

Lançamentos oblíquos e parábola de  
segurança: uma proposta de atividade em 3  
aulas

Pedro Terra      Carlos Farina      Reinaldo de Melo e Souza



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
Instituto de Física  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física  
Mestrado Profissional em Ensino de Física

Material instrucional associado à dissertação de mestrado de Pedro de Paula Terra, intitulada *Alguns problemas instigantes de mecânica: das tautócronas à montanha-russa caipira*, orientada por Carlos Farina e por Reinaldo de Melo e Souza, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro em dezembro de 2016.

Orientadores:  
Carlos Farina de Souza  
Reinaldo de Melo e Souza

Rio de Janeiro

# Sumário

<b>1</b>	<b>Atividade sobre lançamentos oblíquos</b>	<b>1</b>
1.1	Introdução . . . . .	1
1.2	Montagem experimental . . . . .	2
1.3	Sequência didática . . . . .	5
1.3.1	Aula 1 . . . . .	5
1.3.2	Segunda aula . . . . .	8
1.3.3	Terceira aula . . . . .	11
1.4	Questionário sobre lançamentos . . . . .	15
1.4.1	Questionário — atividade sobre lançamentos . . . . .	16
1.4.2	Lançamentos oblíquos . . . . .	16
1.4.3	Lançamentos oblíquos — parte 2 . . . . .	17
1.4.4	Lançamentos oblíquos — parte 3 . . . . .	20



# Capítulo 1

## Atividade sobre lançamentos oblíquos

### 1.1 Introdução

Os lançamentos oblíquos de projéteis fazem parte de um tópico bastante rico e amplamente abordado no Ensino Médio. Seu estudo surge usualmente como um dos poucos casos de movimento bidimensional e com dois graus de liberdade abordados nesse nível de ensino, uma vez desfeitas as amarras dos movimentos unidimensionais e retilíneos.

A análise desse sistema abrange diversas situações práticas, como o movimento da bala de um canhão, a trajetória da água de um chafariz, a queda de uma peça de um avião em movimento. Nesse quadro, pode-se estudar também a superfície de segurança, que delimitará a região na qual se está passível de atingir por um dado disparador capaz de girar e que imprima sempre velocidades de mesma intensidade (figura 1.1).

Muitas vezes esses tópicos são deixados de lado por conta de sua complexidade algébrica. Nós, porém, oferecemos aqui um caminho com a intenção oposta: acreditando que o desafio desse problema impulsiona a aprendizagem, propomos um conjunto de aulas fundamentadas na experimentação e no trabalho coletivo.

A seguir, descrevemos a nossa proposta de atividade experimental, que abrange desde o início dos lançamentos oblíquos até a parábola de segurança. Na seção 1.2, descrevemos os procedimentos para a montagem do experimento; na seção 1.3 apresentamos em detalhe um roteiro de três aulas para abordar o tema com esse material; finalmente, na seção 1.4 apresentamos um questionário para avaliar a aprendizagem dos alunos após a atividade.

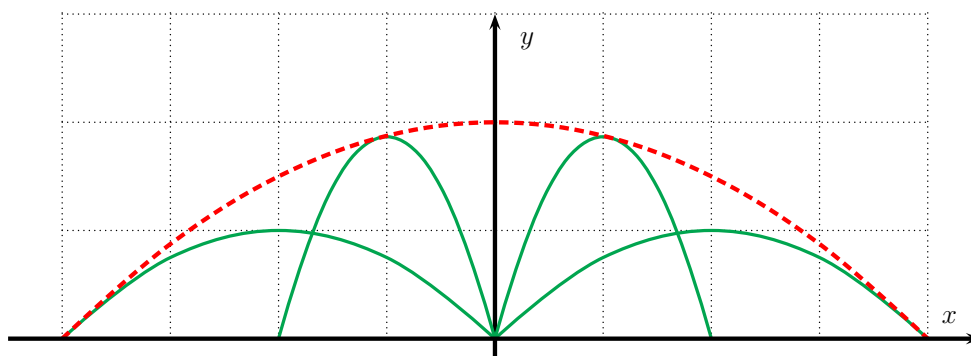


Figura 1.1: Em verde e em linhas contínuas estão representadas algumas trajetórias descritas por projéteis disparados com velocidades iniciais de mesmo módulo, mas ângulos de lançamento diferentes. Em vermelho, a parábola de segurança, que envolve todas as possíveis trajetórias.

## 1.2 Montagem experimental

Devido ao valor da aceleração da gravidade, um experimento de lançamento no ambiente de sala de aula ocorreria num intervalo de tempo muito curto e, portanto, seria de difícil análise. Considerando a altura máxima de lançamento igual ao pé-direito típico de uma sala, de 3,0 m, por exemplo, o tempo de voo de um projétil seria de aproximadamente 1,5 s.

A fim de facilitar a análise do movimento, fazemos com que o projétil se desloque sobre um plano inclinado de um ângulo fixo  $\alpha$  em relação à horizontal. Nesse sistema, supondo todos os atritos desprezíveis, o módulo da aceleração será  $a = g \sen \alpha$ . Escolhendo-se os eixos  $\mathcal{O}x$  e  $\mathcal{O}y$  contidos no plano inclinado, as equações das coordenadas

$$x_{\theta}(t) = v_0 \cos \theta t \quad \text{e} \quad (1.1)$$

$$y_{\theta}(t) = v_0 \sen \theta t - \frac{1}{2} g t^2, \quad (1.2)$$

ficam preservadas, com a mudança  $g \mapsto g \sen \alpha$ . Para isso, utilizamos como plano um **quadro branco**.

