



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
Instituto de Física  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física  
Mestrado Profissional em Ensino de Física

## Aplicações do Paradoxo de Galileu no Ensino Médio

Mariana Faria Brito Francisquini  
&  
Alexandre Carlos Tort  
Vitorvani Soares

Material instrucional associado à dissertação de mestrado de Mariana Faria Brito Francisquini, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Rio de Janeiro  
Junho de 2015

# Aplicações do Paradoxo de Galileu no Ensino Médio

Mariana Faria Brito Francisquini

Alexandre Carlos Tort

Vitorvani Soares

## Resumo

Descrevemos um aparato de baixo custo e alguns vídeos curtos que podem ser utilizados em sala de aula para apresentar o *Paradoxo de Galileu*.

## 1 Aplicações do Paradoxo de Galileu no Ensino Médio

### 1.1 O Paradoxo de Galileu

Em uma carta datada de 29 de novembro de 1602, Galileu Galilei retrata a seu amigo e admirador Guidobaldo del Monte um efeito muito curioso acerca da queda de corpos ao longo de planos inclinados que o intrigara bastante. Mais tarde, em 1632, Galileu descreve o mesmo efeito em seu livro *Dois Novas Ciências*:

*Se a partir do ponto mais alto ou do ponto mais baixo de um círculo vertical traçarmos planos inclinados que cortam a circunferência, então os tempos de descida de corpos ao longo destes planos serão iguais.*

A resolução deste problema é simples. Para apresentá-la, iremos considerar um círculo vertical de diâmetro  $D$  e duas cordas, BA e EA, de comprimentos  $D$  e  $l$ , respectivamente [Figura 1] por onde partículas poderão deslizar livremente. Podemos mostrar que  $l$  e  $D$  se relacionam por meio da expressão matemática

$$l = D \cos(90^\circ - \theta) = D \sin(\theta). \quad (1)$$

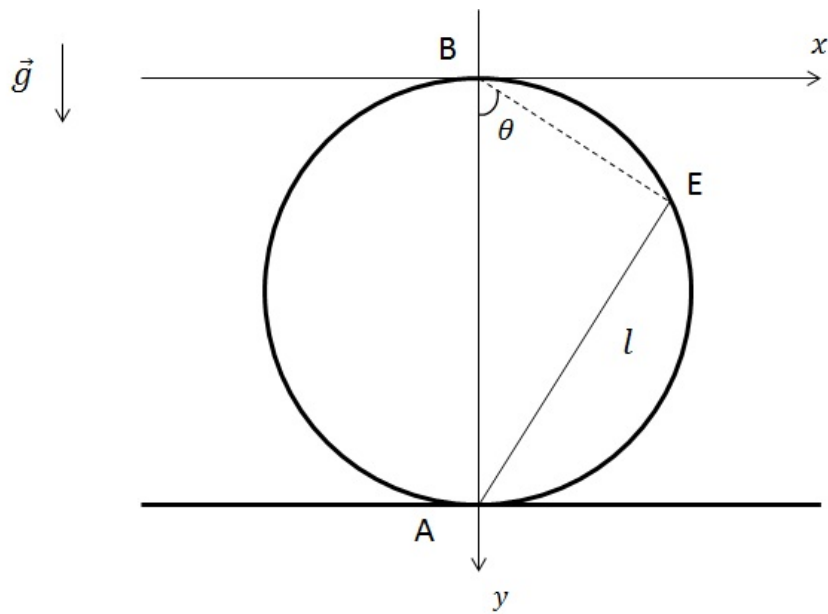


Figura 1: Partículas podem deslizar livremente ao longo das cordas BA e EA.

Ao considerarmos dois corpos que deslizem por BA e por EA, simultaneamente, partindo do repouso, sabemos que o corpo a percorrer o diâmetro  $D$  está sujeito unicamente à aceleração da gravidade,  $g$ . O mesmo não ocorre com o corpo que desliza por EA: o contato com o plano inclinado faz com que sua aceleração seja diferente da aceleração da gravidade.

O módulo da aceleração à qual está submetido o corpo que desliza por EA se relaciona com  $g$  pelo mesmo fator que  $l$  se relaciona com  $D$ , ou seja,

$$a = g \sin(\theta). \quad (2)$$

Desprezando-se as forças resistivas, podemos escrever a representação paramétrica da posição,  $y$ , da partícula que desliza ao longo do diâmetro da circunferência como

$$y = \frac{at^2}{2}, \quad (3)$$

onde  $t$  é o instante de tempo, dadas as condições iniciais  $y_0 = 0$  e  $v_{0y} = 0$ . Como a partícula percorre uma trajetória de comprimento igual a  $D$  e está sujeita a uma aceleração igual a  $g$ , a igualdade (3.3) assume a forma

$$D = \frac{1}{2}gt_D^2, \quad (4)$$

em que  $t_D$  é o tempo de queda ao longo deste percurso. Consequentemente, podemos escrevê-lo como

$$t_D = \sqrt{\frac{2D}{g}}.$$

Repetindo-se os procedimentos, para o corpo que desliza livremente por EA, temos que o tempo de queda,  $t_l$ , deste fio pode ser escrito como

$$t_l = \sqrt{\frac{2l}{g \operatorname{sen}(\theta)}}. \quad (5)$$

Substituindo-se a igualdade [1] no resultado acima, resulta que  $t_l = t_D$ . O mais intrigante neste resultado é o fato de que os tempos de queda de quaisquer corpos liberados a partir do repouso ao longo de planos inscritos em uma circunferência<sup>1</sup> são iguais. Isto ocorre devido à geometria do círculo: os comprimentos das cordas por onde passam os corpos sempre se relacionam com o diâmetro do círculo por um fator igual ao seno do ângulo de inclinação do plano. De maneira análoga, as acelerações em cada fio sempre se relacionam com a aceleração da gravidade pelo mesmo fator. Em nossa demonstração, chegamos à conclusão de que estes dois termos sempre se cancelam. Em ou-

---

<sup>1</sup>Segundo Galileu, para que ocorra este resultado, os planos que partem do topo ou da base do círculo não podem cortar o diâmetro da circunferência (Teorema VIII, Proposição VIII de *Duas Novas Ciências*).

tras palavras, a diferença de caminho gerada pelo comprimento dos planos inclinados é sempre compensada pela diferença entre as acelerações; embora o corpo que desliza ao longo de qualquer corda inclinada percorra um caminho menor, sua aceleração é, na mesma proporção, menor.

