



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO**  
Instituto de Física  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física  
Mestrado Profissional em Ensino de Física

## CINEMÁTICA DAS CORRIDAS DE ATLETISMO

José Luiz dos Santos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador: Carlos Eduardo Aguiar

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2012

# CINEMÁTICA DAS CORRIDAS DE ATLETISMO

José Luiz dos Santos

Orientador: Carlos Eduardo Aguiar

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Aprovada por:

---

Dr. Carlos Eduardo Aguiar (Presidente)

---

Dr. Alexandre Carlos Tort

---

Dr. Vitor Luiz Bastos de Jesus

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2012

## FICHA CATALOGRÁFICA

S237c Santos, José Luiz dos  
Cinemática das Corridas de Atletismo / José Luiz dos Santos -  
Rio de Janeiro: UFRJ / IF, 2012.  
viii, 56 f.: il.;30cm.  
Orientador: Carlos Eduardo Aguiar  
Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Física /  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2012.  
Referências Bibliográficas: f. 55-56.  
1. Ensino de Física. 2. Cinemática. 3. Física dos esportes. I.  
Aguiar, Carlos Eduardo. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro,  
Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física.  
III. Cinemática das Corridas de Atletismo.

Dedico esta dissertação aos professores que sonham por um ensino melhor e se esforçam para tornar seus sonhos realidade.

## **Agradecimentos**

Aos meus pais Oswaldo Luiz (*in memoriam*) e Dory, pela formação que tenho.

À minha esposa, cúmplice e companheira Gláucia, pelo estímulo e apoio na minha caminhada tanto pessoal quanto profissional.

Aos meus filhos Gabriel Luiz, Matheus Luiz e Bárbara, pela compreensão da minha ausência em alguns momentos nos últimos três anos.

À minha nora Lara, pela revisão de português desta dissertação e ao meu neto Salomão Luiz, que trouxe mais jovialidade e alegria à minha família.

Aos companheiros e amigos de jornada, professores Tobias, Walter e Renato Aranha que me incentivaram a fazer este curso e colaboraram com opiniões sobre o tema deste trabalho.

Aos colegas de turma, pelos momentos compartilhados ao retornarmos aos bancos escolares como alunos.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da UFRJ, pois me apresentaram uma nova visão sobre o ensino de física.

E, finalmente, agradeço ao grande professor e orientador Carlos, pela dedicação, incentivo, paciência e paixão para ensinar a Física com qualidade, atributos contagiantes.

# RESUMO

## CINEMÁTICA DAS CORRIDAS DE ATLETISMO

José Luiz dos Santos

Orientador: Carlos Eduardo Aguiar

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

O ensino da cinemática costuma ocupar boa parte de um ano letivo nas escolas brasileiras. Apesar do tempo que lhe é dedicado, o tema desperta pouco entusiasmo nos professores e menos ainda nos estudantes. Uma parte do problema parece ser a ênfase excessiva dada aos aspectos mais matemáticos e formais da cinemática, sem relacioná-la a situações interessantes ou utilizá-la para responder questões práticas. Nesta dissertação tomamos um exemplo da física dos esportes para mostrar como a cinemática pode ser usada em atividades de modelagem e investigação que atraem a atenção dos alunos. Estudamos as provas de velocidade no atletismo e introduzimos um modelo puramente cinemático para descrever essas competições. O modelo tem parâmetros que dão informações úteis sobre a performance de atletas e faz previsões que estão de acordo com os resultados obtidos nas pistas. Nós verificamos que alunos do ensino médio compreendem o modelo com facilidade e são capazes de aplicá-lo a uma variedade de situações.

Palavras-chave: Ensino de Física, cinemática, física dos esportes.

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2012

# **ABSTRACT**

## **KINEMATICS OF ATHLETIC RUNNING**

José Luiz dos Santos

Supervisor: Carlos Eduardo Aguiar

Abstract of master's thesis submitted to Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, in partial fulfillment of the requirements for the degree Mestre em Ensino de Física.

The teaching of kinematics often takes the major part of one year in Brazilian high schools. In spite of this, the subject raises little enthusiasm among teachers, and even less among students. Part of the problem seems to be an excessive emphasis on the formal and mathematical aspects of kinematics, and a lack of applications to 'real world' situations, addressing questions that are interesting to the students. In this dissertation we take an example from the physics of sports and show how kinematics can be used in modeling and investigative activities that attract the students' attention. We study sprint races in athletics and introduce a model for these competitions, based solely on kinematics. The model has parameters that give useful information about runners' performances, and makes predictions that are in good agreement with track results. We have verified that high school students can easily understand the model and apply it in many different situations.