O componente mais importante do aparato experimental é um **lançador de mola**, construído de tal forma que seu eixo de rotação seja o mais próximo possível do ponto de partida e que a deformação máxima da mola possa ser controlada. Ele deve ser dotado de um mecanismo disparador, de forma que fatores externos não possam influenciar apreciavelmente a energia cinética inicial, preservando a consistência do experimento. Dadas essas característi-

cas, a posição inicial do movimento não variará apreciavelmente, de forma a tornar o material adequado ao estudo da curva de segurança.

O lançador é afixado à borda do quadro. Deve-se dispor, ainda, de bilhas para servir de projéteis. Devido às diferentes combinações entre massas dos projéteis e compressão da mola, a determinação das melhores condições iniciais ideais ocorre por tentativa e erro, de acordo com os materiais disponíveis. Na figura 1.2 apresentamos o lançador que utilizamos e que pode servir de referência para outras montagens.

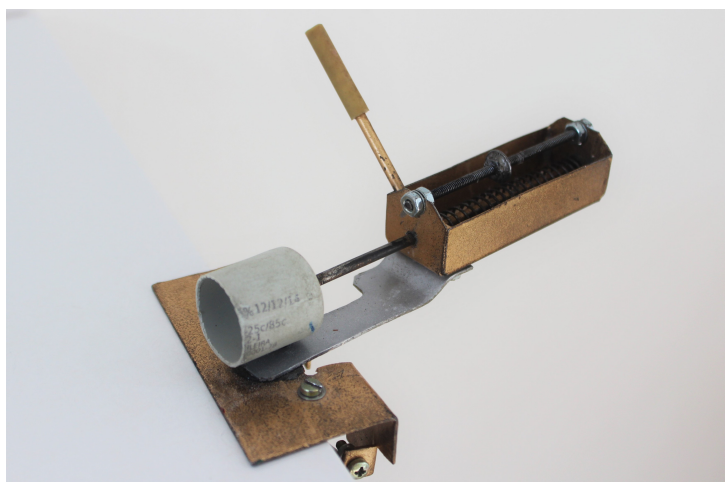


Figura 1.2: Nosso modelo de lançador de mola, construído por Hercílio Córdova. O parafuso da articulação fica abaixo do copo de onde o projétil será lançado. O lançador dispõe de um eixo disposto paralelamente à mola, com arruela que serve de trava ajustável para a alavanca/o gatilho do lançador.

Utilizamos um quadro branco plano de  $120 \text{ cm} \times 90 \text{ cm}$ , como na figura 1.3. Uma vez que o alcance máximo de lançamento é o dobro da altura máxima para um dado  $v_0$ , para que haja o melhor aproveitamento possível das dimensões do quadro, dispõe-se o seu lado maior como base inferior e afixa-se o lançador a um dos vértices dessa base. Pode-se inclinar o quadro utilizando-se apoios nos seus dois lados maiores, com o cuidado de que o quadro esteja bem fixo e que toda a sua superfície esteja bem apoiada. A fim de garantir o adequado posicionamento do quadro, afixamos um **nível de bolha** próximo à sua borda superior. Sugerimos um ângulo de inclinação do quadro de aproximadamente  $20^\circ$  para facilitar o manuseio do equipamento e a visualização do experimento.

Devem estar disponíveis, ainda, uma **trena** ou **fita métrica** de aproximadamente 100 cm, além de um **transferidor** comum para aferir ângulos

#### 4 CAPÍTULO 1. ATIVIDADE SOBRE LANÇAMENTOS OBLÍQUOS

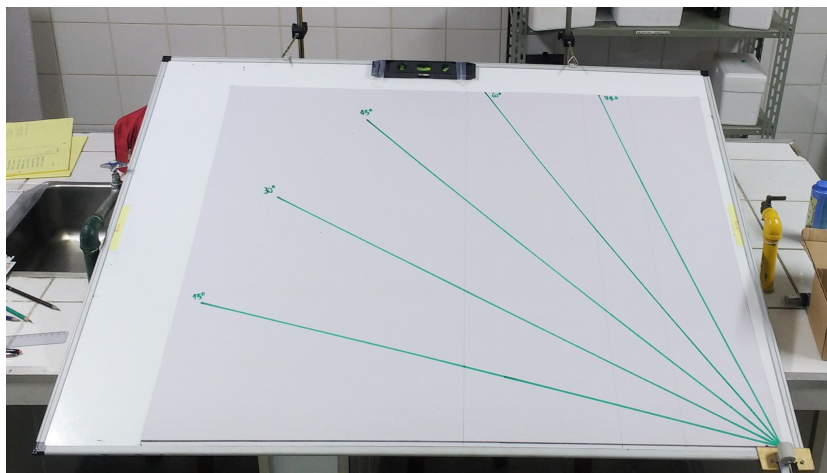


Figura 1.3: Montagem do experimento, com o quadro inclinado sobre uma bancada do laboratório.

de lançamento.

Caso se deseje realizar medidas de tempo, é extremamente conveniente utilizar um **metrônomo** (ou um aplicativo de *smartphone* correspondente). Os intervalos regulares entre as batidas do metrônomo permitem reduzir o tempo de reação, de forma a favorecer uma marcação mais precisa do instante de lançamento. A partir disso, é possível avaliar o número de batidas que o metrônomo dá até que o projétil colida com alguma superfície, comparando o som da colisão com o som do metrônomo. Essas medidas podem ser imediatamente constatadas pelos alunos em uma demonstração feita pelo professor, já que se baseiam em uma percepção auditiva. Na nossa experiência, esse método se mostrou extremamente convincente para os estudantes e funcionou como um processo de medição que todos puderam acompanhar simultaneamente.