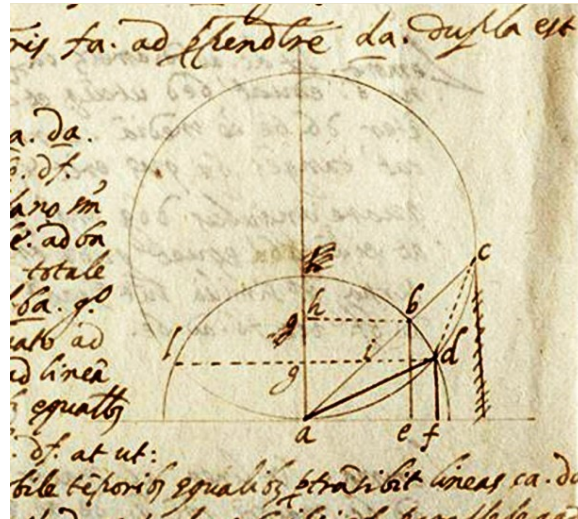


Figura 2: Manuscrito de Galileu a respeito da queda de corpos ao longo de planos inclinados inscritos em um círculo.

## 1.2 Montagem do aparato demonstrativo

A fim de concretizar a idealização de Galileu, montamos um aparato simples que nos permitisse observar os efeitos descritos em *Dois Novas Ciências*. Os materiais e o procedimento de montagem podem ser encontrados abaixo [Figura 3].

- 1 (um) aro de bicicleta;
- 1 (um) suporte de madeira;
- fio de nylon ou qualquer material semelhante;
- fita dupla face ou fita adesiva comum;
- bolinhas com um furo que passe pelo seu diâmetro.



Figura 3: Materiais utilizados na construção do aparato demonstrativo.

### 1.2.1 Procedimento de montagem

1) Deve-se fixar o aro no suporte de madeira <sup>2</sup> e, em seguida, deve-se introduzir o fio de nylon no furo da extremidade inferior do suporte de madeira. Deve-se também passar o fio de nylon através do furo da bolinha antes de introduzi-lo no furo da extremidade superior do aro de bicicleta [Figura4].



Figura 4: Primeira etapa do procedimento de montagem.

2) Em seguida, devemos introduzir o fio na extremidade oposta e, novamente, atravessá-lo em qualquer outro furo - introduzindo a segunda bolinha do fio [Figura 5].

3) Deve-se passar o fio pelo mesmo furo por onde ele foi passado inicialmente e aplicar uma tensão mecânica para que ele fique esticado [figura 6]. Em seguida, utilizamos a fita dupla face para fixar o fio de nylon ao suporte de madeira.

---

<sup>2</sup>Convém que o suporte de madeira tenha um furo que coincida com um dos furos do aro da bicicleta pelo qual possamos passar o fio de nylon.



Figura 5: Segunda etapa do procedimento de montagem.

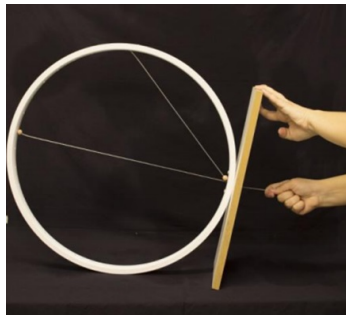


Figura 6: Terceira etapa do procedimento de montagem.



Figura 7: Esquematização da situação proposta por Galileu

### 1.3 Filmagem do aparato

Com o auxílio deste aparato, um filme demonstrativo deste fenômeno foi feito por nós em outra ocasião e pode ser acessado em <https://www.youtube>.

[com/watch?v=tUnhCPGsJxw](https://www.youtube.com/watch?v=tUnhCPGsJxw)<sup>3</sup>.

No vídeo, dois corpos de mesma massa, forma e dimensão são postos a deslizar ao longo dos fios que chamamos de BA e EA [Figura 1]. O vídeo apresenta duas configurações possíveis para a demonstração: na primeira situação, fazemos o ângulo de inclinação do plano EA igual a  $40^\circ$ . Na configuração seguinte, muda-se a inclinação deste mesmo plano de modo que esta atinja o valor aproximado de  $70^\circ$ . Do filme acima, foram extraídos cinco frames de instantes diferentes da queda (ao longo de BA e EA) das duas partículas. Com o auxílio de um programa de edição de vídeos foi feita a superposição destes frames [Figura 8].



Figura 8: Superposição de cinco instantes do movimento de queda de duas partículas.

Uma outra versão deste vídeo pode ser vista em: <https://www.youtube.com/watch?v=HRTjvm2pVm0>. Nesta configuração, aparentemente mais complexa que a anterior, é inscrito um terceiro plano inclinado [Figura 9] ao círculo. A seguir são liberados simultaneamente, a partir do repouso, três corpos ao longo das cordas BF, FA e BA.