Keywords: Physics education, kinematics, physics of sports

Rio de Janeiro  
February, 2012

## Sumário

Capítulo 1	Introdução .....	1
Capítulo 2	Ensino e Aprendizagem de Cinemática .....	5
Capítulo 3	Um Modelo Cinemático para Corridas de Atletismo .....	14
3.1	Modelos dinâmicos de corridas .....	14
3.2	Um modelo cinemático para corridas .....	19
3.3	Recordes mundiais masculinos em provas de velocidade .....	22
3.4	Provas não-tradicionais: previsões do modelo .....	23
3.5	Qual é a prova mais veloz do atletismo? .....	24
Capítulo 4	Atividades Escolares sobre a Cinemática das Corridas .....	26
Capítulo 5	Conclusões .....	32
Apêndice A	Cinemática das Corridas: Roteiro para o Professor .....	35
Apêndice B	Cinemática das Corridas: Roteiro Didático para os Alunos .....	41
I.	Introdução .....	41
II.	Um modelo cinemático para corridas .....	41
III.	Aplicação do modelo aos recordistas mundiais .....	42
IV.	Previsões do modelo .....	44
Tempos em provas não-olímpicas .....	44	
O homem mais rápido do mundo .....	45	
V.	Para os alunos realizarem .....	46
Mãos na massa .....	46	
Apêndice C	Resultados das Análises dos Alunos .....	47
Recordes mundiais masculinos .....	47	
Recordes mundiais femininos .....	48	
Recordes mundiais masculinos júnior .....	49	
Recordes mundiais femininos júnior .....	50	
Recordes sul-americanos masculinos .....	51	
Recordes sul-americanos femininos .....	52	
Recordes sul-americanos juvenis masculinos .....	53	
Recordes sul-americanos juvenis femininos .....	54	
Referências Bibliográficas .....	55	



# Capítulo 1

## Introdução

*“O estudo do movimento, que é a base de toda a Física, trata das questões: onde? e quando?”* R. P. Feynman [Feynman 1964]

Quando se trata do estudo dos movimentos, pressupõe-se descrevê-lo e investigar suas causas. A descrição do movimento é o foco da cinemática; para tanto é necessário definir as grandezas relevantes, estabelecer relações entre estas e determinar e as condições para medi-las.

O ensino da cinemática no Brasil tem recebido muitas críticas nas últimas décadas. Pontuamos abaixo as mais comuns:

- o ensino de cinemática costuma tomar tempo demasiado, de 1/6 a 1/3 de todo o curso de física do ensino médio;
- as expressões matemáticas, a terminologia e os algoritmos utilizados na cinemática são pouco significativos e confusos para os alunos, e os movimentos estudados são muito específicos;
- os exercícios são apresentados como matemática aplicada, e seu objetivo fundamental parece ser o de treinar o estudante na resolução de problemas algébricos sem vínculo com a experiência cotidiana;
- o conteúdo de cinemática perdura nos cursos de física do ensino médio brasileiro porque há exames de vestibulares que cobram tal assunto;
- a cinemática tem muito pouco a ver com o restante da física e não é pré-requisito essencial para o estudo dos demais conteúdos do currículo [Gaspar 1994, citando o prof. Luiz Carlos Menezes].
- não é relevante para a compreensão do mundo e da própria Física. [SEE/RJ 2012].

Essas críticas são, até certo ponto, válidas. Concordamos que se leva muito tempo a ensinar cinemática, e a ensiná-la mal, com ênfase em fórmulas, nomenclaturas e algoritmos mal compreendidos pelos alunos, e com poucas aplicações capazes de despertar interesse.

Entretanto, é no mínimo um exagero afirmar que os conceitos desenvolvidos no estudo da cinemática têm pouca importância ou utilidade. A cinemática não é um conjunto arbitrário de definições. Conceitos como os de referencial, trajetória e taxa instantânea de variação estão entre as ideias mais importantes já produzidas pela ciência. É difícil imaginar uma abordagem compreensiva da física que não inclua a discussão desses conceitos básicos.

A compreensão precária dos conceitos da cinemática pode criar empecilhos ao estudo de muitos temas de física básica. Trowbridge e McDermott observam que “*as dificuldades encontradas em compreender a dinâmica podem residir na não compreensão dos conceitos de cinemática*” [Trowbridge 1980, tradução livre]. Como compreender, por exemplo, que a força é o agente físico capaz de provocar mudança na velocidade, se não se sabe bem o que é velocidade? Os conceitos de velocidade e aceleração instantânea são fundamentais para a compreensão da dinâmica, e a própria ideia de taxa de variação, subjacente a esses conceitos, é essencial em muitas áreas da física.

Além de desempenhar um papel estrutural na física, os conceitos estudados na cinemática têm uma utilidade prática que nem sempre é reconhecida. Há um grande número de questões de interesse real que podem ser respondidas com as ferramentas da cinemática, sem necessidade de recurso a modelos dinâmicos mais complicados. Infelizmente, essas aplicações raramente são encontradas nos cursos introdutórios de física, onde geralmente são substituídas pelos problemas puramente matemáticos que tanta crítica despertam.