Essa montagem admite alterações, inclusive permitindo recursos digitais para tomada de dados, como a filmagem. No entanto, isso não é requerido para realizar a atividade satisfatoriamente, de forma que a facilidade de obtenção de todos os materiais faz com que o experimento possa ser utilizado em contextos onde recursos mais sofisticados não estejam disponíveis, podendo também ser transportado entre os diferentes espaços de uma escola.



## 1.3 Sequência didática

O equipamento experimental descrito na seção anterior pode ser aplicado em sala de aula de formas variadas e para o ensino de diversos conteúdos. Sua utilização pode ser amplamente adaptada de acordo com os objetivos do professor, abrangendo tanto uma forma puramente demonstrativa, quanto uma tomada de dados extensiva feita pelos alunos, e pode ser útil desde o início do ensino dos movimentos acelerados até a aplicação das leis de Newton e da conservação da energia.

A seguir descrevemos uma proposta de utilização desse equipamento em uma sequência de 3 aulas de 1h30min de duração, voltada para alunos que conheçam a cinemática escalar nos casos de velocidade constante e de aceleração constante, bem como a decomposição do movimento uniforme (e.g.: um barco atravessando um rio), mas não os lançamentos horizontal e oblíquo.

Para essas aulas, os alunos devem se dividir em grupos e ser encorajados pelo professor a colaborar e a trocar ideias, de forma que o trabalho em conjunto seja uma forma de progredir na aprendizagem do tema.

A sequência de aulas foi montada de tal modo que, em cada uma, sejam introduzidas ou relembradas gradualmente ideias que reaparecerão nas aulas seguintes. Dessa forma, quando certos conceitos assumirem papel central na compreensão de algum aspecto do problema abordado, eles já terão surgido nas aulas anteriores. O professor deve, portanto, concatenar cuidadosamente os conceitos, procurando não omitir nenhum que conste naquela dada aula.

De resto, o professor que deseje aplicar essa atividade poderá adaptá-la livremente à sua realidade escolar.

### 1.3.1 Aula 1

Os principais objetivos desta aula são:

- Revisar a cinemática da queda livre vertical, de acordo com a necessidade;
- Apresentar o problema dos lançamentos horizontal e oblíquo;
- Apresentar o aparato experimental e habituar os alunos ao seu manuseio;
- Demonstrar que o movimento sobre o plano inclinado é perfeitamente análogo ao movimento de queda livre no vácuo.

Pode-se, iniciar a atividade caracterizando a queda livre vertical na proximidade da superfície da Terra como um movimento sob aceleração constante,

revisando algumas das características principais desse tipo de movimento. Vale a pena se certificar de que os alunos lembram que: *(i)* há simetria entre o movimento de subida e o movimento de descida (p.ex., os tempos em cada um desses movimentos são iguais); *(ii)* a velocidade no ponto de altura máxima é nula; *(iii)* as distâncias percorridas em intervalos de tempo iguais e sucessivos obedecem à sequência descrita por Galileu, sendo proporcionais à sequência dos números ímpares. Essas propriedades são úteis porque de fácil observação e porque serão posteriormente aferidas no movimento sobre o plano.

Essas propriedades podem ser confirmadas pelo professor, aproveitando o uso do metrônomo para demonstrar propriedades que digam respeito ao tempo.

Apresenta-se no quadro-negro o problema do lançamento oblíquo, com um disparador fixo na origem do sistema  $Oxy$ . Deve-se mostrar que a decomposição das grandezas cinemáticas ao longo do eixo horizontal e do eixo vertical refletem que, no eixo horizontal  $Ox$ , a componente da velocidade deve ser constante, enquanto no eixo vertical  $Oy$  a aceleração é constante e não nula. Com isso, as projeções do movimento sobre cada eixo cartesiano devem ter analogia com os casos de movimento retilíneo já conhecidos, e o professor pode escrever as equações de movimento no quadro.

Passa-se, então, a abordar as propriedades desse novo movimento, bidimensional, a partir de uma discussão participativa com os alunos. Pode-se propor a eles algumas perguntas sobre esse movimento que tenham relação imediata com as propriedades já verificadas no caso unidimensional, como: “Neste movimento, o tempo de subida é igual ao tempo de descida?”; “Em um lançamento horizontal, variando-se a velocidade inicial, o que ocorre com o tempo de queda?”. Sempre que necessário, o professor deve fazer a verificação experimental utilizando-se o metrônomo, testando as hipóteses levantadas pelos alunos.

Nessa verificação, deve-se destacar ainda o fato de que esses movimentos ocorrem em um intervalo de tempo muito curto, o que dificultaria, por exemplo, a análise de um lançamento oblíquo ocorrendo no espaço da sala de aula.

Uma vez bem sedimentadas as propriedades corretas e problematizada a dificuldade de medida do experimento feito no ar, o professor apresenta como alternativa o uso do plano inclinado para estudar um movimento mais duradouro e fácil de visualizar. Para verificar a validade da analogia entre esses dois movimentos, devemos, primeiro, demonstrar cuidadosamente, de forma empírica, que as mesmas propriedades dos lançamentos no ar se observam no movimento sobre o plano.