Para mostrarmos que os tempos de queda ao longo destas cordas são idên-

---

<sup>3</sup>Versão em inglês, porém com maior resolução de filmagem. Uma versão em português pode ser encontrada em <https://www.youtube.com/watch?v=Jdcd11Sxc0w>



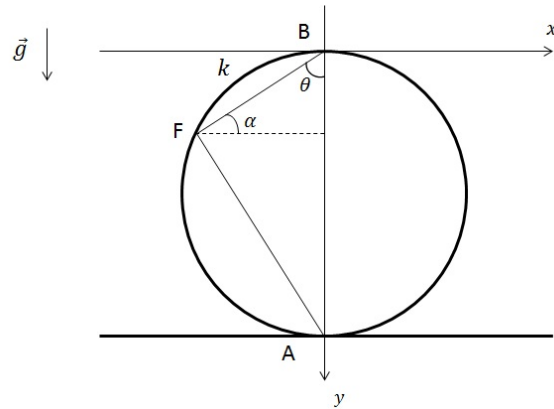


Figura 9: Esquema de configuração da nova montagem do aparato.

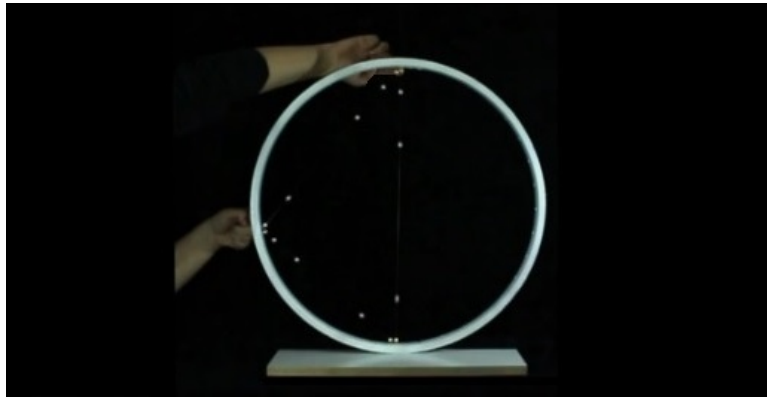


Figura 10: Superposição de cinco frames com a nova configuração de montagem.

ticos, basta relacionarmos o comprimento  $K$  da corda  $BF$  com o comprimento  $D$  da corda  $BA$ , assim como feito para o caso anterior:

$$D = k \sin(\alpha). \quad (6)$$

Como a aceleração à qual estará submetida a partícula que desliza por  $BF$  é igual a  $g \sin(\alpha)$ , então podemos facilmente chegar ao resultado  $t_k = t_D$ .

## 2 O Círculo de simultaneidade

No Corolário III do Teorema VI, Proposição VI de *Duas Novas Ciências*, Galileu introduz - por meio de um diálogo entre *Sagredo*, *Salviatti* e *Simplício* um interessante problema cinemático. Este problema é uma consequência direta do efeito explicado na seção anterior. Como dito pelo personagem *Sagredo*:

*[...] imaginemos [um círculo em] um plano vertical, e a partir de seu ponto mais alto desenhemos linhas inclinadas com todos os ângulos [...] Imaginemos também que partículas pesadas descem por estas linhas com um movimento naturalmente acelerado, e cada uma com uma velocidade apropriada à inclinação de sua linha. Se estas partículas móveis são sempre visíveis, qual será o lugar geométrico de suas posições a cada instante? A resposta a esta pergunta me surpreende, pois sou levado a acreditar, pelos teoremas precedentes, que estas partículas sempre estarão sobre a circunferência de um mesmo círculo, que aumenta com o tempo à medida que as partículas se afastam mais e mais do ponto de onde seu movimento se iniciou.*

Embora a resolução analítica deste problema seja simples, não iremos apresentá-la neste produto<sup>4</sup>. A fim de mostrar o efeito descrito por Galileu em *Duas Novas Ciências*, o aparato demonstrativo foi montado conforme o esquema da figura 11. Nesta configuração, inscrevemos cinco cordas à circunferência por onde partículas pudessem deslizar livremente.

### 2.1 Filmagem do aparato

Novamente, foi feita uma filmagem demonstrativa da situação idealizada por Galileu. O referido vídeo pode ser encontrado em <https://www.youtube.com/watch?v=eqWQNMgk7i0>. Neste caso, cinco corpos foram colocados para deslizar ao longo de cada um dos planos inclinados inscritos ao

---

<sup>4</sup>A resolução deste problema é apresentada com maiores detalhes no corpo da dissertação à qual este produto está associado.

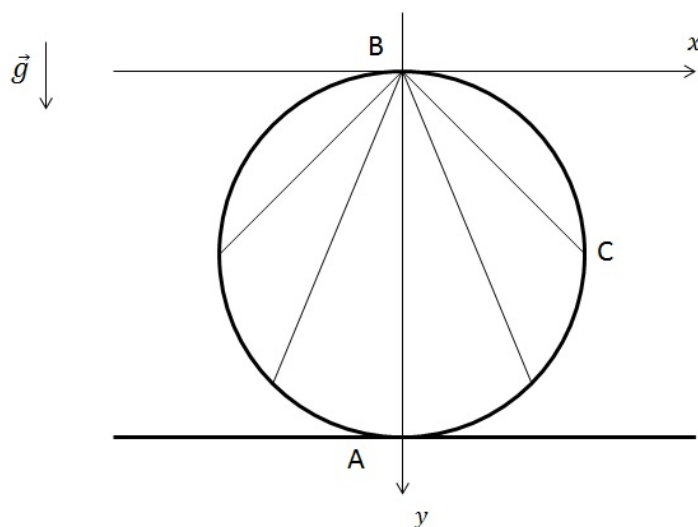


Figura 11: Partículas podem deslizar ao longo de cada uma das cordas inscritas à circunferência.

círculo. Como há uma impossibilidade física liberarmos todos os corpos simultaneamente de um mesmo ponto (ponto B), utilizamos um molde plástico em formato circular para a liberação destes [Figura12].