Neste trabalho nós propomos uma aplicação da cinemática a competições esportivas. Apresentaremos um modelo para corridas de atletismo que utiliza apenas conceitos de cinemática: tempo, distância e velocidade. O modelo permite responder questões sobre a performance de corredores, profissionais ou não, que podem interessar a muitos alunos. Por exemplo, podemos encontrar a velocidade máxima que um atleta de ponta consegue atingir, quanto tempo ele perde na largada, e a que distância os efeitos do desgaste físico se manifestam.

Como veremos, os estudantes podem aplicar o modelo para fazer análises e previsões sobre o desempenho de atletas profissionais, de um grupo de colegas de escola e até deles próprios. O modelo também pode ser utilizado em outros tipos de competição, como corridas de cavalo ou provas de natação [Santos 2011].

Aplicações de conceitos de física a corridas não são novidade. Há vários modelos físicos desenvolvidos para analisar as performances de atletas em corridas de atletismo [Keller 1973, Pritchardt 1993, Tibshirani 1997, Mureika 2000, Heck 2009]. Entretanto, o ponto de partida de quase todos esses modelos é a dinâmica, ou seja, a segunda lei de Newton. Isso dificulta sua compreensão por alunos do ensino médio, pois os resultados dependem de integração de uma equação de movimento, tema pouco familiar a esses estudantes. A vantagem de um modelo cinemático como o que propomos é que apenas ferramentas matemáticas estudadas no ensino médio são utilizadas. Apesar de sua simplicidade, veremos que o modelo cinemático é bastante poderoso, capaz de fazer previsões interessantes que são confirmadas por observações.

Nossa motivação, é claro, não se resume a descrever corridas. O principal objetivo do trabalho é mostrar aos estudantes como a cinemática pode ser aplicada a problemas reais e interessantes. A escolha de um tema esportivo é particularmente adequada a esse objetivo, pois o assunto sempre atrai a atenção dos alunos.

Outro aspecto a ser ressaltado na proposta é que ela envolve modelagem matemática. É importante apresentar aos alunos do ensino médio a ideia de que fenômenos físicos (mesmo os esportivos) podem ser modelados matematicamente, e dar a eles uma noção de como isso é feito. Nosso modelo de corridas é um exemplo de que essa abordagem pode ser útil e instrutiva.

Esta dissertação está desenvolvida da seguinte maneira. No capítulo 2 apresentamos e discutimos alguns dos trabalhos básicos sobre o ensino e aprendizagem em cinemática. Concentraremos nossa atenção nas contribuições de Lillian C. McDermott e colaboradores [Trowbridge 1980, Rosenquist 1987] e de Arnold B. Arons [Arons 1997], todos da Universidade de Washington. No capítulo 3 desenvolvemos e aplicamos nosso modelo cinemático das corridas de atletismo. Algumas previsões do modelo (por exemplo, qual a prova mais veloz) são apresentadas e comparadas aos resultados existentes. Também fazemos uma revisão dos modelos dinâmicos para corridas atléticas, no início desse capítulo. No capítulo 4 mostramos os resultados que alunos do ensino médio obtiveram ao aplicar o modelo cinemático a diferentes classes de corridas. No capítulo 5 apresentamos nossas considerações finais. O roteiro de atividades seguido pelos alunos está nos apêndices A e B, e os resultados obtidos por eles encontram-se no apêndice C.

Parte dos resultados apresentados nesta dissertação está em um artigo apresentado no XIX Simpósio Nacional de Ensino de Física (Manaus, 2011) e publicado nos anais dessa conferência [Santos 2011].

## Capítulo 2

### Ensino e Aprendizagem de Cinemática

*“De todas as barreiras intelectuais que a mente humana tem confrontado e superou nos últimos 1.500 anos o que me parece ter sido o mais surpreendente em caráter e o mais estupendo no âmbito de suas conseqüências é a relativa ao problema do movimento.”*

H. Butterfield, historiador e filósofo britânico [Arons 1997]

Um grande número de professores de física julga que conceitos como posição, tempo e velocidade sejam triviais e de fácil compreensão pelos alunos, mas investigações cuidadosas sobre a aprendizagem de cinemática não confirmam esse ponto de vista.

McDermott e Trowbridge realizaram uma pesquisa com mais de trezentos estudantes para verificar com que grau de sucesso eles aplicavam os conceitos de cinemática, em especial o de velocidade em uma dimensão. Os alunos estavam inscritos em diferentes cursos introdutórios de física da Universidade de Washington. O grupo de estudantes incluía professores em exercício na escola elementar. Uma das principais conclusões do estudo foi que um grande número de alunos era incapaz de distinguir os conceitos de posição e velocidade [Trowbridge 1980]. Por exemplo, para muitos estudantes, se dois móveis estão lado a lado num determinado instante, então nesse momento eles têm a mesma velocidade.

