravitação Universal

Argumento de plausibilidade:

$$\frac{T^2}{r^3} = C$$

$$F_c = \frac{mv^2}{r}$$

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$F = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$$

$$F = \frac{4\pi^2 m}{Cr^2}$$

$$C = \frac{4\pi^2}{GM}$$

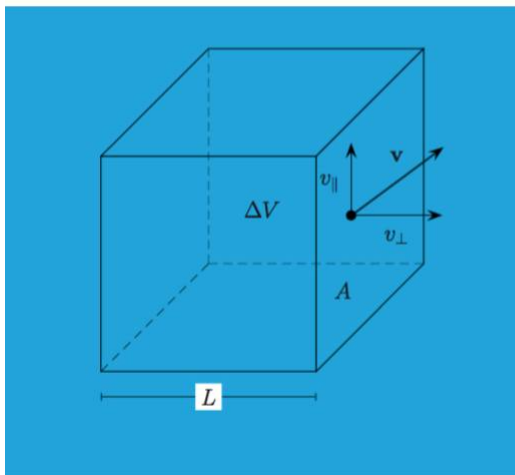
$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

•  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$

Figura 3.1: slide 10: Fim da primeira aula

## lei de Gauss no E.M.

Analogia com mecânica dos fluidos:



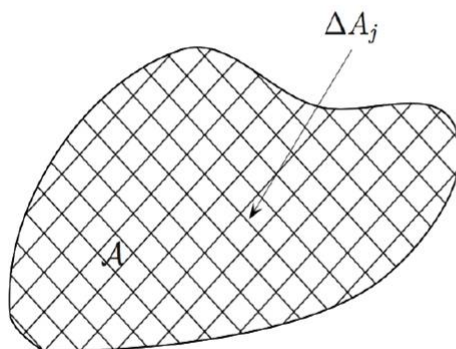
$$\Delta m = \Phi \Delta t,$$

$$\rho \Delta V = \Phi \Delta t.$$

$$\phi = \rho \frac{L}{\Delta t} \Delta A$$

$$\Phi = \rho v_{\perp} \Delta A.$$

## lei de Gauss no E.M.



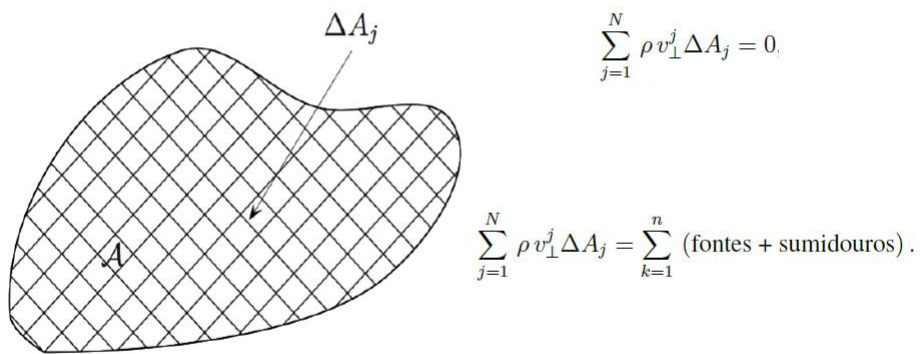
A superfície encerra em um dado momento um volume total de água  $V$ .

$$v_{\perp}^j < 0, \text{ logo } \Phi_j < 0.$$

$$v_{\perp}^j > 0 \text{ e } \Phi_j > 0$$



## lei de Gauss no E.M.



$$\sum_{j=1}^N \rho v_{\perp}^j \Delta A_j = 0.$$

$$\sum_{j=1}^N \rho v_{\perp}^j \Delta A_j = \sum_{k=1}^n (\text{fontes} + \text{sumidouros}).$$

## lei de Gauss no E.M.

O campo elétrico e o campo magnético apresentam similaridades com os fluidos no regime estacionário.

$$\rho v_{\perp}$$

$$E_{\perp}$$

$$\sum_{j=1}^N E_{\perp}^j \Delta A_j = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_k Q_k.$$

