

A montanha-russa caipira: uma proposta de
atividade em mecânica clássica

Pedro Terra Carlos Farina Reinaldo de Melo e Souza



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física

Material instrucional associado à dissertação de mestrado de Pedro de Paula Terra, intitulada *Alguns problemas instigantes de mecânica: das tautócronas à montanha-russa caipira*, orientada por Carlos Farina e por Reinaldo de Melo e Souza, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro em dezembro de 2016.

Orientadores:
Carlos Farina de Souza
Reinaldo de Melo e Souza

Rio de Janeiro

Sumário

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Disco com centro de massa excêntrico | 1 |
| 1.1 | Introdução | 1 |
| 1.2 | Análise do sistema | 3 |
| 1.2.1 | Estática | 3 |
| 1.2.2 | Dinâmica | 4 |
| 1.3 | Material experimental | 5 |
| 1.4 | Sequência didática | 7 |
| 1.4.1 | Aula 1 — Disco sobre a rampa: caso estático | 8 |
| 1.4.2 | Aula 2 — Disco oscilando sobre plano horizontal | 10 |
| 1.4.3 | Aula 3 — Passeio no plano horizontal | 12 |
| 1.4.4 | Aula 4 — O disco saltante | 14 |

Capítulo 1

Disco com centro de massa excêntrico

1.1 Introdução

Um disco que desce rolando sem deslizar um plano inclinado pode ter um movimento bem mais complicado do que parece à primeira vista. Esse problema clássico e corriqueiramente abordado em todos os níveis de ensino de Física, produz comportamentos surpreendentes se admitida apenas uma pequena alteração: fazer com que o centro de massa do disco seja *excêntrico*, ou seja, que não coincida com o seu centro geométrico.

Sabe-se que um corpo que possua simetria axial, ao ser abandonado sobre um plano inclinado de α em relação à horizontal e com atrito suficientemente grande, desce o plano rolando sem deslizar com aceleração constante de módulo $a \propto g \sin \alpha$, que depende da sua distribuição de massa. No entanto, um segundo corpo, de mesma massa e que aparente ser idêntico ao primeiro, mas cujo centro de massa seja excêntrico, terá um movimento diferente ao ser posto em um plano inclinado. Dependendo das condições iniciais e da inclinação da rampa, ele poderá ficar em repouso, oscilar em torno de sua posição de equilíbrio, descer com aceleração variável ou até, misteriosamente, saltar do plano.

Esse fato tem estreita relação com uma brincadeira conhecida como montanha-russa caipira. Nela, crianças se encaixam no interior de um pneu de trator para descer uma ladeira. Se apenas uma criança se coloca no pneu, o centro de massa do sistema pneu-criança passa a se situar em um ponto localizado entre os centros de massa das partes, ou seja, a uma certa distância do centro geométrico do pneu. A experiência ensina ao participante (talvez dolorosamente) que a melhor maneira de fazer a brincadeira é com a participação de

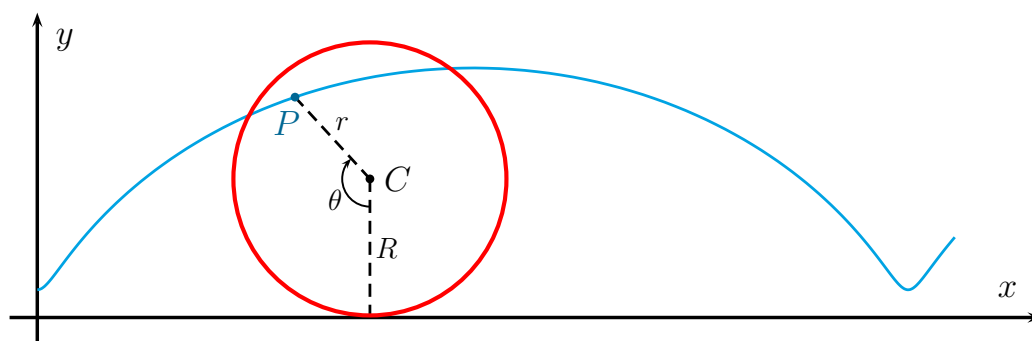


Figura 1.1: Disco que gira sem deslizar sobre o eixo Ox . Em azul está representada a trajetória de um ponto P , que representará, no nosso problema, a posição do centro de massa do disco.

uma outra criança ocupando o lado diametralmente oposto do pneu. Com isso, o centro de massa do sistema ficará novamente próximo ao centro geométrico do pneu cujo comportamento tornará a ser similar ao que teria sem seus ocupantes.

A compreensão do movimento do disco com centro de massa excêntrico envolve vários conceitos físicos. É necessário entender e utilizar as ideias de trajetória, centro de massa, referencial inercial, raio de curvatura, aceleração centrípeta, o comportamento das forças normal e de atrito, a dinâmica do corpo extenso, lançamentos oblíquos e as leis de Newton. Esse problema sozinho constitui, portanto, um rico laboratório para a exploração e o aprofundamento de diferentes tópicos.

As surpresas que a observação dos movimentos desse sistema guardam motivam a curiosidade de compreendê-lo. Essa curiosidade será o combustível para vencer os diversos desafios que traz esse problema. Para entender o comportamento desse sistema, lançaremos mão da observação empírica e de simulações computacionais em uma abordagem em sala de aula que favoreça o trabalho coletivo e a discussão entre os estudantes. Por se tratar de uma abordagem majoritariamente qualitativa, não haverá coleta de dados, de forma que não é necessário ser uma atividade de laboratório. As aulas foram pensadas para alunos que já tenham concluído os tópicos de leis de Newton, trabalho e energia e estática do corpo extenso, servindo de aplicação e revisão desses tópicos e aprofundando-os.

Traçaremos, a seguir, uma atividade com essas características, para ser utilizada em 4 aulas de 40 a 50 min, com os alunos separados em grupos.

1.2 Análise do sistema

Tomemos um disco oco de raio R e centro C . Afixa-se a ele uma massa adicional, de forma que seu centro de massa fique localizado a uma distância $r < R$ do seu centro, sua massa total passe a ser M e seu momento de inércia em relação a um eixo perpendicular ao disco e que passe pelo centro de massa seja I . O ângulo θ descreve a rotação do disco.