A pesquisa foi realizada essencialmente através de duas entrevistas com demonstrações, semelhantes às entrevistas clínicas de Piaget. As entrevistas tinham a mesma estrutura: em ambas eram comparadas as velocidades de duas esferas em movimentos observados pelos entrevistados.

Na primeira entrevista foram apresentadas aos alunos duas esferas, A e B, que se moviam sobre trilhos colocados lado a lado, como mostra o esquema da figura 2.1.

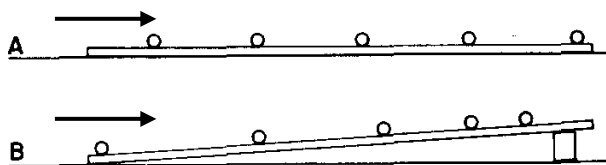


Figura 2.1: Primeira comparação de velocidades. O movimento é da esquerda para a direita e as esferas se cruzam duas vezes. As posições sucessivas são mostradas como se fossem uma fotografia estroboscópica. Adaptado de [Trowbridge 1980].

Inicialmente o entrevistador apresentava o material e lançava a esfera A. Decorrido certo intervalo de tempo, lançava a esfera B. O entrevistado observava os movimentos e respondia a uma sequência de perguntas. Reproduzimos uma parte das mesmas a seguir, sendo E o entrevistador e A o aluno:

*E – Vamos ver se essas duas esferas têm em algum instante a mesma velocidade. (As esferas são lançadas.)*

*A – Parece que elas têm a mesma velocidade em dois momentos. Um, a cerca de 1/4 da rampa inclinada, e o outro a 3/4 da mesma rampa.*

*E – Como você pode afirmar isso?*

*A – Porque as duas esferas se encontram na mesma posição.*

*E – (Aluno é convidado a colocar marcadores ao longo da trilha, ao lado desses pontos. A demonstração é repetida três vezes.)*

*A – Ambas alcançaram a marca ao mesmo tempo. Mas antes disso, A estava deslocando-se mais rapidamente. Depois, B é a mais rápida.*

*E – E aqui, quando elas estão lado a lado, o que você pode dizer sobre velocidade delas naquele instante?*

*A – Elas seriam as mesmas.*

[Trowbridge 1980, tradução livre]

O gráfico da figura 2.2, que não foi mostrado durante a entrevista, representa a posição em função do tempo de cada bola.

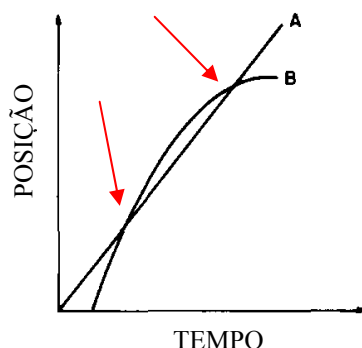


Figura 2.2: Gráfico posição  $\times$  tempo dos movimentos na primeira comparação de velocidades. Adaptado de [Trowbridge 1980].

Durante o movimento as esferas se encontram duas vezes, conforme indicam as setas no gráfico da figura 2.2. Justamente nesses pontos um número considerável de alunos afirmava que as bolas possuíam a mesma velocidade.

Na segunda entrevista, duas esferas, B e C, eram lançadas em dois planos inclinados colocados um ao lado do outro, como mostrado na figura 2.3. Os movimentos são da esquerda para a direita, de modo que a esfera B está subindo a rampa e a C está descendo. A esfera C é solta de uma posição abaixo do ponto mais alto

do plano inclinado e a esfera B é lançada após certo tempo do ponto mais baixo de seu respectivo plano. Os movimentos estão esquematizados na figura 2.3.

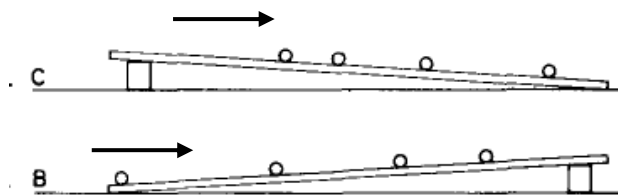


Figura 2.3. Segunda comparação de velocidades. O movimento é da esquerda para a direita e as duas esferas não se cruzam. Posições sucessivas são mostradas numa fotografia estroboscópica. Adaptado de [Trowbrige 1980].

O gráfico da figura 2.4, que não foi apresentado durante a segunda entrevista, representa a posição das esferas em função do tempo. Fica evidente que as esferas não se cruzam.

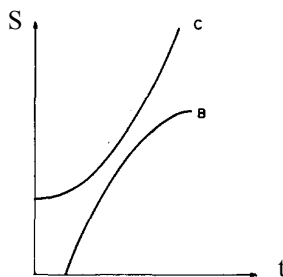


Figura 2.4. Gráfico posição  $\times$  tempo dos movimentos na segunda comparação de velocidades. Adaptado de [Trowbrige 1980].