## Lei de Gauss no E.M.

Considere uma distribuição esférica de massa  $M_0$  e raio  $R$ . Para  $r > R$ :

$$\sum_{j=1}^N g_{\perp}^j \Delta A_j = -4\pi G \sum_{k=1} m_k$$

**Simetria Esférica** ( $g_{\parallel} = 0$  e  $g_{\perp} = g$ )

$$-g(r)4\pi r^2 = -4\pi G M_0,$$

$$g(r) = \frac{GM_0}{r^2}, \quad r \geq R.$$

## Exemplo 1



Edmond Halley (1656 - 1742) e o modelo da Terra "oca"



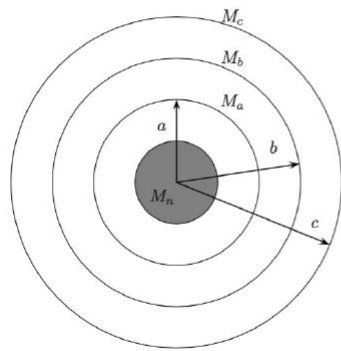
Crosta é uma casca esférica com cerca de 800Km de espessura.

Casca esférica concêntrica e um núcleo com centro geométrico comum a essa configuração.

Espaços era preenchido por atmosfera.

Visava explicar as leituras anômalas do campo magnético terrestre.

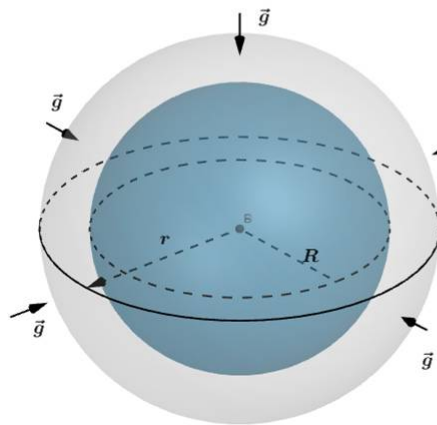
## Terra "oca"



$$g(r) = \begin{cases} \frac{GM_n}{r^2}, & a < r < b; \\ \frac{G(M_n + M_a)}{r^2}, & b < r < c; \\ \frac{G(M_n + M_a + M_b)}{r^2}, & c < r < \infty; \\ \frac{G(M_n + M_a + M_b + M_c)}{r^2}, & c < r < \infty; \end{cases}$$

## Exemplo 2

### Campo Gravitacional da Terra



**R= Raio da Terra**  
**r = Raio da superfície imaginária**

**R < r**

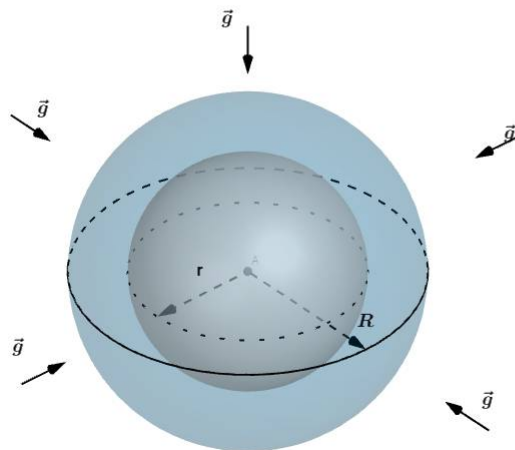
Aplicando os conhecimentos, adquiridos em sala de aula, teremos para o campo gravitacional?

$$-g(r)4\pi r^2 = -4\pi GM_0,$$

$$g(r) = \frac{GM_0}{r^2}, \quad r \geq R.$$

## Exemplo 2

### Campo Gravitacional da Terra



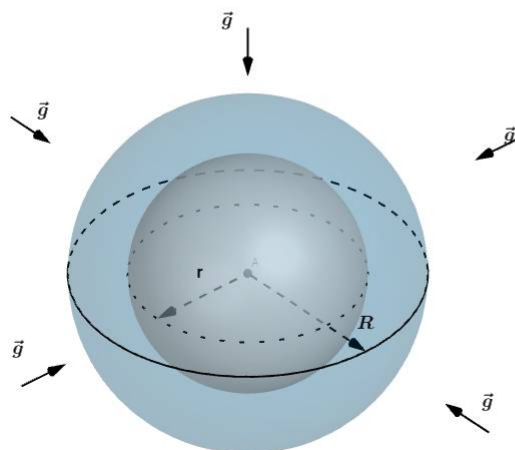
$R$  = Raio da Terra  
 $r$  = Raio da superfície imaginária

$R > r$  (no interior da Terra)

Aplicando os conhecimentos, adquiridos em sala de aula, teremos para o campo gravitacional?