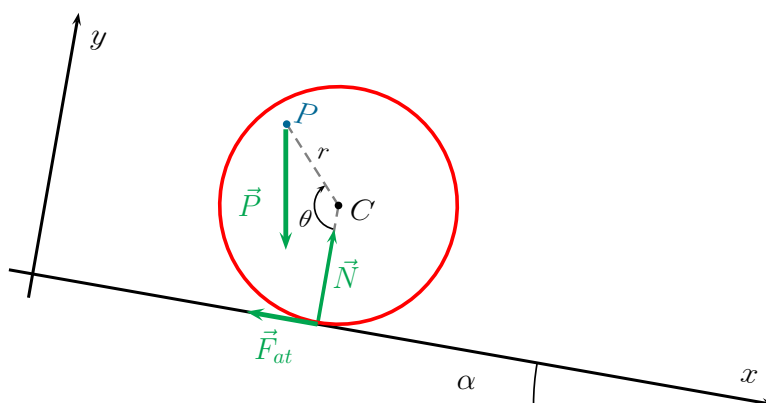


Figura 1.2: Representação do movimento do disco sobre plano inclinado de α com respeito à horizontal.

Realizamos agora a análise do movimento do disco a partir das forças, servindo-nos da segunda lei de Newton. As únicas forças que atuam no disco são: a força peso (\vec{P}), a força normal (\vec{N}) e a força de atrito (\vec{f}_{at}).

1.2.1 Estática

Primeiramente trataremos do caso em que o disco fica em repouso sobre a rampa. A condição de equilíbrio para um corpo extenso requer que $\sum \vec{F} = \vec{0}$ e $\sum \vec{\tau} = \vec{0}$ simultaneamente. A condição sobre o torque externo é satisfeita se a direção da força peso \vec{P} passar pelo ponto de contato entre o disco e o plano (figura 1.3). Com efeito, se calcularmos os torques em relação ao ponto de contato, é imediato ver que \vec{N} e \vec{f}_{at} produzem torques nulos.

Nesse caso, da lei dos senos:

$$\sin(\alpha + \theta_e) = \frac{R}{r} \sin \alpha. \quad (1.1)$$

Só há solução para a equação 1.1 se $r \geq R \sin \alpha$, de forma que podemos considerar dois casos:

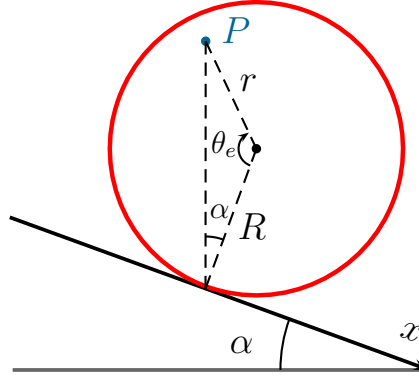


Figura 1.3: Condição de equilíbrio.

- Se $r = R \sin \alpha$, então a única posição de equilíbrio $\theta_e = \pi/2 - \alpha$ corresponde a um equilíbrio indiferente;
- Se $r > R \sin \alpha$, então há duas posições de equilíbrio dadas por

$$\theta_{e-} = \arcsen\left(\frac{R}{r} \sin \alpha\right) - \alpha \quad \text{e} \quad (1.2)$$

$$\theta_{e+} = \pi - \arcsen\left(\frac{R}{r} \sin \alpha\right) - \alpha, \quad (1.3)$$

de tal forma que θ_- corresponde a um equilíbrio estável e θ_+ , a um equilíbrio instável.

1.2.2 Dinâmica

Primeiramente, escrevemos os torques em relação ao CM, localizado em P:

$$-Nr \sin \theta + f_{at}(R - r \cos \theta) = I\ddot{\theta}. \quad (1.4)$$

E as forças:

$$\begin{cases} Mg \sin \alpha - f_{at} & = M\ddot{x} = R\ddot{\theta} - r\ddot{\theta} \cos \theta + r\dot{\theta}^2 \sin \theta \\ N - Mg \cos \alpha & = M\ddot{y} = M(r\ddot{\theta} \sin \theta + r\dot{\theta}^2 \cos \theta). \end{cases} \quad (1.5)$$

Nota-se que o conhecimento de $\theta(t)$ determina todas as demais variáveis do movimento (N , f_{at} , x , y). Uma vez que o sistema possui 1 grau de liberdade, é possível obter a equação de movimento

$$Rg \sin \alpha - rg \sin(\theta + \alpha) - Rr\dot{\theta}^2 \sin \theta - \frac{I}{M}\ddot{\theta} - M\ddot{\theta}(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta) = 0. \quad (1.6)$$

Esclarecemos que a obtenção da equação 1.6 não é um dos objetivos desta atividade. No entanto, o professor que desejar realizar uma simulação computacional da montanha-russa caipira deverá se basear na solução numérica dessa equação.

1.3 Material experimental

A montagem experimental do disco com centro de massa excêntrico requer apenas materiais fáceis de obter, admitindo ainda diversas possibilidades. O professor que desejar executar esse experimento poderá fazê-lo usando um **corpo de formato cilíndrico** e uma pequena **massa adicional** para deslocar o centro de massa. Uma **rampa** completa o material necessário; para que ocorra o salto do disco, é desejável ter uma rampa de pelo menos 1,5m de comprimento.

Alguns cuidados devem ser tomados:

- a superfície do disco deve ser de material aderente, garantindo a condição de não deslizamento;
- deve ser preservada a simetria da distribuição de massa na direção do eixo de simetria do disco¹ ;
- o disco deve ser montado de tal forma que se possa marcar a posição do centro de massa e a direção de \overline{CP} para adequada visualização dos movimentos.
- O centro de massa do disco deve ser bastante excêntrico para que se observem todos os possíveis movimentos. Tomando por referência um ângulo máximo de 20° para a inclinação da rampa, a Eq. 1.1 pede que $r > 0,342 R$, o que só é conseguido com uma massa adicional da ordem da metade da massa do disco.

É fundamental que se disponha do experimento para a visualização do movimento e para fazer testes e estimativas. Como o movimento desse sistema em geral não é o que se espera intuitivamente, a surpresa que ocorre ao se demonstrar um desses movimentos da partícula serve como excelente ponto de partida para a discussão das soluções e para motivar a busca das respostas através do estímulo à curiosidade. Acreditamos que essa surpresa deva ser explorada pelo professor na hora de apresentar os problemas. Isso

¹Na prática, isso significa que, se usarmos uma lata de alumínio, por exemplo, deve-se usar apenas a superfície lateral, removendo o fundo da lata.

pode se refletir na montagem do experimento, escondendo-se a massa adicional sobre o disco, de maneira a excentricidade do centro de massa não fique aparente.

A inclinação ideal da rampa para que se observem os diferentes movimentos pode ser obtida por tentativa e erro, de acordo com as características dos materiais disponíveis.

Convém conhecer os valores de M , R , r e I . Os dois primeiros são facilmente mensuráveis com régua e balança; os dois outros devem ser calculados.