Um padrão de respostas comum nessa entrevista foi que as esferas nunca tinham a mesma velocidade, pois nunca se cruzavam. O trecho abaixo evidencia isso:

*E – Vamos ver se essas duas esferas têm em algum instante a mesma velocidade. (As esferas são lançadas)*

*A – Não.*

*E – Como você pode ter certeza de que elas não têm a mesma velocidade?*

*A – Porque elas nunca se cruzam, nunca ficam alinhadas.*

[Trowbridge 1980, tradução livre]

Esse padrão revela uma semelhança notável com a crença, já encontrada na primeira entrevista, de que a posição relativa pode ser usada para comparar velocidades. Mesmo descrevendo o comportamento das velocidades das esferas B e C (a velocidade da esfera C aumenta a partir de zero e a da esfera B diminui para zero), os alunos argumentam que elas não possuem a mesma velocidade em nenhum momento, pois nunca se cruzam.

A partir dos resultados das entrevistas, os autores elaboraram questões para um exame escrito convencional, com o intuito estudar melhor a confusão entre posição e velocidade. As questões do exame deveriam ser respondidas da seguinte forma: “*Diga se as seguintes afirmações são SEMPRE verdadeiras. Se a declaração não é sempre verdadeira, dê um exemplo no qual ela é falsa. Em ambos os casos, explique o seu raciocínio*”.

Duas questões foram particularmente reveladoras. A primeira era: “*Na auto-estrada, se dois carros alcançam a mesma velocidade, então eles devem estar lado a lado*”. E a segunda: “*Se dois objetos alcançam a mesma posição no mesmo instante, então eles devem ter a mesma velocidade nesse instante*”.

A confusão entre posição e velocidade se repetiu nas respostas a essas questões. Por exemplo, ao responder à primeira pergunta, um aluno afirmou: “*Sim, é sempre verdade. Se dois carros atingem a mesma velocidade eles poderiam estar lado a lado*”. Uma parcela significativa dos estudantes não deu resposta correta à segunda questão, que estava no exame final do curso. Uma das respostas foi: “*Objetos não podem realmente ter velocidade num determinado instante; para a velocidade ser calculada, deve haver um intervalo de tempo. Num instante os objetos não têm velocidade, apenas posição.*”

Analisando mais de trezentas entrevistas, os autores registraram que, antes da instrução e dependendo do grupo, de 30% a 60% dos estudantes não tiveram sucesso nas comparações de velocidade. Após a instrução, que em alguns grupos enfatizou diretamente a diferença entre posição e velocidade, a faixa de insucesso ficou entre 10% e 30%. Resultados semelhantes foram encontrados em outras universidades americanas, utilizando versões escritas ou simulações em computador dos testes de comparação de velocidade [Halloun 1985, Hewson 1985].

Trowbrige e McDermott também investigaram como o conceito de aceleração é compreendido por estudantes universitários [Trowbridge 1981]. Várias dificuldades conceituais foram identificadas, destacando-se a confusão entre velocidade e aceleração, semelhante à observada para posição e velocidade.

Como base nesses estudos, Trowbridge e McDermott observam que:

- Para haver aquisição de novos conceitos, é importante que a instrução estabeleça uma forte conexão entre esses conceitos e as noções intuitivas dos estudantes. Um esforço consciente deve ser feito para ajudar os



alunos nessa conexão, em especial se a instrução visa torná-los capazes de aplicar corretamente esses conceitos em situações reais.

- Deve-se ter muito cuidado com o vocabulário específico que a física utiliza, pois as mesmas palavras são usadas no cotidiano dos estudantes com outros significados.
- A habilidade para resolver problemas convencionais nem sempre indica compreensão conceitual. Apenas alguns tipos de perguntas testam a capacidade de distinguir conceitos e aplicá-los a situações reais.

Uma possível interpretação dos resultados de Trowbridge e McDermott – não sugerida por esses autores, é importante ressaltar – é que a confusão entre posição e velocidade tem origem na ideia de que “o mais rápido anda na frente”. Há um grande número de situações onde, pelo menos no longo prazo, isso de fato acontece. Se essa ocorrência for indevidamente generalizada, o resultado pode ser um critério de comparação de velocidades baseado em posições: o mais lento está atrás, o mais veloz à frente. Uma extensão “lógica” de tal critério é que mesma posição significa mesma velocidade.