Aqui, é indicado já se servir do lançador. Apresenta-se o aparelho, ensi-

nando os alunos a fazer os ajustes adequados. Acoplado o lançador à base do quadro e utilizando o metrônomo, será fácil mostrar que o tempo de subida é igual ao tempo de descida. Igualmente, abandonando-se uma bilha do repouso no topo do quadro, pode-se perceber a propriedade de Galileu, tomando medidas com crescente número de batidas do metrônomo. Esta etapa também serve para a discussão da aceleração do movimento sobre o plano. Com algumas medidas da distância percorrida pela bilha em um tempo marcado pelo metrônomo, e escolhendo-se um valor de  $g \approx 9,8\text{m/s}^2$ , pode-se mostrar que a relação  $a = g \sin \alpha$  está correta, com todas as equações do movimento sendo preservadas.

Finalmente, coloca-se a bilha para rolar sobre uma régua horizontal, disposta transversalmente ao plano, de forma que se observará um movimento uniforme. Essa observação termina por caracterizar o presente movimento como perfeitamente análogo ao lançamento no ar.

Como etapa final desta aula, realizamos um procedimento com o objetivo de habituá-los a manusear o equipamento, o que será necessário nas aulas seguintes, e de construir uma noção intuitiva sobre o movimento estudado. Para tanto, pede-se aos alunos para fazer sucessivos lançamentos sobre o plano, com ângulos de lançamento diferentes, e observá-los. Então, pede-se para cada grupo desenhar com o pincel, sobre o quadro, a trajetória de um desses lançamentos, da forma mais precisa possível. Após um primeiro esboço, deve-se reproduzir o lançamento com mesmas condições iniciais, de maneira que possam fazer ajustes sobre o desenho. Dessa forma, terão aprendido a operar o experimento e a realizar aproximações sucessivas, também verificando a forma parabólica da trajetória, de maneira empírica.



Figura 1.4: Exemplos de trajetórias desenhadas por alunos de diferentes grupos sobre o plano.

### 1.3.2 Segunda aula

Objetivos:

- Estabelecer a relação entre o ângulo de lançamento  $\theta$  e o alcance horizontal;
- Estabelecer a condição de alcance máximo;
- Verificar algebricamente os resultados anteriores;

Nesta aula, é necessário um esforço de unificar a linguagem, facilitando as discussões em sala. É importante que o professor faça um comentário inicial para distinguir explicitamente alguns conceitos, como alcance e altura; ângulo de lançamento ( $\theta$ ) e ângulo de inclinação do plano ( $\alpha$ ). Essas grandezas devem ser definidas sem ambiguidade, enfatizando que, no experimento,  $\alpha$  é fixo, mas  $\theta$  é variável e medido em relação à base do plano.

Deve-se também destacar que os diferentes lançamentos estudados ocorrerão para um mesmo módulo de velocidade inicial, utilizando-se, portanto, projéteis iguais e mesmas configurações do lançador em todas as iterações, de forma que todos os resultados possam ser comparados, inclusive entre grupos diferentes.

Propõe-se, então, aos alunos as seguintes perguntas, escritas no quadro-negro:

- Quando o ângulo  $\theta$  aumenta, o que ocorre com o alcance  $A$ ?
- Quando o ângulo  $\theta$  aumenta, o que ocorre com a altura máxima  $H$ ?

Em primeiro lugar, os alunos deverão discutir em grupo para propor hipóteses às perguntas feitas, que devem ser registradas por escrito. Apresentadas as hipóteses, eles devem elaborar um método de verificá-las experimentalmente. O professor deve intervir para que as hipóteses estejam bem definidas e para que o procedimento experimental seja correto e eficiente, de forma que todos os grupos tenham tempo de realizar suas medidas.

O procedimento que consideramos mais adequado consiste em realizar sucessivos lançamentos com ângulos  $\theta$  crescentes. Um dos alunos deve disparar o lançador, enquanto outros verificam o ponto onde a bilha atinge a base do quadro, que deve ser marcado. Isso pode ser feito com um pincel ou mesmo com um pouco de talco espalhado na base do quadro. Enquanto isso, um outro aluno marca o ponto mais alto atingido.

Uma vez que esse método se baseia na percepção sensorial e na memória imediata dos experimentadores para marcação dos pontos, devem-se fazer repetições do lançamento com o mesmo ângulo, de forma a realizar correções,

aprimorando a marcação dos pontos. Feita a indicação dos pontos considerados satisfatórios pelo grupo, toma-se nota dos valores de alcance e de altura máxima. Um dos alunos deverá tomar nota desses valores, registrando-os em uma tabela junto ao ângulo de lançamento correspondente.



Figura 1.5: Diferentes grupos durante a atividade. Enquanto dois grupos discutem hipóteses e planejam o procedimentos de tomada de dados, um terceiro realiza as medidas visando a responder às perguntas propostas.

Ao final do processo de medição, cada grupo se reúne para analisar os dados e, a partir disso, responder às perguntas, apresentando, então, suas respostas finais para a classe. Deve-se cuidar para que todos os grupos atinjam as respostas adequadas, isto é, observem o comportamento monotônico de crescimento de  $H$  com  $\theta$  e o comportamento de crescimento e decréscimo de  $A$ .

Caso algum grupo não tenha atingido as respostas esperadas, o professor deve se basear nos dados experimentais dos outros grupos para argumentar que houve algum erro procedimental na tomada daqueles dados, apontando, se possível, a provável razão do problema. Pode-se, então, sugerir ao grupo usar dados obtidos por outros alunos ou fazer uma nova tomada de dados, de forma que todos participem igualmente das demais etapas da aula.