Em geral, é difícil medir o momento de inércia diretamente, de forma que convém obtê-lo em função do raio do disco (R) e de sua massa M . Façamos isso primeiramente para o disco. Conhecidas a sua massa m_D e o seu momento de inércia em relação ao eixo de simetria $I_C = \int r^2 dm$, pode-se obter o momento de inércia em relação a um eixo paralelo que passa pelo ponto P — que eventualmente será ocupado pelo centro de massa do sistema — utilizando o teorema de Steiner:

$$I_P = I_C + m_D r^2. \quad (1.7)$$

O valor de r , que descreve a distância do centro de massa ao eixo de simetria do disco, será determinado pela anexação da massa adicional m_A , cujas dimensões são pequenas se comparadas às do disco, colocada a uma distância d do centro do disco:

$$r = \frac{m_A d}{m_A + m_D}. \quad (1.8)$$

Essa massa contribuirá também com um momento de inércia adicional relativo ao eixo que passa pelo centro de massa $I_A = m_A (d - r)^2$. Finalmente, somam-se os momentos de inércia devido a cada corpo para obter o momento de inércia total

$$I = I_{P(\text{disco})} + I_A = I_C + \frac{m_D m_A d^2}{(m_A + m_D)}. \quad (1.9)$$

No nosso caso, utilizamos um corpo de borracha no formato de “pneu” vendido em *pet shops* (figura 1.4). Modelamos o pneu como uma superfície cilíndrica de raio r^2 e altura h , com duas “tampas” na forma de coroas circulares de raio interno r_1 e raio externo r_2 . Atribuímos a ele uma densidade superficial σ , suposta uniforme, dada por

$$\sigma = \frac{m_D}{A} = \frac{m_D/2\pi}{(r_2^2 - r_1^2) + r_2 h}. \quad (1.10)$$

O seu momento de inércia em relação ao eixo de simetria, I_C , será dado então



Figura 1.4: Pneu de borracha com uma massa adicional presa à sua borda interior. Do outro lado, colocamos uma superfície para esconder a massa adicional, que usamos também para marcar o centro de massa e o diâmetro que passa por ele.

por:

$$\begin{aligned}
 I_C &= I_{bases} + I_{lateral} \\
 &= 2\sigma \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r dr + \sigma(2\pi r_2 h)r_2^2 \\
 &= \pi\sigma[r_2^4 - r_1^4 + 2hr_2^3] \\
 &= \frac{m_D}{2} \frac{r_2^4 - r_1^4 + 2hr_2^3}{(r_2^2 - r_1^2 + r_2 h)}. \tag{1.11}
 \end{aligned}$$

Com o nosso material experimental, obtivemos os seguintes valores, que usamos na obtenção das soluções numéricas e que podem servir como referência para um experimento com dimensões similares: $M = 0,15$ kg, $R = 0,10$ m, $I = 0,002$ kgm², $r = 0,06$ m. Realizamos a integração numérica da equação de movimento (Eq. 1.6) com esses valores, de forma que a eles correspondem todos os demais dados numéricos que serão apresentados.

1.4 Sequência didática

A solução completa deste problema é bastante complicada. Certamente não nos interessará determinar essa solução integralmente, tal como a apresentamos aqui, no Ensino Médio. Isso não impossibilita, no entanto, a tentativa de obter alguns aspectos dessa solução, em resultados quantitativos e qualitativos.

Com esse objetivo, nossa abordagem didática do problema se fundamentará em perguntas sobre pontos particulares da trajetória sobre determinadas condições iniciais. Começaremos dos casos mais simples, de forma que ocorra uma evolução gradual da compreensão do problema, para finalmente chegar ao caso mais sofisticado em que o disco desce a rampa e, eventualmente, salta dela.

Com isso em mente, adotaremos como estratégia geral:

- (i) observar empiricamente o movimento do disco em uma determinada configuração,
- (ii) tentar responder a um conjunto de perguntas sobre esse movimento,
- (iii) recorrer à solução numérica para verificar as respostas anteriores, bem como extrair novos dados sobre o movimento.

O primeiro caso a ser estudado é o do disco em repouso sobre o plano inclinado. Depois, analisaremos casos do disco em movimento sobre um plano horizontal. Feito isso, enfim nos debruçaremos sobre o caso do disco em movimento sobre o plano inclinado.

1.4.1 Aula 1 — Disco sobre a rampa: caso estático

Nesta aula, serão discutidos:

- Momento de inércia;
- Estática e dinâmica do corpo extenso;
- Equilíbrio estável e instável;

O professor pode iniciar a análise do problema fazendo demonstrações com uma rampa longa. Ele coloca corpos diferentes, um de cada vez, para rolar sem deslizar sobre ela, tais como um cilindro oco, uma bolinha de tênis e uma bolinha de pingue-pongue.

Durante essa demonstração, são lembradas algumas propriedades do movimento, em especial que ele é uniformemente acelerado. Valerá a pena destacar que a força de atrito, nesse caso, não realiza trabalho, de forma que não provoca dissipação de energia.

Feito isso, o professor pode colocar esses corpos para rolar simultaneamente, observando que os tempos de queda serão distintos. Pede-se aos alunos para explicar esse acontecimento. Nesse ponto, como a razão se deve às diferenças entre os momentos de inércia (que não surgem usualmente no Ensino Médio), provavelmente seus conhecimentos prévios não serão suficientes para explicar esse acontecimento. Não obstante, uma discussão em

torno dessas respostas serve para refutar algumas das hipóteses que venham a ser apresentadas por eles, tais como utilizar as diferenças de massas e dos coeficientes de atrito para explicar os diferentes tempos de queda.

O professor mostrará, então, que a resposta está na geometria da distribuição de massa dos corpos. Pode-se explorar o exemplo de um pêndulo físico, a partir da oscilação de uma régua com furos. Colocando-se a régua para oscilar em torno de pontos diferentes ao longo do seu comprimento, os períodos serão diferentes, devido às diferentes distribuições de massa em cada caso. O mesmo ocorre nos discos com diferentes geometrias ao rolar sobre o plano.

Nesse momento, o professor coloca sobre o plano o seu disco com o centro de massa (inconspicuamente) excêntrico, como se fizesse simplesmente mais um exemplo de rolamento. Vale a pena realizar uma marcação prévia no disco de forma que se saiba como o dispor próximo à posição de equilíbrio estável. A quebra da expectativa dos alunos ao observar o disco em repouso será o ponto de partida para que o professor os motive a entender por que isso acontece.

O professor pode desenhar o corpo no quadro, como na figura 1.2, destacando as forças que atuam, mas sem representar o peso. Na condição de equilíbrio, a força resultante e o torque resultante deverão ser nulos. Como a posição de aplicação da força normal e da força de atrito é obrigatoriamente no ponto de contato, resta determinar o ponto de aplicação da força peso, o *centro de massa*, que denotaremos por P . Ficará claro que deveremos sempre atentar para a posição desse ponto, que terá mais importância que a posição do centro geométrico do disco (que, intuitivamente, tendemos a observar com mais atenção) na determinação do movimento do sistema.