Figura 12: Molde em que foram apoiados os corpos antes de serem abandonados a partir do repouso.

Apesar de não serem soltas de um mesmo ponto, mas de pontos muito próximos entre si, as posições instantâneas dos corpos que deslizam ao longo destes planos assumem uma configuração que acreditamos ser satisfatoriamente circular como previu Galileu [Figura 13].

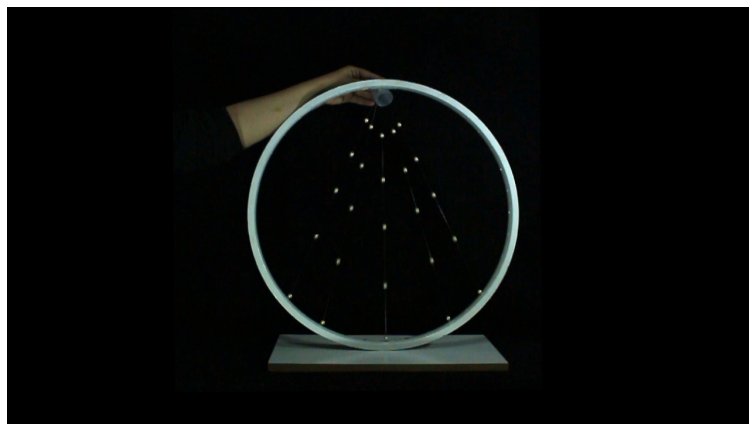


Figura 13: Os corpos deslizam pelas cordas em uma configuração circular.

Este efeito é uma consequência direta do exposto na seção anterior e pode ser apresentado em sala de aula sem a necessidade do tratamento matemático - se o professor assim desejar -, como fazemos aqui. O argumento é simples: se os tempos de queda ao longo destes planos são iguais, então deve haver inúmeras circunferências para as quais o intervalo de tempo decorrido é igual ao tempo de queda (total) das partículas. Ou seja, ao considerarmos o movimento de queda destes corpos nos mesmos intervalos de tempo, estes corpos devem estar deslizando ao longo dos planos de modo que suas posições formem círculos cada vez maiores com o passar do tempo [Figura 14].

Como foi demonstrado anteriormente, se partículas forem abandonadas do ponto A no mesmo instante, então após um intervalo de tempo arbitrário, uma destas partículas estará na posição E, enquanto outra estará simultaneamente em G e a outra em I. Ao considerarmos outro intervalo de tempo a partir do anterior, estas ocuparão simultaneamente os pontos F, H e B, respectivamente. À medida que forem considerados mais intervalos de tempo, estas partículas se encontrarão sobre a superfície de uma circunferência cuja dimensão aumenta indefinidamente com o tempo.

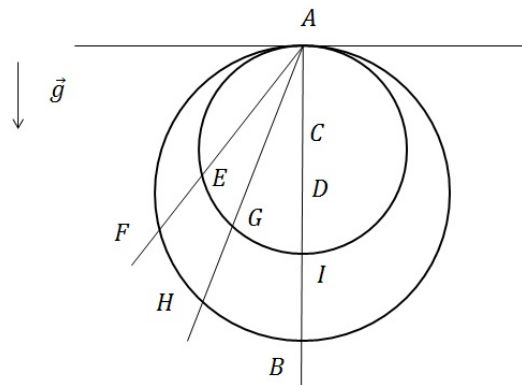


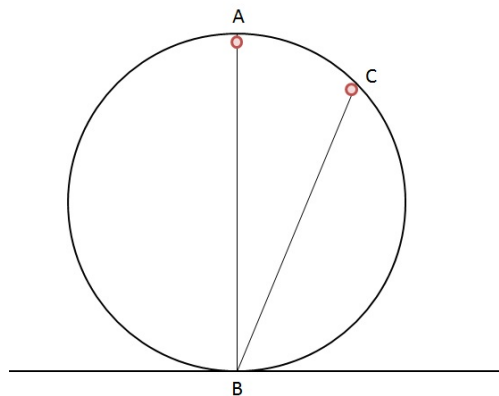
Figura 14: Argumento utilizado por Galileu para demonstrar o círculo de simultaneidade.

### 3 Algumas atividades propostas

#### 3.1 Questionário pré-instrução em cinemática

Antes de os alunos serem expostos aos conceitos cinemáticos, apresentamos a eles o questionário abaixo.

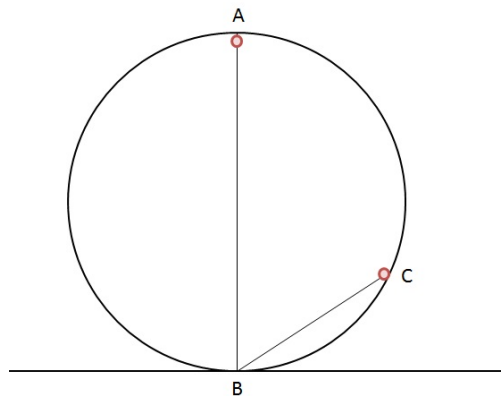
1) Observe a figura abaixo. Suponha que tenhamos dois fios AB e CB por onde dois corpos possam deslizar livremente sem atrito.