Uma vez que cada grupo consiga chegar às respostas adequadas, o professor apresenta à turma um novo conjunto de perguntas, relacionadas às observações feitas:

- Existem ângulos de lançamento distintos que possuem a mesma altura máxima? Se sim, em que casos?

- Existem ângulos de lançamento distintos que possuem o mesmo alcance? Se sim, em que casos?
- Qual o ângulo de lançamento para que a altura máxima seja a maior possível?
- Qual o ângulo de lançamento para que o alcance seja o maior possível?

Mais uma vez, os alunos devem ser levados a, primeiramente, produzir hipóteses, e só em seguida recorrer aos dados de forma a verificá-las<sup>1</sup>.

Uma vez que todos tenham atingido os resultados desejados, passa-se à etapa final da aula, que consiste em obter uma equação para o alcance, utilizando os dados medidos e análise dimensional. Esta etapa deve ser conduzida diretamente pelo professor, de forma a apresentar o método de determinação por análise dimensional que será utilizado na aula seguinte.

Sugerimos que o professor, de início, pergunte aos alunos quais são as grandezas que determinam a evolução do problema e componha uma lista delas no quadro. É importante que se distingam as grandezas condicionantes do movimento, como  $v_0$ ,  $\alpha$ ,  $\theta$ ,  $g$ ,  $a$ , e até mesmo outras como a massa e o raio da bilha das *variáveis* do movimento, como a posição e a velocidade. Em outras palavras, as grandezas que nos interessam podem ser medidas no instante inicial e determinam toda a descrição posterior do movimento.

Deve-se perguntar aos alunos de quais desses dados do problema pode depender o alcance  $A$ : “Se quisermos escrever uma equação para o alcance, quais dessas grandezas devem aparecer nessa equação?”.

Argumenta-se que a equação do alcance deve depender exclusivamente de  $a$ ,  $v_0$  e  $\theta$ , dado que as outras grandezas que podem ser propostas já têm sua dependência circunscrita a essas, enquanto as outras ou não surtem efeito na cinemática da bilha (p.ex., a massa) ou têm efeito desprezível (p.ex., o raio da bilha). Devido a o alcance ter dimensões de comprimento, deve-se usar uma combinação de  $a$  e  $v_0$  com dimensão de comprimento ( $L$ ), de forma que a única solução possível é  $v_0^2/a$ .

Esse procedimento admite ainda uma constante adimensional  $k$ , de forma que  $A \propto kv_0^2/a$ . Como nosso primeiro interesse é demonstrar a dependência de  $A$  com  $\theta$ , afirmaremos, por simplicidade, que  $k = 1$ , deixando a demonstração para a aula posterior, em que nos serviremos novamente da análise dimensional para obter os coeficientes da parábola de segurança.

---

<sup>1</sup>Uma das razões para isso é que, na nossa experiência, os alunos tipicamente apresentam dificuldade em lidar com os erros dos dados originados nos experimentos, apresentando dificuldade em observar padrões pela mera observação dos valores.

A equação para o alcance será, portanto, da forma  $A = \frac{v_0^2}{a} f(\theta)$ . É razoável supor que  $f(\theta)$  seja uma função trigonométrica. Tomando os casos dos lançamentos horizontal e vertical a partir do solo, sabemos que  $f(0) = f(\pi/2) = 0$ . Igualmente, sabe-se, das medidas feitas, que  $f(\theta) = f(\pi/2 - \theta)$  e que  $f(\pi/4)$  é máximo. Essas características são compatíveis com a forma  $f(\theta) = \sin(2\theta)$ .

Por fim, a partir dessas informações, deve-se pedir aos grupos para determinar  $v_0$  a partir dos dados obtidos. Se os valores dos diferentes grupos concordarem (concedida uma margem de erro experimental), aí teremos boa evidência de que nossa equação é adequada.

### 1.3.3 Terceira aula

A terceira aula tem como objetivos:

- Contextualizar a curva de segurança.
- Verificar a forma da curva de segurança;
- Caracterizar, tão bem quanto possível, a curva de segurança;

No início da aula, deve-se colocar para os alunos uma situação-problema que conduza à busca pela curva de segurança do projétil. Pode-se perguntar, por exemplo, como é a região em torno de um chafariz que esguiche água com ângulos de lançamento variados em que uma pessoa pode passar sem se molhar.

Em uma formulação mais tradicional, podemos imaginar um helicóptero que precise atravessar uma região onde existe um canhão fixo ao solo. Se o helicóptero estiver muito perto do canhão, ele ficará vulnerável a ser atingido por um projétil; por outro lado, se ele ficar sempre muito distante do canhão, este não o poderá atingir; no entanto, o helicóptero pode perder muito tempo em um trajeto desnecessariamente longo. Convém, para otimizar o caminho a ser feito pelo helicóptero, conhecer a fronteira que delimita a região “segura” da região “de perigo”, que chamaremos de superfície de segurança. Dado que esse sistema apresenta simetria de rotação em torno de um eixo vertical que passa pelo canhão, basta determinar a interseção dessa superfície com um plano vertical que contenha o eixo, chamada de curva de segurança.

Dessa forma, propomos como principal objetivo da aula *caracterizar* a curva de segurança tão bem quanto possível, ou seja, verificar qual o tipo da curva e medidas a ela associadas. Propomos, então, aos alunos, primeiramente discutir hipóteses sobre a forma da curva e, em seguida, discutir um método para verificá-la experimentalmente, de forma semelhante ao que foi feito na aula anterior.