## Exemplo 2

### Campo Gravitacional da Terra



$$M(S) = \rho V_i = \left(\frac{M}{\frac{4\pi R^3}{3}}\right) \left(\frac{4\pi r^3}{3}\right) = M \frac{r^3}{R^3}$$

$$-g(4\pi r^2) = -4\pi GM(S)$$

$$g = g_0 \frac{r}{R} \quad \text{onde} \quad g_0 = \frac{GM}{R^2}$$

## Exemplo 3

### A curva de rotação das Galáxias



Galáxias Espirais

Fonte: <https://noticias.uol.com.br/ciencia/ultimasnoticias/redacao/2010/10/27/novas-imagens-mostram-detalhes-de-seis-galaxias-espirais.htm>

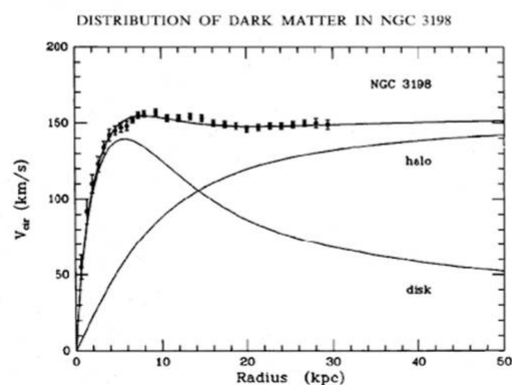
No final da década 1960 e início da década de 1970 a astrônoma Vera Rubin mediu a velocidade das estrelas localizadas nos braços das Galáxias espirais.

Em 1975 Rubin e seu colega K. Ford apresentaram seu Resultado.

Estes resultados mostravam que a maioria das estrelas nos braços espirais orbitavam em torno do centro da galáxia com quase a mesma velocidade.

## Exemplo 3

### A curva de rotação das Galáxias



Fonte: <http://ignatz.phys.rpi.edu/site/index.php/the-physics/>

## Exemplo 3

Para entender os resultados de Rubin e Ford faremos uso de um modelo muito simples de uma galáxia espiral. Vamos considerar que a maior parte da massa de uma galáxia espiral concentra-se na região central na forma de uma distribuição aproximadamente esférica, faremos a suposição que a galáxia pode ser considerada como uma distribuição esférica uniforme de raio  $R$  e massa  $M$ , e consideraremos o movimento, também por simplicidade, circular de uma estrela de massa  $m$ . Segue então que este caso podemos aplicar os resultados obtidos para o campo gravitacional interior e no exterior da distribuição.

## Exemplo 3

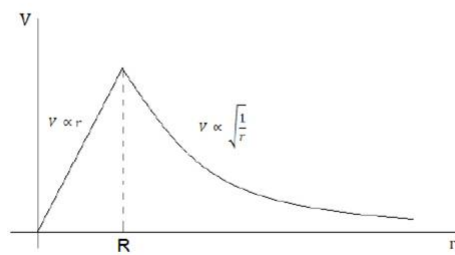
### A curva de rotação das Galáxias

$$\frac{GM\pi}{R^2} \frac{r}{R} = \frac{\pi v^2}{r}; \quad 0 \leq r \leq R, \quad \frac{GM\pi}{r^2} = \frac{\pi v^2}{r}; \quad r \geq R;$$

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM}{R}} \frac{r}{R}; \quad 0 \leq r \leq R. \quad v(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}}; \quad r \geq R;$$