Ao serem liberadas no mesmo instante a partir do repouso, qual das duas bolinhas chegará à base do plano primeiro: a que desliza pelo fio AB ou a que desliza pelo fio CB? Explique seu raciocínio.

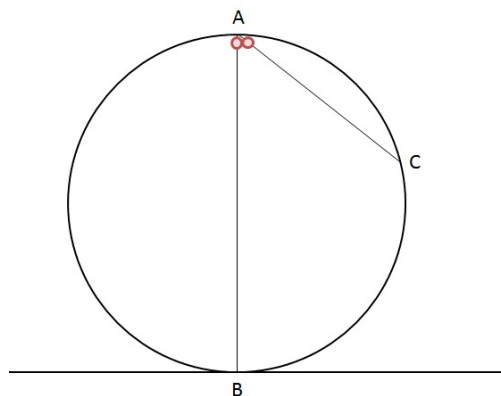
2) Se, agora, diminuirmos significativamente a inclinação da corda CB

(como mostra a figura abaixo), qual das duas bolinhas irá chegar à base do círculo primeiro?



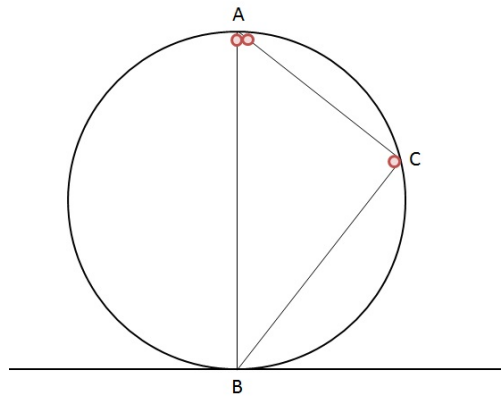
Continue considerando que ambas são liberadas no mesmo instante a partir do repouso. Explique seu raciocínio.

3) Explique como sua resposta mudaria (ou se não mudaria) caso o esquema da questão anterior fosse colocado "de cabeça para baixo", como ilustra a figura. Nesta nova configuração, qual das bolinhas chega a tocar a circunferência primeiro? Explique seu raciocínio.



4) Agora, considere o movimento de três corpos que deslizem ao longo dos fios AB, AC e CB soltos, simultaneamente, a partir do repouso.

Relacione os tempos que queda destes corpos explicando seu raciocínio.

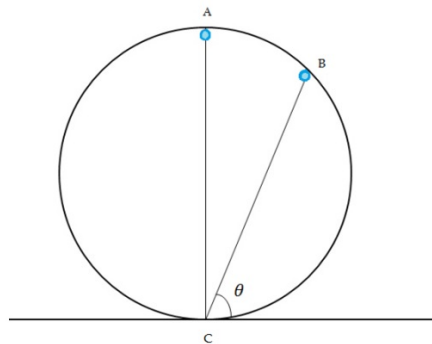


### 3.2 Questionário pós-instrução em cinemática

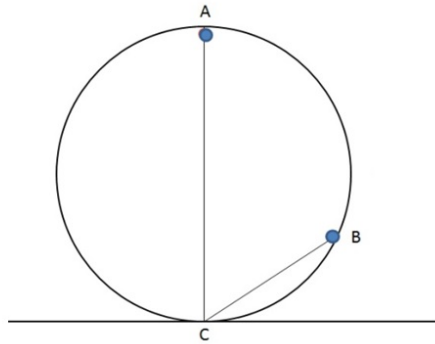
Depois de os alunos serem apresentados aos conceitos cinemáticos pertinentes à resolução das situações idealizadas por Galileu, o seguinte questionário foi aplicado em sala de aula.

As questões devem ser respondidas com argumentos baseados nos conceitos cinemáticos que você conhece.

- 1) Observe o esquema e responda as questões a seguir:



- a) Qual bolinha (A ou B) chega primeiro à base do círculo? Explique seu raciocínio.
- b) Nesta configuração, qual bolinha (A ou B) chega primeiro à base do círculo? Explique seu raciocínio
- c) A que aceleração está submetida a bolinha A na primeira configuração deste exercício?



d) A que aceleração está submetida a bolinha B na primeira configuração deste exercício?

e) Qual das duas acelerações é maior?

f) Em algum momento durante a queda as duas bolinhas têm a mesma velocidade?

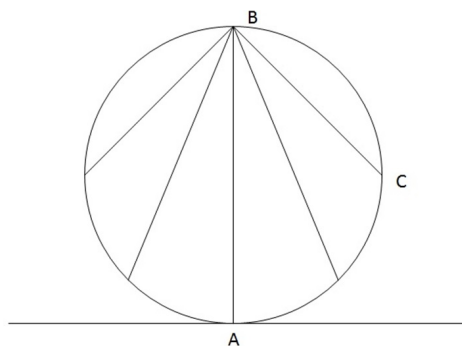
2) Apresente uma relação matemática para relacionar o comprimento  $D$  do diâmetro do círculo com o comprimento  $l$  por onde a outra bolinha desliza.

3) Determine analiticamente o tempo de queda da bolinha em queda livre.

4) Determine analiticamente o tempo de queda da bolinha que desliza pela corda  $l$ . Utilize a relação apresentada por você no exercício 2 para dar sua resposta.

5) O que podemos dizer sobre os tempos de queda? Sua resposta mudaria caso mudássemos a inclinação do plano (para mais ou para menos)?

6) Observe o esquema abaixo.