Pede-se aos alunos para obter as relações entre α , R e r na condição de equilíbrio. Esse problema poderá ser resolvido exatamente, confirme demonstrado na seção 1.2.1.

Obtida a equação 1.1, as medidas do raio do disco e do ângulo entre \overline{PC} e a normal no ponto de equilíbrio determinarão, de maneira simples, o valor de r . Esse resultado pode ser guardado para aulas posteriores.

Finalmente, o professor poderá mostrar que há 2 posições de equilíbrio². Posicionando o disco adequadamente, verifica-se que comportamento o disco terá em cada caso, quando perturbado. Dessa forma, poderá mostrar qualitativamente as condições de equilíbrio estável e instável, diferenciando-os como situações em que o corpo, ao ser perturbado (*i*) sofre uma força resultante no sentido de trazê-lo de volta à posição inicial e (*ii*) sofre uma força

²Por hipótese, o sistema será construído de tal forma a admitir essa condição, com $r > R \sin \alpha$.

resultante no sentido de se afastar da posição inicial.

A observação dos movimentos que o disco terá em cada caso deve ser feita repetidas vezes. A partir da posição de equilíbrio estável, o disco oscilará; já na posição de equilíbrio instável, se perturbado no sentido de descida do plano, surgirá, aqui, uma nova surpresa: em um determinado instante do seu movimento, o disco saltará do plano. A discussão sobre os movimentos a partir das diferentes condições de equilíbrio motivará os dois casos seguintes.

1.4.2 Aula 2 — Disco oscilando sobre plano horizontal

No fim da aula anterior, verificaram-se os movimentos a partir das diferentes posições de equilíbrio. Ficou claro também que existe um ponto de interesse, que é o centro de massa, que convém observar com especial cuidado. Nesta aula, vamos entender o movimento de oscilação do disco em torno do ângulo de equilíbrio estável; por simplicidade, faremos isso sobre um plano horizontal.

Considere, primeiramente, que o disco se mova sobre um plano horizontal (i.e., $\alpha = 0$). Ao se girar o disco até uma posição na qual $\theta = \theta_0$, com $0 < \theta < \pi$, mas deixando-o inicialmente em repouso, ele passará a bascular em torno da posição de equilíbrio estável em $\theta = 0$. Na figura 1.5 mostramos esse caso.

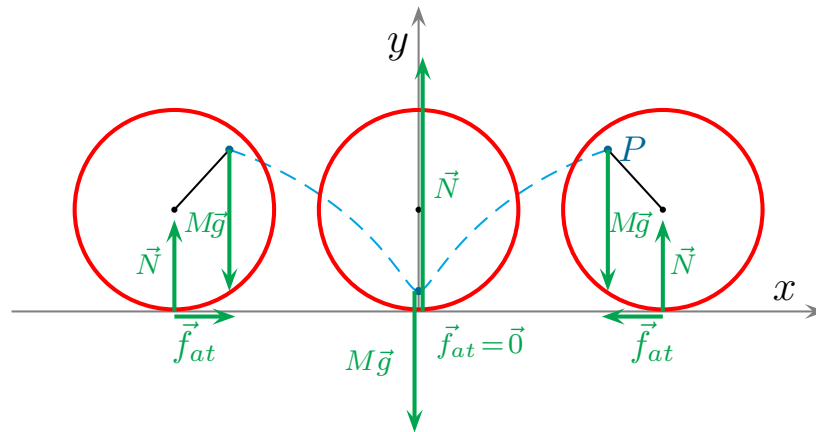


Figura 1.5: Movimento do disco ao bascular em torno da posição de equilíbrio em $x_C = x = 0$. Os comprimentos dos vetores não estão em proporção com seus módulos, mas estão ordenados da mesma forma que os módulos.

No instante $t = 0$, o disco encontra-se na posição mais à direita da figura.

Observa-se então o movimento subsequente do disco: verifica-se que ele gira no sentido anti-horário. Por conservação de energia, o centro de massa P desce e atinge o ponto mais baixo da trajetória com velocidade máxima. A partir daí, a trajetória de P terá um ponto de retorno ao atingir a mesma altura inicial.

Façamos as seguintes perguntas acerca desse movimento para orientar nossa observação das suas características:

- Como é a trajetória do ponto P ?
- Como se comporta a força normal nesse movimento?
- Como se comporta a força de atrito nesse movimento?

Repete-se várias vezes o experimento, pedindo para os alunos observarem com atenção o ponto P . A partir das observações, eles devem construir hipóteses para responder às perguntas acima. O professor pode sugerir que a decomposição do movimento nos eixos $\mathcal{O}x$ e $\mathcal{O}y$ ajuda a análise desses movimentos, de forma que deve-se tentar observar, separadamente, as projeções ortogonais da posição de P .

Deve-se pedir aos estudantes que apresentem as hipóteses formuladas para a turma.

No eixo horizontal, a única força é a \vec{f}_{at} , de forma que ela é responsável por qualquer aceleração horizontal de P . Dessa forma, a oscilação de P mostra que a força de atrito muda de sentido, apontando sempre para o eixo de simetria da trajetória³.

No eixo vertical, há as forças \vec{N} e \vec{P} , que são, portanto, as responsáveis pela aceleração vertical. A força $\vec{P} = M\vec{g}$, porém, é constante, de forma que a variação na componente vertical da resultante indicada pela oscilação de P nesse eixo deve ser associada a uma força normal variável.

Esses dois resultados podem surpreender os alunos, que estão mais acostumados a tratar problemas com uma força normal de intensidade constante e nos quais a força de atrito se opõe à velocidade.

Para entender melhor o comportamento de \vec{N} , podem-se tomar o ponto de partida e o ponto médio da trajetória. Pede-se aos alunos para determinar as forças no ponto de partida. Como o ponto P descera a partir desse ponto, tem-se que $Mg > N$. Por outro lado, o ponto médio da trajetória se assemelha ao fundo de uma pista; a partir dali, o ponto P deverá subir.

³Outra maneira de observar isso é considerar o caso em que não houvesse força de atrito. Dessa forma, o ponto P oscilaria ao longo da direção vertical, de forma a promover um movimento do ponto de contato com um plano para a direita. Como o atrito é contrário à tendência de deslizamento, ele deverá, nesse ponto, apontar para a esquerda.

Fica caracterizado, portanto, que a força normal terá “picos” quando P se aproxima do solo, e será menor quando P está distante do solo.