## 12 CAPÍTULO 1. ATIVIDADE SOBRE LANÇAMENTOS OBLÍQUOS

O método que sugerimos consiste em proceder de forma análoga ao que se fez para determinar o alcance horizontal. Naquele caso, por meio de aproximações sucessivas, verificava-se em que ponto a trajetória do projétil interceptava a reta horizontal que continha o ponto de lançamento. Desta vez, tomamos uma reta que passa pelo ponto de lançamento, mas fazendo um ângulo  $\phi$  com a horizontal, para determinar o “alcance” do projétil ao longo dessa direção.

Pode-se dispor de uma cartolina já marcada com retas a diferentes ângulos de inclinação  $\phi$  como na figura 1.3, colocada sobre o plano. A partir daí, fazem-se lançamentos-teste sucessivos na tentativa de observar o caso em que o projétil atravessasse a reta no ponto mais distante possível. Os pontos de interseção vão sendo marcados a lápis até se encontrar o mais distante. Fazendo isso para vários ângulos de inclinação  $\phi$  da reta, teremos um conjunto de pontos mais distantes atingíveis em cada direção.



Figura 1.6: Grupo de estudantes realizando o experimento na 3ª aula. Enquanto um manuseia o lançador, outros observam para marcar o ponto de interseção com a reta inclinada (desenhada sobre a cartolina).

Uma vez indicados os pontos, deve-se ligá-los por meio de uma curva suave. Com isso, o professor poderá descartar várias das hipóteses trazidas pelos alunos e argumentar que a curva é uma parábola. Vale enfatizar para os alunos que esta parábola *não* representa uma trajetória e que esse resultado não é uma consequência imediata da forma parabólica da trajetória.

Para determinar que a curva foi desenhada corretamente, devem-se fazer lançamentos com ângulos  $\theta$  diversos, demonstrando que, em todos os casos, o projétil não consegue atravessar a curva de segurança.

A seguir, deve-se caracterizar a parábola da melhor forma possível. Podemos explicar essa caracterização da seguinte forma: Se a curva fosse uma



reta, poderíamos determinar sua inclinação; se fosse uma circunferência, poderíamos determinar seu raio. A maneira equivalente de se caracterizar tão bem quanto possível uma parábola, considerando a forma familiar  $y = \mathcal{A}x^2 + \mathcal{B}x + \mathcal{C}$ , é a determinação dos coeficientes  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$ .

Para tanto, será necessário primeiramente obter as coordenadas cartesianas dos pontos marcados, realizando-se medidas com a trena. A simetria do problema impõe que  $\mathcal{B} = 0$ , de forma que restam 2 coeficientes a se obter, tornando-se suficiente tomar 2 pontos distintos pertencentes à parábola. Pede-se aos alunos que façam esses cálculos para obter os coeficientes  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{C}$ .

Por fim, a análise dimensional mostra que os coeficientes  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{C}$  devem ter dimensões de  $L^{-1}$  e  $L$ , respectivamente. Um dos resultados explorados na aula anterior é que esses valores só podem depender de  $v_0$  e  $a$ , de forma que todo termo com dimensão de comprimento deve ser proporcional a  $v_0^2/a$ , ou seja,

$$\mathcal{A} = k_1 \frac{a}{v_0^2} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = k_2 \frac{v_0^2}{a} \quad (1.3)$$

A maior altura máxima ocorre no lançamento vertical; portanto, corresponde ao coeficiente  $\mathcal{C}$ , que corresponde à interseção da parábola de segurança com o eixo vertical. Dessa forma, o coeficiente  $\mathcal{C}$  pode ser obtido diretamente pela equação de Torricelli com o lançamento vertical e será dado por:

$$\mathcal{C} = \frac{v_0^2}{2a}, \quad (1.4)$$

de forma que  $k_2 = 1/2$  e é verificada a dependência esperada em  $v_0$  e  $a$ . Deve-se pedir para que os alunos determinem os valores de  $\mathcal{A}$  e de  $\mathcal{C}$  a partir das medidas feitas. Feito isso, pode-se fazer a operação  $\mathcal{A} \times \mathcal{C}$  para que se observe a relação entre os coeficientes; esse valor deve dar próximo de  $-0,25$ , o que garante  $k_1 = -1/2$  e a forma final da parábola de segurança, que tem equação

$$Y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} X^2. \quad (1.5)$$

Calculados os coeficientes  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{C}$  é possível, então, determinar  $v_0$ , o que também deve ser feito pelos alunos. Ao comparar esse valor com o obtido na aula anterior a partir do alcance, o argumento de que a constante adimensional  $k$  teria valor 1 naquele caso, fica bem fundamentado<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>De modo alternativo, pode-se comparar o valor obtido pela equação do alcance para o alcance máximo,  $A_{MAX} = v_0^2/a$  com a distância entre a origem e ponto de interseção da parábola de segurança com o solo.

Com isso, é possível determinar a parábola de segurança utilizando uma abordagem mista, que combina medidas experimentais com análise dimensional.

## 1.4 Questionário sobre lançamentos

Nas páginas seguintes, apresentamos um questionário para avaliar a aprendizagem dos alunos acerca de lançamentos oblíquos e parábola de segurança a partir das atividades propostas. Trata-se de um questionário de 12 perguntas com resposta de múltipla-escolha que não requerem cálculos. O questionário pode, inclusive, ser aplicado a alunos que não fizeram a atividade dado que ele não requer nenhum conhecimento específico da prática realizada.