A relação entre posição relativa e velocidade é, provavelmente, reforçada pela noção igualmente equivocada de que velocidade só faz sentido para intervalos de tempo finitos. Assim, dado tempo suficiente, o móvel mais rápido acaba sempre à frente do mais lento. A conexão entre essas duas dificuldades conceituais foi bem ilustrada pelo estudante que afirmou que “*num instante os objetos não têm velocidade, apenas posição*” em resposta à questão sobre se mesma posição implicava em mesma velocidade. Outra afirmativa reveladora foi relatada por Halloun e Hestenes [Halloun 1985]. Segundo eles, um estudante afirmou que “*já que eles se encontram... eles se encontram durante certo período, não interessa quão pequeno seja... durante esse período eles estão na mesma posição, eles devem ter a mesma velocidade, do contrário não poderiam ter se encontrado!*”.

Rosenquist e McDermott desenvolveram uma abordagem conceitual para o ensino de cinemática, que busca superar as dificuldades descritas acima [Rosenquist 1987]. O método de instrução proposto por eles é baseado na observação de movimentos *reais* pelos estudantes. Estes são estimulados a desenvolver uma compreensão qualitativa da velocidade enquanto quantidade que varia continuamente, a entender velocidade instantânea como um limite, a distinguir os conceitos de posição,

velocidade, mudança de velocidade e aceleração, e a fazer conexões entre esses conceitos cinemáticos, suas representações gráficas e movimentos reais de objetos.

Por exemplo, para introduzir o conceito de velocidade instantânea, Rosenquist e McDermott propuseram aos estudantes analisar o movimento acelerado de um carrinho “gotejador”. O movimento do carrinho é retilíneo e ocorre sobre uma fita de papel de aproximadamente 1 metro. O carrinho produz marcas sobre a fita com frequência constante (60 por segundo), registrando posições sucessivas durante cerca de 2 segundos. Os estudantes observam que os espaços entre as marcas aumentam durante o movimento, evidenciando que o movimento é acelerado. A figura 2.5(a) mostra pontos no início e no final da fita, e o aumento do espaçamento é claramente visível. Os dois trechos mostrados na figura 2.5(b) estão mais próximos, a cerca de 0,5 s um do outro. O espaçamento entre as marcas já não se modifica tanto, mas o aumento ainda é perceptível. O trecho mostrado na figura 2.5(c) corresponde a apenas 0,1 s, e ao longo dele o espaçamento mantém-se praticamente inalterado.

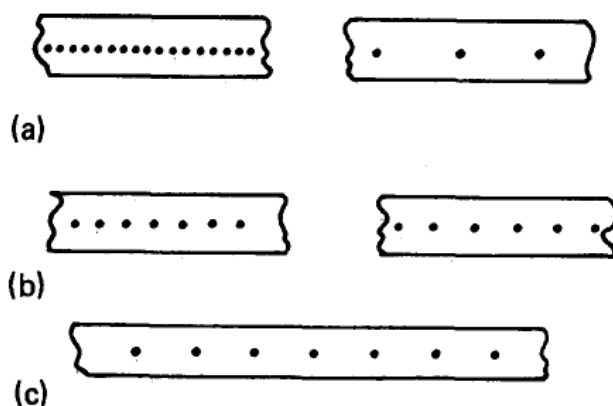


Figura 2.5: Marcas feitas pelo carrinho na fita de papel, ao início e final de diferentes intervalos de tempo. Marcas sucessivas estão separadas por  $1/60$  s. Em (a) o intervalo entre os dois trechos mostrados é de cerca de 2 s; em (b) o intervalo é da ordem de 0,5 s. Em (c) o trecho único corresponde a 0,1 s. Nesse pequeno intervalo de tempo, o movimento pode ser considerado uniforme. Adaptado de [Rosenquist 1987].

Quando os estudantes reconhecem que o movimento num intervalo suficientemente pequeno é praticamente uniforme, a velocidade instantânea pode ser definida operacionalmente da seguinte forma: Para calcular a velocidade de um objeto num determinado instante, examine intervalos cada vez menores centrados nesse ponto. Quando o espaçamento entre pontos sucessivos num intervalo for perceptivelmente uniforme, divida a distância percorrida pelo tempo gasto no percurso. Uma das

vantagens desse método, segundo por Rosenquist e McDermott, é que o processo de limite é tornado mais concreto pelo procedimento visual adotado.

A interpretação gráfica da velocidade instantânea é abordada de maneira análoga por Rosenquist e McDermott. Como no experimento do carrinho, os estudantes analisam o movimento em intervalos de tempo cada vez menores. Eles primeiro estudam o movimento mostrado na figura 2.6(a), que subentende um intervalo de tempo longo. Os alunos podem notar que durante esse intervalo o movimento é claramente não-uniforme. Em seguida eles refazem o gráfico, representando uma pequena parte dele numa escala 10 vezes maior. O resultado é semelhante ao da figura 2.6(b); ainda se observa uma curva, porém menos acentuada. Ou seja, o movimento não é uniforme nesse intervalo. Quando uma parte desse gráfico é novamente ampliada por um fator 10, o gráfico resultante fica semelhante ao da figura 2.6(c), aproximando-se bastante de uma reta. Essa linha reta é então identificada com a tangente à curva no ponto central do (último) intervalo. Os estudantes calculam em seguida o valor de  $\Delta x/\Delta t$  para esse intervalo e identificam essa quantidade com a velocidade instantânea no ponto central. Assim como no caso do carrinho, o procedimento gráfico mostra concretamente o surgimento de um limite a partir do qual a velocidade instantânea pode ser definida.