Finalmente, confrontamos a discussão com resultados numéricos mostrados na figura 1.6. Com isso, a interpretação do problema fica completa e poderá ser feita mesmo sem que todas as demais respostas tenham sido anteriormente obtidas.

Dispondo dos gráficos adequados, deve-se destacar, além das relações já mencionadas, a observação mais precisa da trajetória. Apesar de ela ter uma forma complicada, deve-se mostrar, para os alunos, que sempre é possível imaginar o círculo que melhor se aproxime da trajetória em um dado ponto, de maneira a aproximar o problema como um movimento circular naquela vizinhança.

No ponto mais baixo da trajetória, pode-se observar que esse círculo terá um raio mínimo e estará acima da trajetória, enquanto no ponto mais alto, terá um raio máximo e estará abaixo. Deve-se resumir a discussão anterior destacando que a intensidade da normal será maior que a do peso quando a concavidade da trajetória for para cima, enquanto será pequena quando a concavidade for para baixo. Isso está em conformidade com o que é esperado da resultante centrípeta.

1.4.3 Aula 3 — Passeio no plano horizontal

Analisaremos, agora, o movimento no plano, mas de forma que o disco não oscile, mas tenha energia cinética para se mover sempre em um mesmo sentido. Todas as características das forças ao longo do movimento serão similares ao caso anterior.

Deve-se, primeiramente, refletir com os alunos que condições deve se dar para que esse tipo de movimento ocorra. Pode-se propor, à semelhança do que foi posto nas aulas anteriores, que, ao se abandonar o disco a partir de uma posição qualquer, ele terá energia para, no máximo, o ponto P retornar à mesma altura. Logo, tomando-se como referência a posição de equilíbrio *instável* verificada na primeira aula⁴, deve-se dar uma energia adicional ao disco para que o ponto P seja capaz de atravessar esse ponto de altura máxima. Pode-se deixar os alunos manipularem o experimento para entender essas condições.

Faz-se uma demonstração do movimento de rolamento sob essas condições e procede-se, então, a declarar algumas perguntas que podem ser respondidas. Podemos nos centrar, aqui, a analisar questões além das que respondemos para o caso da oscilação.

⁴A rigor, a solução com $\theta(0) = \pi$ e $\dot{\theta}(0) = 0$ leva a tempos de percurso infinitos.

- Como é a trajetória do ponto P ?
- Como é a evolução temporal de θ para esse movimento?
- Como é a evolução temporal de x_P para esse movimento?

Pedimos aos alunos que esbocem a trajetória de P . É importante que eles sejam capazes de identificar o que se repete do movimento de oscilação anteriormente observado; neste caso, aquilo que mais aproxima os dois casos é a *trajetória*, que é uma propriedade geométrica do movimento, não dependendo de valores atribuídos as condições iniciais (desde que o disco não salte). Dessa forma, destacaremos que a trajetória, no movimento de oscilação, é limitada; enquanto no passeio, é infinita. Pediremos a eles, portanto, para estender a figura fornecida na aula anterior para esse novo movimento. Devemos ter o cuidado para que notem que a trajetória tem concavidade para baixo quando P está próximo do topo e para cima quando P está próximo à base da trajetória.

Primeiramente, sugerimos aos alunos pensar no caso em que o disco *não* é excêntrico, esboçando o gráfico das coordenadas $\theta(t)$, $x_P(t)$ e $y_P(t)$. Dado que, nessas condições, o movimento é uniforme, todos os gráficos são linhas retas, sendo $y_P(t)$ uma função constante, enquanto $x_P(t)$ e $\theta(t)$ são monotônicas e crescentes. A partir desses gráficos e conhecidos também aqueles do movimento de oscilação (figura 1.6), pode-se construir a evolução das coordenadas de P para o disco com centro de massa excêntrico. Deve-se pedir para eles apontarem, também, que grandezas têm comportamento periódico, nesse caso.

Observando a trajetória, sabemos que x_P deverá ser monotônica, enquanto y_P deve ser periódica. Da mesma forma, para que não haja ponto de retorno, $\theta(t)$ deve ser monotônica. Uma vez que o sistema é conservativo, para cada período de y_P , os valores médios da velocidade angular ω e da velocidade linear v_P devem ser os mesmos.

Confrontamos as hipóteses com a solução numérica do problema, dada pelas figuras 1.7 e 1.8, feitas de forma que as velocidades iniciais fossem diferentes. Note que o comportamento de $\theta(t)$ e de $x(t)$ é, em média, linear, com ondulações periódicas devido às oscilações verticais desse movimento de P .

Observe o comportamento da força normal. Além dos picos que ocorrem periodicamente, percebemos que existem intervalos em que ela passa a ser menor que a força peso. Esse resultado será importante para entender o salto da bolinha.

1.4.4 Aula 4 — O disco saltante

Para completar a compreensão qualitativa desse sistema, resta entender o seu movimento mais curioso: o salto do disco sobre o plano. Para tanto, vamos nos perguntar quais são as condições para que isso ocorra. Apesar de essa pergunta ser difícil de responder exatamente, devido à grande quantidade de variáveis e de condições iniciais dos quais dependerá o instante do salto, vamos ao menos tentar dar os passos no sentido de identificar, da forma mais simples possível, a região do salto.

Os casos anteriormente analisados servirão de subsídio para a compreensão desta nova situação. Antes de tratar do movimento sobre a rampa, vamos analisar o salto sobre o plano horizontal. Nesse caso, o comportamento periódico de x_P , y_P , N e f_{at} , já exibido para o passeio no plano, significa que, se o salto ocorrer, será antes da primeira volta completa do disco.

Balizaremos nossa análise pelas seguintes perguntas:

- Sob que condições o disco será capaz de saltar?
- Em que trecho da trajetória de P deve ocorrer o salto?

Devemos discutir com os alunos como identificar, a partir dos gráficos obtidos pelo cálculo da solução, o instante do salto.⁵ A variável que vai nos permitir identificar que o disco saltou é a intensidade da força normal: no instante em que ela for *zero*, o disco perderá o contato com o plano.

Havendo perda de contato, consideraremos que a força de atrito também é nula, de forma que apenas a força peso atua sobre o disco. Podemos perguntar: o que isso indica sobre a trajetória do ponto P na região do salto?

A bolinha só poderá saltar em um ponto onde a força resultante seja o peso e, portanto, aponte para baixo. Uma vez que essa resultante terá uma componente centrípeta, o salto seguramente ocorrerá em um trecho onde a curvatura da trajetória estiver voltada para baixo. Isso delimita um intervalo de valores de θ onde o salto pode ocorrer.