Nós realizamos a aplicação do questionário de forma digital, utilizando a plataforma *Google Forms*. Essa versão pode ser acessada em <https://goo.gl/forms/1jiYSSj8on1lhF8J3>. Antes das perguntas, esse questionário pede a identificação dos entrevistados, de forma a diferenciar os alunos participantes e os não participantes da atividade.

Para aplicação da versão em papel, no entanto, é suficiente imprimir as páginas seguintes. As respostas corretas estão listadas na tabela abaixo.

Questão	Resposta	Questão	Resposta
1.	(e)	7.	(b)
2.	(c)	8.	(b)
3.	(e)	9.	(b)
4.	(d)	10.	(a) e (b)
5.	(c)	11.	(d)
6.	(b)	12.	(b)

### 1.4.1 Questionário — atividade sobre lançamentos

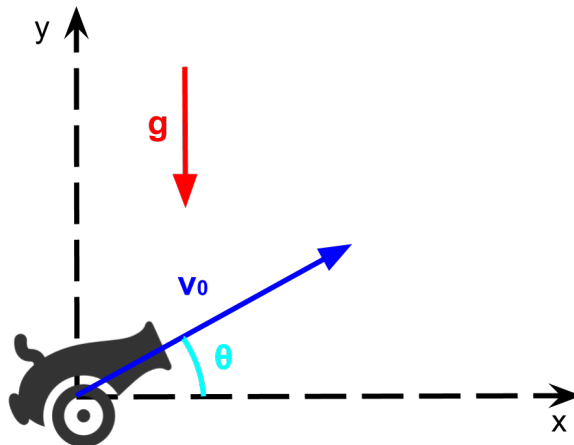
Este questionário é composto de 12 perguntas objetivas, que não requerem cálculos. Por favor, responda a todas cuidadosamente.

### 1.4.2 Lançamentos oblíquos

Considere uma bolinha sujeita exclusivamente à aceleração da gravidade, vertical e de módulo  $g$ . A bolinha é impelida por um disparador que sempre lhe confere velocidade de mesmo valor, similar a um canhão.

Esse disparador é articulado, de modo que o ângulo do lançamento, medido em relação à horizontal, vale  $\theta$ . Os atritos são desprezíveis e o disparador aponta sempre no mesmo plano vertical.

Fazemos cinco lançamentos sucessivos, com ângulos de lançamento de  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  e  $75^\circ$  em relação à horizontal.



1. Qual desses lançamentos atingirá a maior altura máxima?

- (a)  $15^\circ$
- (b)  $30^\circ$
- (c)  $45^\circ$
- (d)  $60^\circ$
- (e)  $75^\circ$

**2. Qual desses lançamentos terá o maior alcance horizontal?**

- (a)  $15^\circ$
- (b)  $30^\circ$
- (c)  $45^\circ$
- (d)  $60^\circ$
- (e)  $75^\circ$

**3. Quais desses lançamentos atingirão a mesma altura máxima?**

- (a)  $15^\circ$  e  $45^\circ$
- (b)  $30^\circ$  e  $75^\circ$
- (c)  $45^\circ$  e  $75^\circ$
- (d)  $15^\circ$  e  $75^\circ$
- (e) nenhum dos lançamentos

**4. Quais desses lançamentos terão o mesmo alcance horizontal?**

- (a)  $15^\circ$  e  $45^\circ$
- (b)  $30^\circ$  e  $75^\circ$
- (c)  $45^\circ$  e  $75^\circ$
- (d)  $15^\circ$  e  $75^\circ$
- (e) nenhum dos lançamentos

### 1.4.3 Lançamentos oblíquos — parte 2

Considere os lançamentos feitos na seção anterior.

Sabe-se que cada ângulo de lançamento  $\theta$  diferente determinará uma trajetória distinta, ou seja, um diferente conjunto de pontos que serão atingidos pelo projétil durante o percurso.

Considere que se deseja atingir, com o projétil, um determinado ponto  $P$  qualquer no plano do lançamento. Para isso, pode-se apontar o canhão com o ângulo  $\theta$  adequado, de forma que a trajetória descrita pelo projétil passe pelo ponto  $P$ .

Pontos  $P$  muito próximos do disparador sempre podem ser atingidos pelo projétil, desde que o disparador seja apontado adequadamente. Em contrapartida, pontos  $P$  muito distantes não podem ser atingidos, independentemente de como esteja orientado o disparador. A fronteira entre os pontos que

podem ser atingidos e os que não podem ser atingidos pelo projétil chama-se curva de segurança.

Em outras palavras, pontos  $P$  na região externa a essa curva estão seguros, nunca podendo ser atingidos pelo projétil. Para pontos  $P$  na região interior da curva, sempre é possível apontar o canhão de forma a atingi-los.