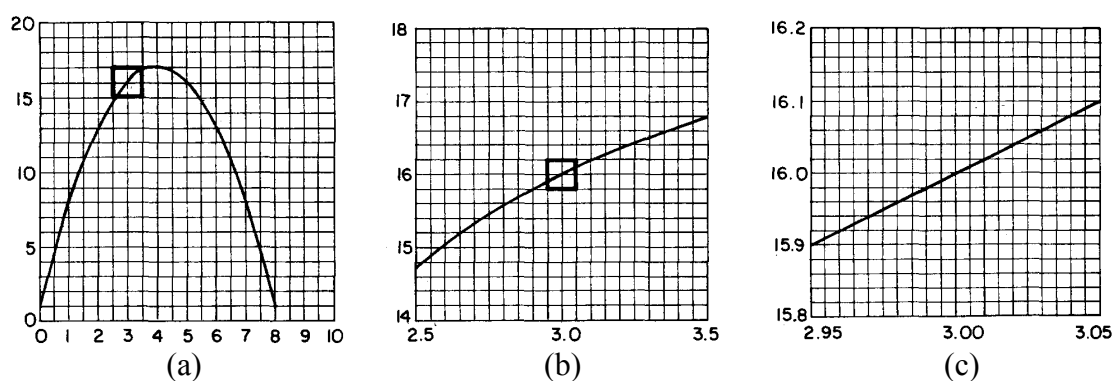


Figura 2.6: Gráfico da posição  $\times$  tempo de um movimento acelerado observado em três intervalos de tempo distintos. Em (a) todo o movimento é mostrado. Em (b) apenas uma pequena parte desse movimento é mostrada, correspondente ao retângulo em destaque na figura anterior. Em (c), uma nova ampliação é feita. Nesse último intervalo o gráfico é praticamente uma reta. Adaptado de [Rosenquist 1987].

A proposta instrucional de Rosenquist e McDermott vai bem além do ensino de velocidade instantânea. As dificuldades conceituais que já mencionamos, e outras, são explicitamente tratadas, em particular a confusão entre posição e velocidade, a distinção entre velocidade, mudança de velocidade e aceleração, e a conexão entre gráficos, conceitos e movimentos de objetos reais. É importante notar que a proposta de

Rosenquist e McDermott foi formulada na década de 1980. Nos anos seguintes foram desenvolvidas ou popularizadas várias tecnologias que simplificaram muito a análise de movimentos reais. Entre estas se destacam os vídeos digitais e programas para sua análise, que substituem com grande vantagem instrumentos como o “carrinho gotejador” [Dias 2009, 2011].

Em seu livro *Teaching Introductory Physics* [Arons 1997], Arnold B. Arons discute um tipo diferente de dificuldade, mais geral, mas que exerce forte influência sobre a aprendizagem de cinemática: a falta de compreensão demonstrada por muitos alunos sobre o que significa tomar a razão de duas quantidades. Embora Arons refira-se a alunos americanos, nossa experiência é que o mesmo problema é maciçamente encontrado entre estudantes brasileiros, principalmente na educação básica,

No caso mais simples mencionado por Arons, a razão entre dois números sem significado físico específico, a maior parte dos estudantes não reconhece, por exemplo, que  $15/4$  é o número de vezes que 4 está contido em 15. Muitos alunos memorizaram o algoritmo de divisão, mas não reconhecem que este é uma forma eficiente de contar sucessivas subtrações de 4 em 15. Quando lidam com a razão de grandezas físicas de mesma dimensão, dois comprimentos  $a$  e  $b$ , por exemplo, os estudantes não percebem que o valor de  $a/b$  informa quantas vezes um comprimento é maior que o outro. A razão entre grandezas com dimensões diferentes, como distância e tempo, é ainda mais complicada, aponta Arons. Poucos reconhecem que o resultado da divisão diz quanto da grandeza representada no numerador está associado a uma unidade da grandeza no denominador. O efeito dessas dificuldades “matemáticas” sobre a aprendizagem de cinemática é evidente, pois conceitos como o de velocidade e aceleração envolvem razões de quantidades dimensionalmente diferentes.