Deve-se permitir aos alunos manipular o disco experimentalmente, para que se deem conta de o salto só ocorrerá se fornecida uma velocidade inicial adequada. Realizando sucessivos movimentos desse tipo com energias cada

⁵Como a equação de movimento tem por hipótese a trajetória em forma de trocoide do centro de massa do disco, não basta integrá-la e observar a evolução das coordenadas x_P e y_P . A solução numérica da equação admite, inclusive, uma força normal negativa. Isso poderia ser modelado por uma barra paralela ao plano e que toca o disco em um ponto diametralmente oposto àquele onde o disco toca o plano; a força normal seria, nesse caso, interpretada como a resultante das normais exercida pelo plano e exercida pela barra.

vez maiores, argumentamos que, apenas a partir de um determinado valor de energia observaremos um movimento que produzirá o salto do disco.

Analisando os casos do passeio no plano, representados nas figuras 1.7 e 1.8, observamos que a normal tem, além dos picos na região do ponto mais baixo da trajetória, pontos de mínimo. Comparando as figuras, podemos ver também que quanto maior a energia do disco, menor será o valor mínimo atingido pela normal. Esses dados confirmam o que inferimos das observações: a partir de um determinado valor de energia do disco, a normal poderá atingir o valor *zero*.

Dada uma energia inicial e uma posição descrita pelo ângulo θ , fica determinada a força normal. Portanto, é possível construir o gráfico de $N(\theta)$, o que fazemos na figura 1.9 para diferentes energias, sintetizando o que discutimos anteriormente.

Finalmente, vamos estender nossa análise para o movimento sobre o plano. Podemos entender que o plano inclinado terá papel de aumentar gradualmente a energia cinética (média, para cada rotação) do disco. Com isso, colocar o disco sobre o plano é análogo a observar sucessivos lançamentos que partiram com energias crescentes. Uma dessas soluções está representada em 1.10.

Percebemos que, desta vez, o movimento é acelerado, o que aparece nos gráficos de x_P e $\theta(t)$. Em média, o comportamento dessas grandezas é o esperado para um movimento uniformemente acelerado, possuindo formas aproximadamente parabólicas. Conforme o disco acelera, os tempos para cada revolução passam a ficar menores, como revela o gráfico de y_P . Uma vez que os padrões de crescimento e decrescimento da normal e de força de atrito estão correlacionados com y_P , também aumenta a frequência dos picos da normal. Como exibido na figura 1.10, em um determinado instante, a normal será nula e o disco salta.

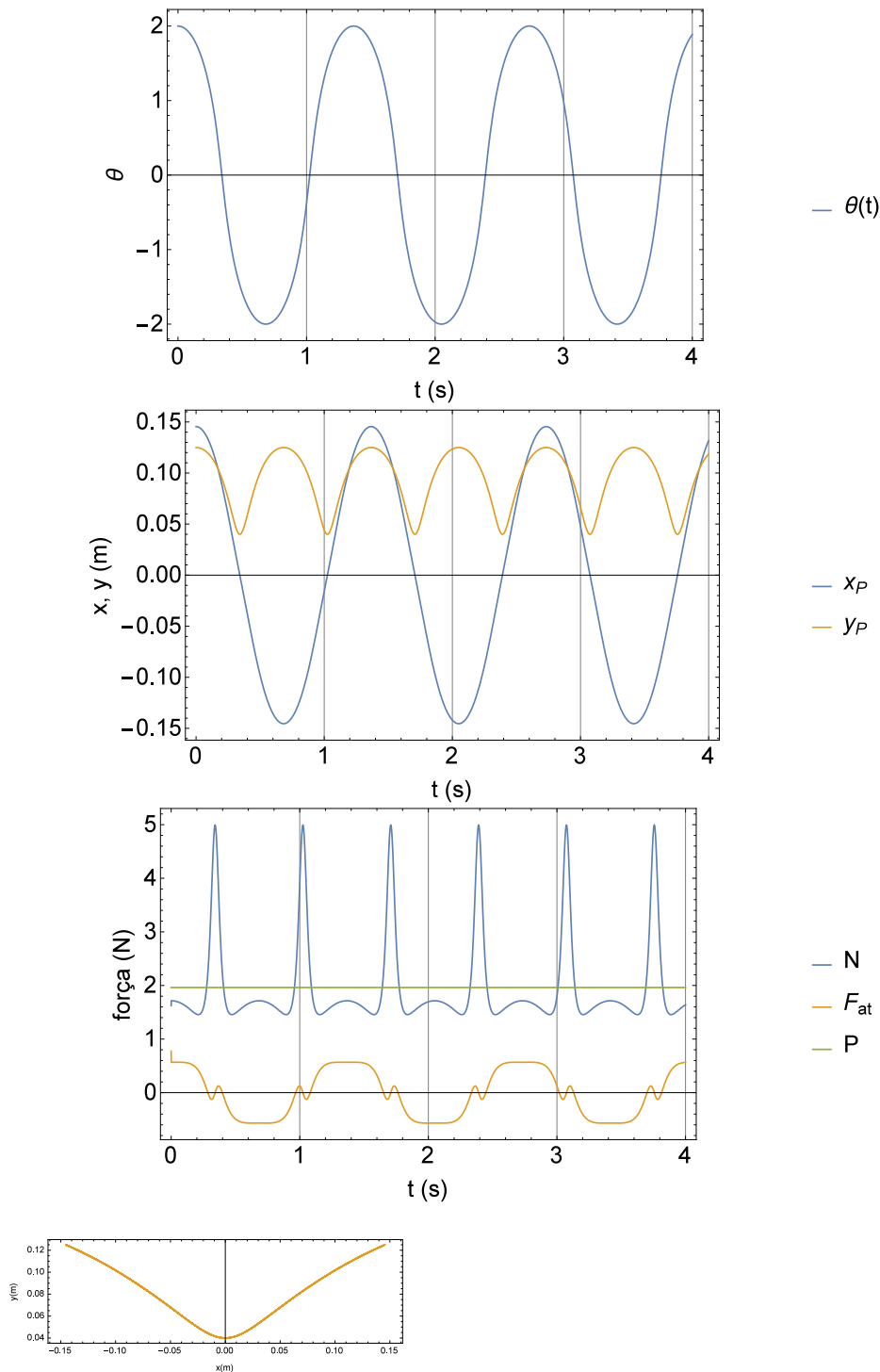


Figura 1.6: Gráficos das coordenadas e das forças para o disco oscilante. O último gráfico representa a trajetória.