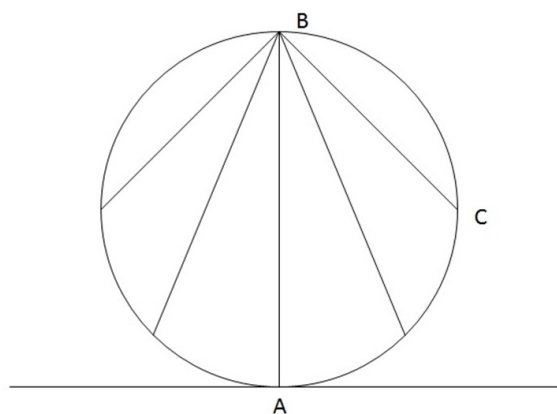
- Suponha que em cada uma das linhas inscritas à circunferência sejam colocadas bolinhas que possam deslizar por estas linhas;



- Suponha que todas estas bolinhas sejam soltas simultaneamente a partir do repouso do ponto B.

a) Levando em consideração as respostas dadas ao exercício 1, diga qual figura geométrica formada pela posição das partículas você esperaria ver durante o movimento de queda destas.

b) Faça o desenho de um instante qualquer da queda dessas bolinhas na figura abaixo tornando explícita a figura geométrica escolhida no item anterior.



## 4 Algumas respostas fornecidas pelos alunos

### 4.1 Questionário pré-instrução em cinemática

O questionário foi aplicado a 50 alunos do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola particular. Grande parte dos alunos deste universo nunca havia tido nenhum tipo de contato com a disciplina de física até a 1ª série do Ensino Médio.

#### 4.1.1 Questão 1

- Porcentagem de alunos que acham que a *bolinha A* chegará à base do círculo primeiro: 56%

Justificativas comuns: “A cairá reto”, “A tem maior velocidade que B”, “quanto mais vertical, maior velocidade se adquire”, “A aceleração de A vem com maior velocidade”, “A está em linha reta e ganha mais velocidade por causa da gravidade”, “A está mais inclinada e por isso a velocidade é maior”, “Mesmo que o corpo B esteja adiantado, o corpo A estará reto e isso o fará ir mais rápido que o inclinado”, “A, a posição do fio faz com que a bolinha “encoste” menos nele, descendo com mais velocidade. A bolinha A também está mais no alto, descendo com mais força”.

- Porcentagem de alunos que acham que a *bolinha B* chegará à base do círculo primeiro: 28%

Justificativas comuns: “CB pois a bolinha B está mais baixa que a A”, “CB pois sua distância é menor. Considerando o atrito, CB estaria em desvantagem por estar na diagonal”, “A que desliza pelo CB pois está mais próxima do ponto B”.

- Porcentagem de alunos que acham que ambas chegarão à base do círculo ao mesmo tempo: 16%

Justificativas comuns: “Chegariam ao mesmo tempo. Por mais que a aceleração da bolinha C seja menor, seu percurso também é”, “As duas chegariam ao mesmo tempo, pois a velocidade de A é maior, ela ganha mais velocidade, mas a C tem um caminho menor e chegariam ao mesmo tempo”, “As duas chegam ao mesmo tempo, porque mesmo CB tendo uma inclinação maior, a reta é menor que AB”, “Ao mesmo tempo, o fio AB é maior mas a velocidade será maior. O fio CB é menor e a velocidade também, logo os dois se encontrarão ao mesmo tempo”, “Eles chegariam ao mesmo tempo, pois o A ganharia mais velocidade, mas a distância CB é menor”, “As duas bolinhas chegarão

ao mesmo tempo, pois já que a inclinação do fio AB é maior, sua aceleração também será maior; já o fio CB tem uma distância menor para percorrer, porém está menos inclinado, portanto sua aceleração será menor. Assim as duas bolinhas chegarão ao mesmo tempo”.

#### 4.1.2 Questão 2

- Porcentagem de alunos que acham que a *bolinha A* chegará à base do círculo primeiro: 40%

Justificativas comuns: “A bolinha A chegaria primeiro pois sua velocidade seria bem maior que a da bolinha C”, “A que passa por AB, pois mesmo que sua distância do ponto B seja maior, sua inclinação é muito maior também”, “Já que a inclinação da linha CB é menor, esta vai demorar mais para chegar ao ponto final”, “A bolinha A vai chegar primeiro porque pegaria velocidade mais rápido do que C”, “Ainda assim A chega mais rápido pois está reta e a distância faz com que a velocidade seja mais rápida”, “A, pois está mais inclinada e por isso sua velocidade é maior”.

- Porcentagem de alunos que acham que a *bolinha C* chegará à base do círculo primeiro: 50%

Justificativas comuns: “O objeto do ponto C cairá primeiro pois a distância entre ele e o ponto B é menor do que a distância entre o ponto A e o B”, “A bolinha C chegará primeiro porque agora ela está muito mais perto do B”, “O corpo da corda CB chega primeiro porque mesmo CB tendo inclinação maior a reta é muito menor”.

- Porcentagem de alunos que acham que ambas chegarão à base do círculo ao mesmo tempo: 10%

Justificativas comuns: “A mesma resposta da primeira questão, o tamanho do fio compensa a velocidade”, “Eles chegam juntos pois AB é mais rápido mas CB está mais perto”, “As duas vão chegar juntas porque CB está mais perto e AB está numa reta, então pega mais velocidade”.

#### 4.1.3 Questão 3

- Porcentagem de alunos que acham que a *bolinha A* chegará à base do círculo primeiro: 24%

Justificativas comuns: “A que passa por AB pois está mais inclinada, e por isso a sua velocidade é maior do que a da AC”, “A A vai chegar primeiro pois na vertical ele vai mais rápido”, “Continua AB porque a fórmula é a mesma que a da questão anterior”.