**5. Considerando a situação acima, reflita: um ponto  $P$  no interior da curva de segurança pode ser atingido com quantos valores de  $\theta$  diferentes?**

- (a) 0
- (b) 1
- (c) 2
- (d) 3
- (e) mais de 3

**6. Considerando a situação acima, reflita: um ponto  $P$  sobre a curva de segurança pode ser atingido com quantos valores de  $\theta$  diferentes?**

- (a) 0
- (b) 1
- (c) 2
- (d) 3
- (e) mais de 3

7. Qual das opções a seguir melhor representa a curva de segurança?

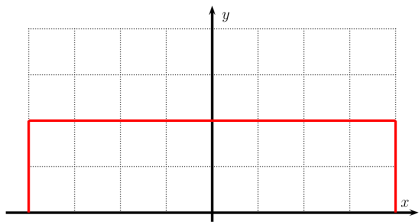


Figura 1.7: (a) Opção 1

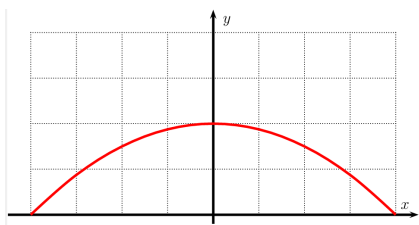


Figura 1.8: (b) Opção 2

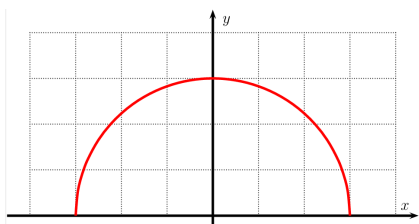


Figura 1.9: (c) Opção 3

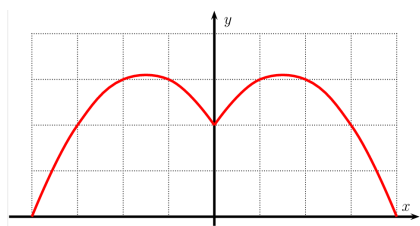


Figura 1.10: (d) Opção 4

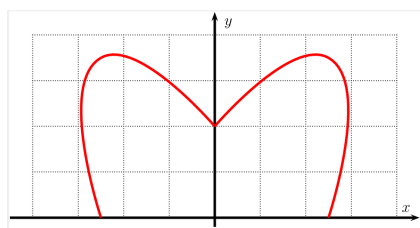


Figura 1.11: (e) Opção 5

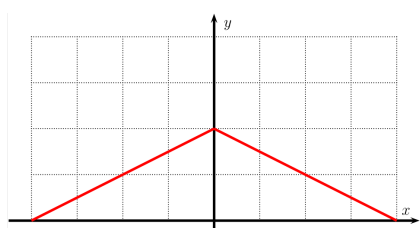


Figura 1.12: (f) Opção 6

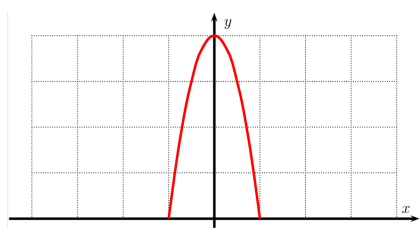


Figura 1.13: (g) Opção 7

### 1.4.4 Lançamentos oblíquos — parte 3

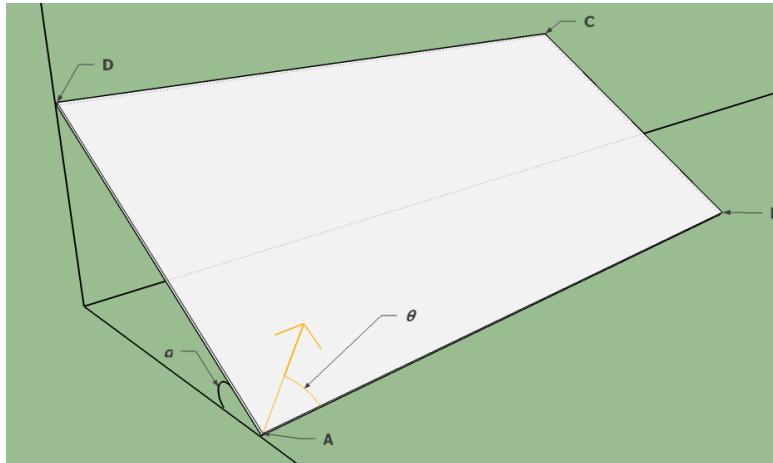
Considere agora lançamentos realizados sobre um plano inclinado fixo ABCD, como na figura, inclinado de um ângulo  $\alpha$  em relação à horizontal. Todo o movimento, em vez de acontecer no ar, acontece sobre o plano.

Acopla-se o mesmo disparador utilizado antes à base AB do plano, a partir do qual são lançados projéteis que permanecem sempre em contato



com ele.

O ângulo de lançamento entre a velocidade inicial do projétil e a base AB é  $\theta$ . Desprezam-se todos os atritos.



8. Avalie a afirmativa: “A forma da trajetória deixará de ser parabólica devido à inclinação do plano.”

- (a) Verdadeira
- (b) Falsa

9. Avalie a afirmativa: “A velocidade impressa pelo disparador ao projétil sobre o plano será diferente da velocidade que ele fornecia ao projétil que se movimentava no ar.”

- (a) Verdadeira
- (b) Falsa

10. Alterando-se a inclinação do plano,  $\alpha$ , indique, se houver, qual(is) das grandezas a seguir irá(irão) variar:

- (a) O tempo de voo
- (b) A altura máxima que o projétil é capaz de atingir
- (c) O ângulo de lançamento  $\theta$  para o qual o alcance é máximo

**11. Qual é a direção da aceleração do projétil?**

- (a) vertical, devido à gravidade
- (b) perpendicularmente ao plano ABCD
- (c) na mesma direção da velocidade, mas de sentido oposto
- (d) paralela às arestas AD e BC

**12. Qual o módulo da aceleração do projétil?**

- (a)  $g$
- (b)  $g \sin(\alpha)$
- (c)  $g \cos(\alpha)$
- (d)  $g \tan(\alpha)$