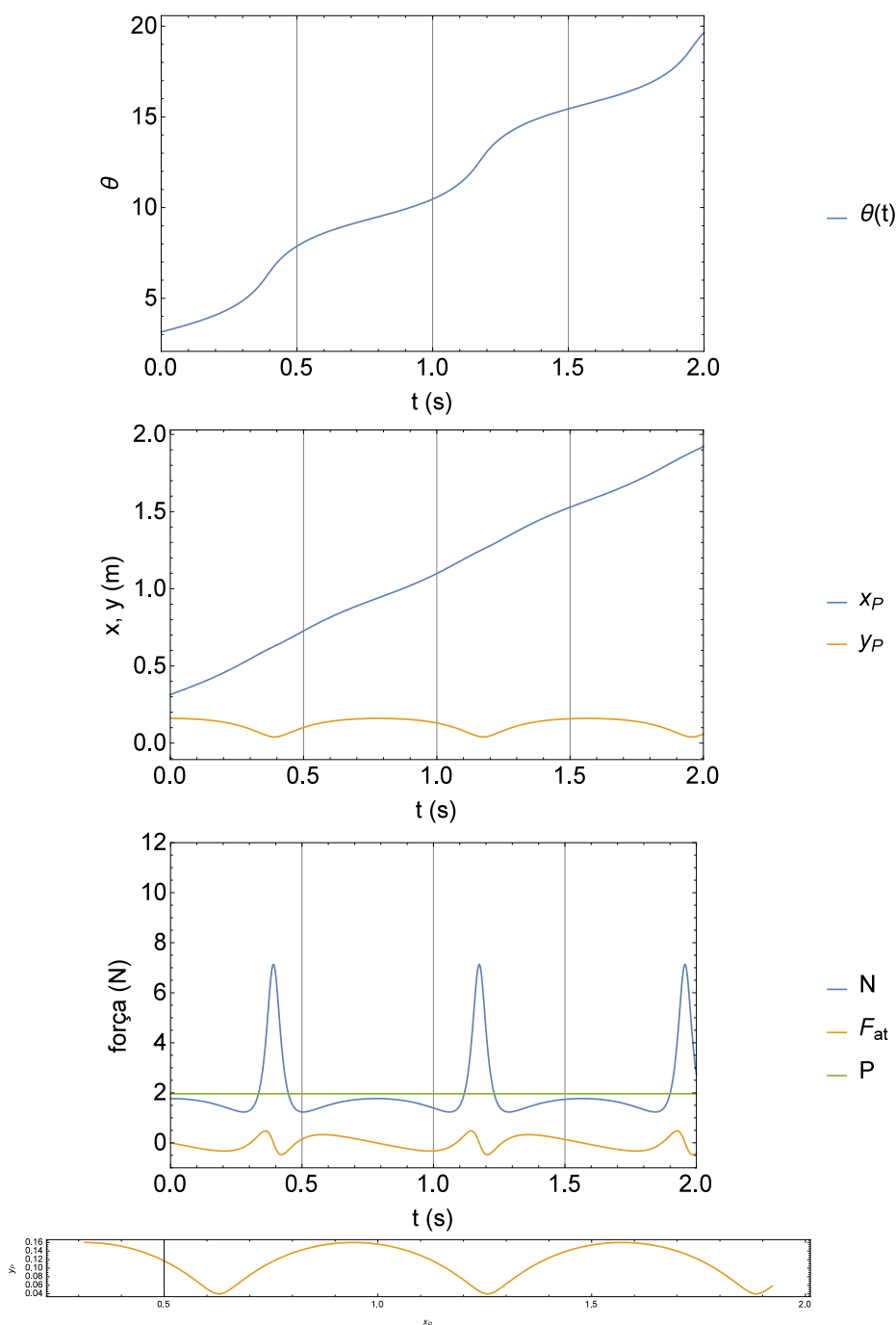


Figura 1.7: Gráficos das coordenadas e das forças para o disco, para o caso do passeio no plano. O último gráfico representa a trajetória.