- Porcentagem de alunos que acham que a *bolinha B* chegará à base do círculo primeiro: 64%

Justificativas comuns: “A C porque está mais perto”, “AC chegará primeiro, por estar mais inclinado, sua aceleração será maior”, “AC chegaria primeiro pois a distância é menor, mesmo com AB tendo mais velocidade ela não conseguiria chegar antes de AC”.

- Porcentagem de alunos que acham que ambas chegarão à base do círculo ao mesmo tempo: 12%

Justificativas comuns: “O tempo, velocidade, tamanho são os mesmos, logo não mudaria nada colocar o esquema de *cabeça para baixo*”, “Os dois caem ao mesmo tempo. AC é uma reta menor tendo que percorrer uma distância menor e sua inclinação o beneficia. AB é uma reta na vertical e o círculo está na vertical favorecendo com mais velocidade”, “Não mudaria nada. Assim como as bolinhas foram e chegaram ao

mesmo tempo, elas voltaram”, “Não mudaria, vai acontecer o mesmo que a questão dois”.

Porcentagem de alunos atestando que:	Questão 1	Questão 2	Questão 3
A chega à base primeiro	56	40	24
B chega à base primeiro	28	50	64
Ambas chegam à base juntas	16	10	12

Figura 15: Respostas ao questionário pré-instrução em cinemática em porcentagem.

## 4.2 Questionário pós-instrução em cinemática

### 4.2.1 Questão 1.a

- Porcentagem de alunos que acham que a *bolinha A* chegará à base do círculo primeiro: 83%

Justificativas comuns: “(A). A bolinha (A) terá uma aceleração maior portanto atingirá uma velocidade máxima na base do círculo com mais rapidez”, “A bolinha A pois quando há o plano inclinado, a aceleração é menor que na vertical”, “A. Pois a utilização do plano inclinado faz com que a aceleração da gravidade sobre o móvel seja menor”, “A bolinha A chegará primeiro pois a aceleração é maior que a aceleração da bolinha B”, “A bolinha A chegará primeiro pois ela cai em queda livre com aceleração da gravidade e a aceleração de B é menor por usar um plano inclinado”.

- Porcentagem de alunos que acham que a *bolinha B* chegará à base do círculo primeiro: 2%

Justificativas comuns: “A B chega primeiro porque está mais próxima”.

- Porcentagem de alunos que acham que ambas chegarão à base do círculo ao mesmo tempo: 15%

Justificativas comuns: “Ao mesmo tempo porque o ângulo torna a distância e a aceleração proporcionais”, “Chegam juntas porque mesmo que sua aceleração seja menor, o percurso também é menor e torna a aceleração e a distância das bolinhas proporcional”, “Para mim as duas chegam ao mesmo tempo pois o circuito da bola B é menor mas parece ter velocidade menor. Já a bola A a distância é maior mas tem mais inclinação assim provavelmente a velocidade é maior”.

#### 4.2.2 Questão 1.b

- Porcentagem de alunos que acham que a *bolinha A* chegará à base do círculo primeiro: 57%

Justificativas comuns: “A porque está na vertical e terá um movimento acelerado e B tem uma inclinação menor e isso fará com que sua aceleração seja menor”, “A porque a B está inclinada e cada vez mais inclinado, mais lento e por isso o A chega primeiro”, “A *bolinha A* chega mais rápido porque a aceleração dela é maior. A *bolinha B* tem uma aceleração menor pois a mesma está em uma linha inclinada”, “A bolinha A tem mais aceleração por ter mais caminho, a bola B continua com plano inclinado”.

- Porcentagem de alunos que acham que a *bolinha B* chegará à base do círculo primeiro: 15%

Justificativas comuns: “(B). A bolinha B tem uma distância menor ao ponto C, com isso sua aceleração será correspondida com a curta distância”, “B, pois possui um percurso menor, apesar da aceleração de A ser maior. A diferença de tempo na chegada é pequena”, “Apesar da resposta anterior, dessa vez o comprimento de B é significativamente menor, então ela chegaria primeira”, “A bolinha B, pois mesmo a velocidade sendo menor, ela está mais perto do eixo”.

- Porcentagem de alunos que acham que ambas chegarão à base do círculo ao mesmo tempo: 28%

Justificativas comuns: “Ao mesmo tempo, pois mesmo que a aceleração de B seja muito menor a distância também está proporcional”, “Juntos independente da posição de A e B, eles sempre chegam juntos pois isso é um círculo e o tamanho irá compensar a aceleração”, “Chegam ao mesmo tempo. Mesmo com deslocamentos diferentes, as acelerações também são diferentes”, “As duas chegam ao mesmo tempo pelo mesmo motivo da questão anterior”.

Porcentagem de alunos atestando que:	Questão 1.a	Questão 1.b
A chega à base primeiro	83	57
B chega à base primeiro	2	15
Ambas chegam à base juntas	15	28

Figura 16: Respostas ao questionário pós-instrução em cinemática em porcentagem.

### 4.2.3 Questão 1.c

Dos 47 alunos que responderam ao questionário, todos identificaram que a bolinha A estava submetida à ação da aceleração da gravidade,  $g = 10m/s^2$ .

### 4.2.4 Questão 1.d

Dos 47 alunos que responderam ao questionário, 43 identificaram que a bolinha B estava submetida a uma aceleração igual a  $a = g \sen \theta$  e 4 alunos não souberam responder à questão (deixando-a em branco).

### 4.2.5 Questão 1.e

Dos 47 alunos que responderam ao questionário, 44 identificaram a aceleração da gravidade como sendo maior do que a aceleração da bolinha B e 3 alunos não souberam responder à questão (deixando-a em branco).