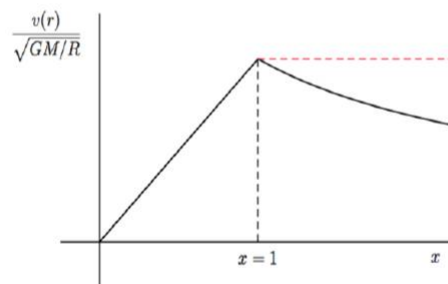
### Exemplo 3

A curva de rotação das Galáxias



### Exemplo 3

A curva de rotação das Galáxias



# Referências Bibliográficas

- [1] A. Máximo, B. Alvarenga: *Física 1 contexto e aplicações*, 1ª edição, Scipione. São Paulo, 2014
- [2] L.F.Fuke, Y.Kazuhito: *Física para o Ensino Médio 1*, 2ª edição, Saraiva. São Paulo, 2011
- [3] A. Gaspar: *Física: Mecânica*, 1ª edição, Ática. São Paulo, 2000
- [4] R.Resnick, D.Halliday e K.S. Krane: *Física 2*, 5ª edição, LTC. Rio de Janeiro, 2011
- [5] R.F.F Cunha e A.C.Tort *Plausibility argumentes and universal gravitation*, Phys. Edu.**52** 035001,2017
- [6] T. Bunk, A. Eisenkraft e L. D. Kirkpatrick *Quantoons* NSTA Press Arlington 2006.
- [7] V.C. Rubin and W.k. Ford *Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions*,The Astrophysical Journal v. 159, p. 379. 1970
- [8] V.C. Rubin, W.k. Ford and N.Thonnard *Rotational properties of 21 Sc galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 ( $R=4$  kpc) to UGC 2885 ( $R=122$  kpc)*,The Astrophysical Journal v. 238, p. 471. 1980
- [9] [https : //phet.colorado.edu/pt<sub>B</sub>R/simulation/gravity – and – orbits](https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/gravity-and-orbits). Acessado em 10/05/17



- [10] Ximenes, S. J. Carvalho *A Matéria escura no ensino médio*, 2016. 86f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Física)- Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.
- [11] A. Gaspar: *Compreendendo a Física 3, eletromagnetismo e Física moderna*, 2ª edição, Ática. São Paulo, 2013
- [12] C.M.A. Torres, N.G.Ferraro, P.A.T. Soares, P.C.M. Penteado: *Física Ciência e Tecnologia*, 3ª edição, Moderna. São Paulo, 2013
- [13] C.A. Kantor, L.A. Paoliello Jr, L.C. Mendes, M.C.B.O. Canto Jr: *Coleção Quanta Física 2*, 2ª edição, Pearson. São Paulo, 2013
- [14] G.Martini, W. Spinelli, H.C. Reis: *Conexões com a Física 1*, 2ª edição, Moderna. São Paulo, 2013
- [15] Hewitt, P.G.: *Física conceitual*, 9ª edição, Ática. Porto alegre, 2008
- [16] Nussenzveig, H.M. : *Mecânica 1 curso de Física básica*, 5ª edição, Blucher. São Paulo, 2013
- [17] Nussenzveig, H.M.: *Eletromagnetismo 3 curso de Física básica*, 2ª edição, Blucher. São Paulo, 2015
- [18] O. Freire Jr., M. Matos Filho, A. L. do Valle: *Uma exposição didática de como Newton apresentou a força gravitacional*. A Física na Escola v.5, n.1 2004.
- [19] P.M.C.Dias, W.M.S.Santos e M.T.M de Souza *A Gravitação Universal, um texto para o Ensino Médio*, Revista Brasileira de Ensino de Física, V.26,n 3, p.257-271,2004
- [20] P.R. da S.Rosa: *curso de Física básica II*, Departamento de Física-UFMS. Campo Grande,2009
- [21] R. D. Gregory: *Classical Mechanics* CUP Cambridge 2006.
- [22] A.S.T. Pires: *Evolução da ideias da Física*, 1ª edição, Livraria da Física. São Paulo, 2008

- [23] J.Stewart: *Cálculo volume 2*, 5ª edição, Thomsom. São Paulo, 2006
- [24] [http : //www.siteastronomia.com](http://www.siteastronomia.com). Acessado em 10/05/17
- [25] [www.objetoeducacionais2.mec.gov.br](http://www.objetoeducacionais2.mec.gov.br). Acessado em 09/05/17
- [26] [https : //en.wikibooks.org/wiki/General\\_Astronomy/Print\\_version](https://en.wikibooks.org/wiki/General_Astronomy/Print_version).  
Acessado em 10/05/17
- [27] [https : //pt.wikipedia.org/wiki/isaacNewton/](https://pt.wikipedia.org/wiki/isaacNewton/). Acessado em 05/05/17
- [28] [https : //noticias.uol.com.br/ciencia/ultimasnoticias/redacao/2010/10/27/novas-imagens-mostram-detalhes-de-seis-galaxias-espirais.htm](https://noticias.uol.com.br/ciencia/ultimasnoticias/redacao/2010/10/27/novas-imagens-mostram-detalhes-de-seis-galaxias-espirais.htm).  
Acessado em 05/05/17