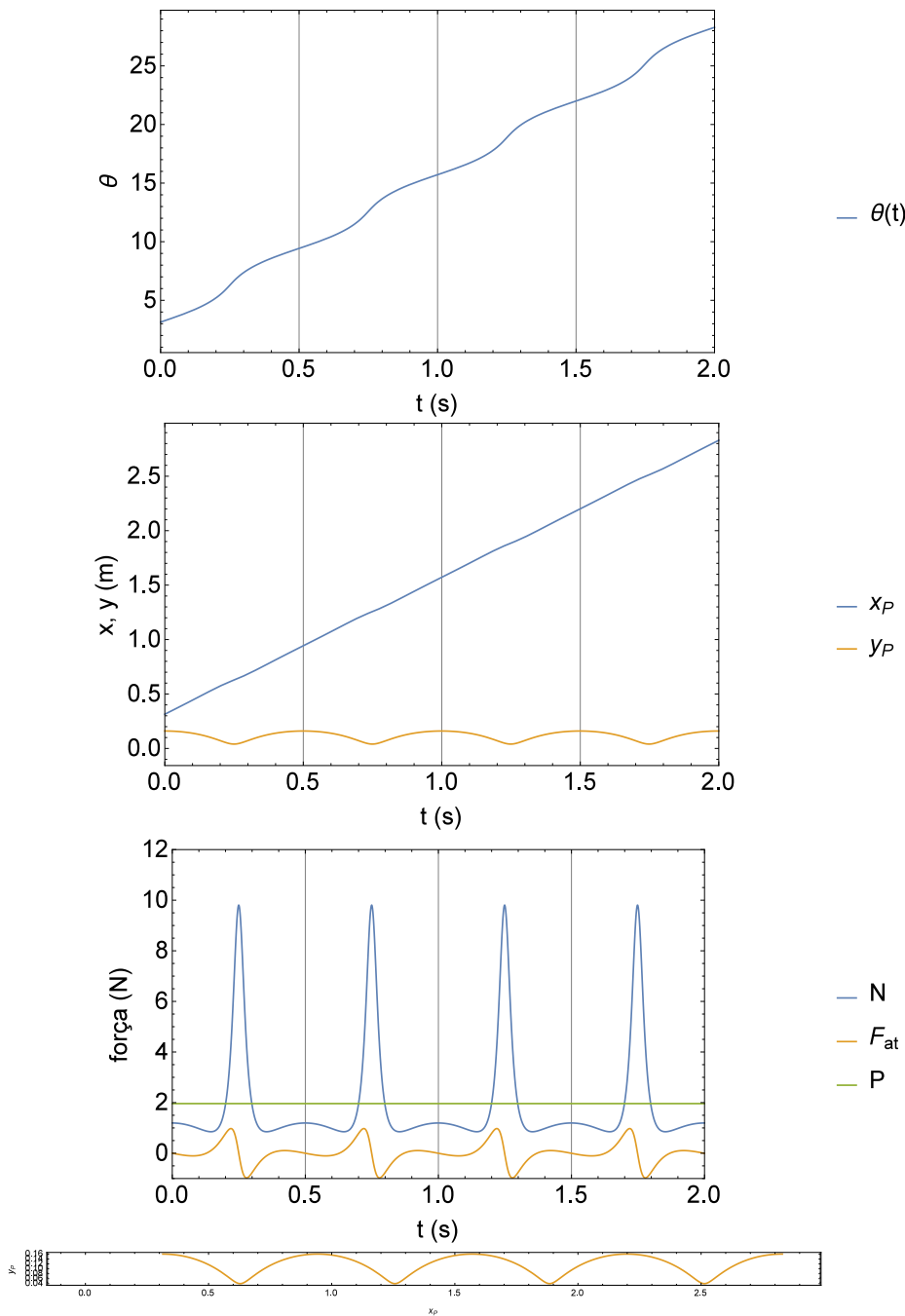


Figura 1.8: Gráficos das coordenadas e das forças para o disco, para o caso do passeio no plano, com uma energia maior do que na figura 1.7. O último gráfico representa a trajetória.

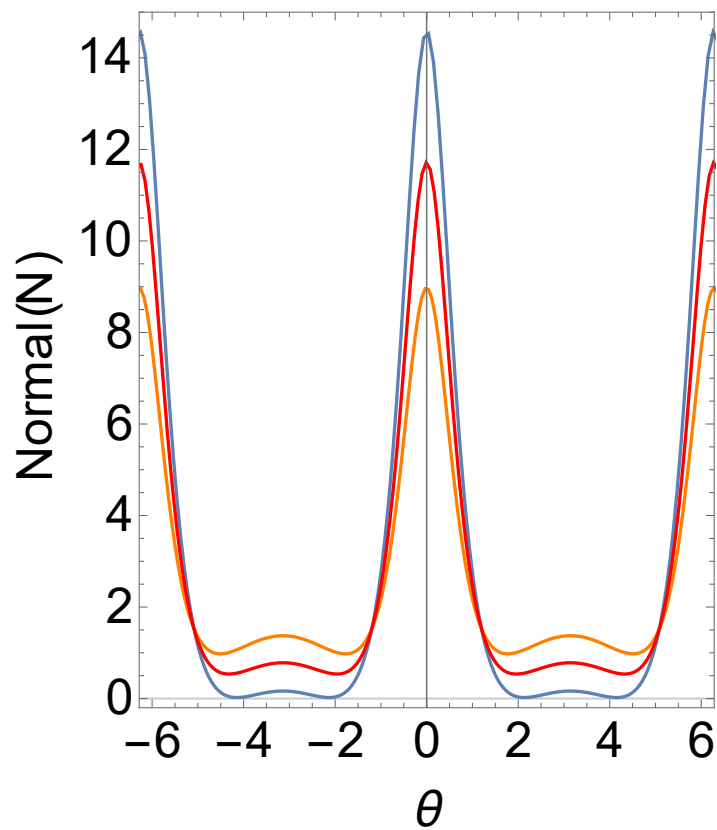


Figura 1.9: Gráficos de N como função de θ para o disco sobre o plano horizontal, para diferentes energias.

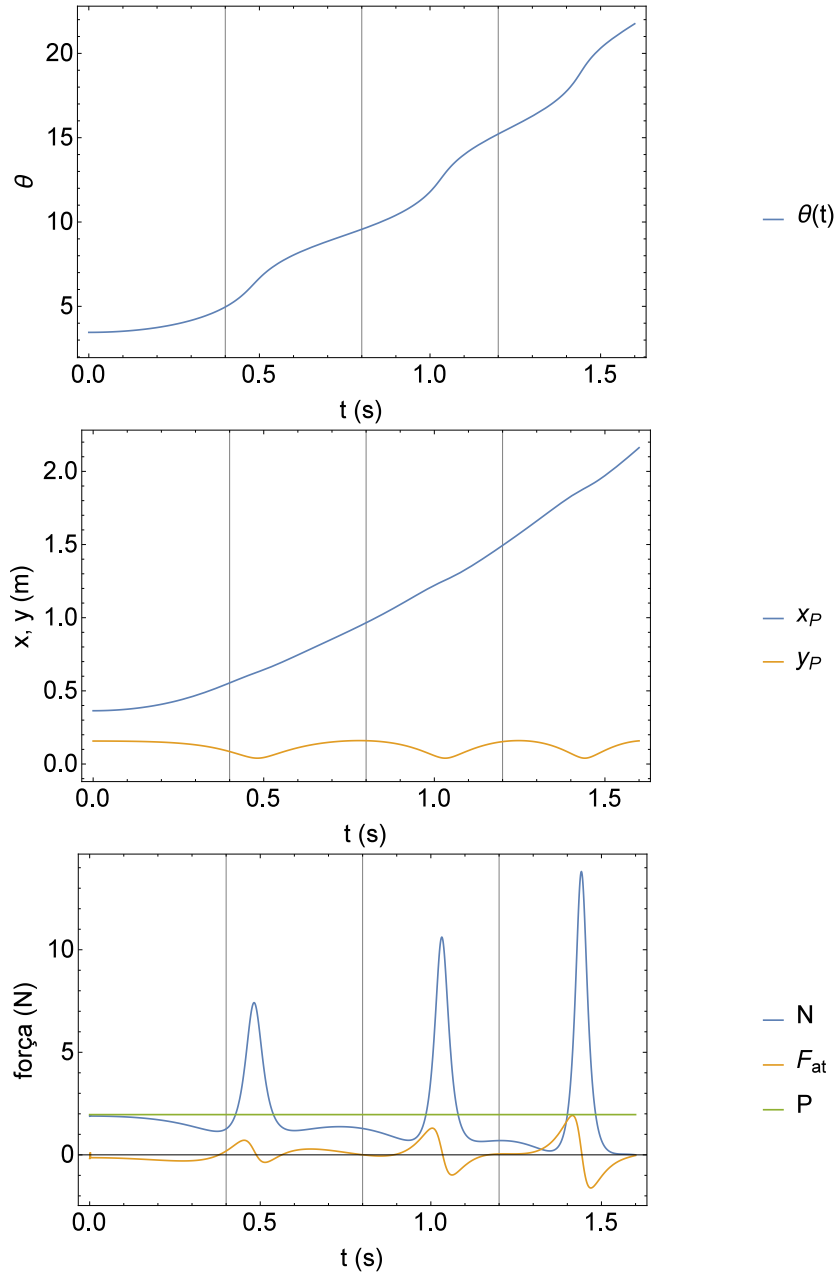


Figura 1.10: Gráficos das coordenadas e das forças para o disco sobre plano inclinado, com inclinação de 10° .