### 4.2.6 Questão 1.f

Dos 47 alunos que responderam ao questionário, 28% responderam que as bolinhas terão mesma velocidade apenas no instante em que são soltas, enquanto 43% responderam que as bolinhas terão mesma velocidade nos instantes inicial e final. Além disso, 20% responderam que as bolinhas teriam mesma velocidade quando estivessem na mesma posição, enquanto 9% afirmaram que em nenhum momento as velocidades das bolinhas seriam iguais.

## 4.3 Questão 2

Grande parte dos alunos, apesar de já ter estudado trigonometria falhou em fornecer uma expressão correta que relacionasse estas grandezas. Cerca de 29% dos alunos forneceram a resposta correta à questão, enquanto aproximadamente 60% dos alunos forneceram uma resposta equivocada. Cerca de 10% dos alunos deixaram a questão em branco.



#### 4.4 Questão 3

Mesmo o resultado desta questão não dependendo da questão anterior, muitos alunos (em torno de 36%) não conseguiram fornecer uma resposta coerente à pergunta e cerca de 10% dos alunos deixaram a questão em branco. A porcentagem de alunos que forneceu a resposta corretamente foi de aproximadamente 54%.

#### 4.5 Questão 4

Dos alunos que conseguiram fornecer uma resposta correta à pergunta número 2 apenas 7 alunos (cerca de 15% do total) conseguiram chegar à resposta correta, enquanto os 40 alunos restantes não souberam desenvolver a resposta.

#### 4.6 Questão 5

Todos os alunos que forneceram a resposta correta à questão anterior, obtiveram sucesso em relacionar os tempos de queda nesta questão. Porém achamos conveniente destacar a resposta dada por um aluno, pois a nosso ver, este aluno interpretou que o resultado era específico para determinada inclinação. O aluno não foi capaz de raciocinar que os tempos de queda de ambos corpos serão iguais independentemente de suas inclinações.

Eis a resposta do aluno: *Neste caso, os tempos de queda serão iguais, mas caso aumentássemos o ângulo de inclinação do plano da bolinha B ela demoraria mais tempo a cair porque o seno do ângulo não vai mais cancelar.*

#### 4.7 Questão 6

Quando questionados sobre o lugar geométrico dos corpos em questão em um instante de tempo arbitrário, os alunos forneceram respostas diversas. Escolhemos apresentar abaixo exemplos das respostas mais comuns a esta pergunta por ordem de frequência.

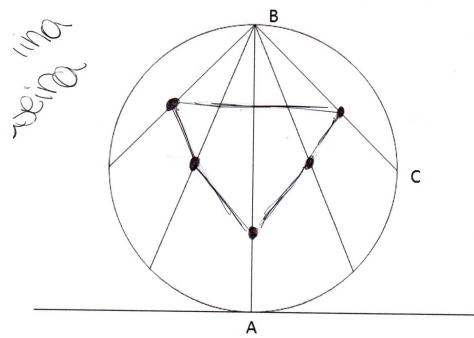


Figura 17: O triângulo foi a forma geométrica mais frequente nas respostas, sendo apresentada por 24 dos 47 alunos.

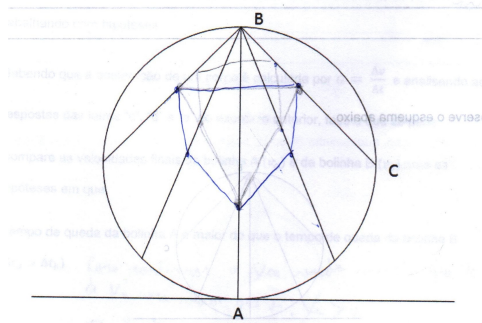


Figura 18: O pentágono foi a figura geométrica escolhida por 11 dos 47 alunos.

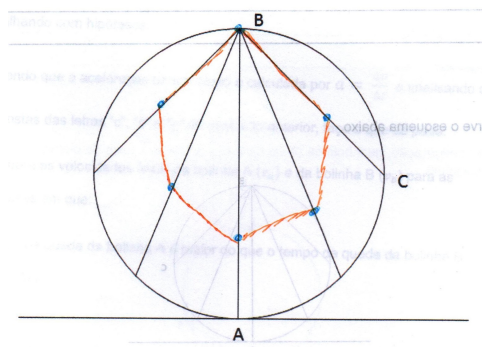


Figura 19: O hexágono foi a terceira figura geométrica mais escolhida, estando nas respostas de 5 dos 47 alunos.

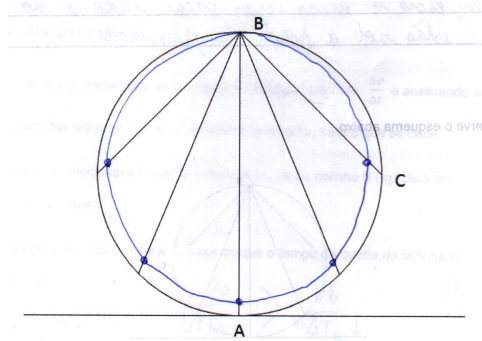


Figura 20: O círculo foi corretamente apontado como resposta por 3 alunos.

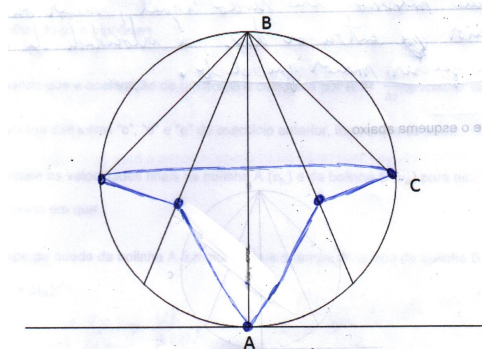


Figura 21: Figura geométrica menos frequente, apresentada por um aluno apenas.