Embora não seja mencionado por Arons, nossa experiência mostra que a “razão inversa”, a troca do numerador pelo denominador, é ainda mais misteriosa para os alunos. Por exemplo, uma velocidade de 0,2 km/min pode ser igualmente descrita como sendo de 5 min/km (um sistema comum entre maratonistas). O primeiro valor fornece quantos quilômetros um móvel percorre em um minuto; o segundo informa quantos minutos ele gasta para percorrer um quilômetro. Poucos alunos reconhecem que as duas quantidades expressam a mesma coisa.

Arons recomenda especial cuidado na escolha das palavras para descrever esses conceitos. Por exemplo, ao invés de falar “20 metros por segundo”, pode ser melhor usar “20 metros a cada segundo”, que transmite melhor o significado dessa quantidade.

Para Arons, elementos linguísticos desempenham papel essencial no desenvolvimento do raciocínio aritmético com razões e proporções. Segundo ele, o fracasso da escola em prover essa experiência linguística é responsável por muitas das dificuldades que os estudantes encontram mais à frente.

Os trabalhos apresentados neste capítulo não esgotam, obviamente, tudo o que já foi investigado e proposto sobre o ensino e aprendizagem de cinemática. Há uma literatura mais ampla sobre o assunto, mas a nosso ver os trabalhos que discutimos dão uma boa idéia das dificuldades conceituais que os estudantes encontram na disciplina, e mostram que existem estratégias didáticas capazes de minimizar esses problemas.

Há um aspecto, entretanto, que não pode ser esquecido: nenhuma estratégia didática será bem sucedida se não despertar nos estudantes interesse pela disciplina. Como foi enfatizado por Marco A. Moreira,

“... uma das condições para a ocorrência da aprendizagem significativa é que o material aprendido seja relacionável (ou incorporável) à estrutura cognitiva do aprendiz, de maneira não arbitrária e não literal. Um material com essa característica é dito *potencialmente significativo*.”

“A outra condição é que o aprendiz manifeste uma disposição para relacionar de maneira substantiva e não-arbitrária o novo material, potencialmente significativo, à sua estrutura cognitiva. Essa condição implica que, independentemente de quão potencialmente significativo seja o material a ser aprendido, se intenção do aprendiz for simplesmente a de memorizá-lo, arbitrária e linearmente, tanto o processo de aprendizagem como seu produto serão mecânicos (ou automáticos).” [Moreira 1999]

Isso é ainda mais importante quando se trata da cinemática, tema reconhecidamente pouco atraente. O desenvolvimento de aplicações da cinemática a problemas capazes de motivar os alunos é essencial se desejamos que eles realizem o esforço necessário à superação de dificuldades como as que discutimos.

O presente trabalho pretende ser uma contribuição nesse sentido. A física dos esportes é um assunto que sempre atrai a atenção dos estudantes, e a aplicação da cinemática à prática esportiva pode ser uma alternativa interessante aos exercícios tediosos e repetitivos que caracterizam a disciplina. No próximo capítulo desenvolveremos um modelo cinemático para corridas de atletismo, e mostraremos que ele pode dar respostas a questões como a velocidade com que o atleta correria se não cansasse, ou qual a prova mais rápida do atletismo (100 ou 200 m?), entre outras. O modelo usa apenas conceitos de cinemática, e é simples o suficiente para ser usado pelos alunos em uma variedade de situações, dando a eles oportunidade para testar e consolidar sua compreensão desses conceitos.

## Capítulo 3

# Um Modelo Cinemático para Corridas de Atletismo

### 3.1 Modelos dinâmicos de corridas

Um dos primeiros modelos de corridas de atletismo foi proposto pelo matemático Joseph B. Keller em 1973 [Keller 1973, Pritchardt 1993]. O modelo é baseado na segunda lei de Newton e na existência de limites fisiológicos ao esforço físico. Segundo Keller, a aceleração de um corredor é dada por

$$\frac{dv}{dt} = f(t) - \frac{v}{\tau}$$

onde  $v$  é a velocidade,  $t$  é o tempo,  $f(t)$  é a força propulsora *por unidade de massa* exercida pelo atleta e  $v/\tau$  é a força de resistência gerada por fatores externos e internos (também por unidade de massa). Por hipótese, a força resistiva aumenta linearmente com a velocidade, e  $\tau$  é um parâmetro do modelo (com unidade de tempo) que caracteriza essa proporcionalidade. No início da corrida o atleta está em repouso, de modo que  $v(0) = 0$ .

A força  $f(t)$  é controlada pelo corredor, que a ajusta para que o tempo de percurso da prova seja o menor possível. Deve haver um valor máximo para  $f(t)$ , pois o corpo humano não pode produzir forças arbitrariamente grandes. Portanto,

$$f(t) \leq F$$

onde  $F$ , a força máxima, é outro parâmetro do modelo. Uma segunda restrição sobre  $f(t)$  vem de considerações energéticas. Se chamarmos de  $E(t)$  à energia (na verdade, o oxigênio) armazenada nos músculos de corredor, temos que, no início da corrida,  $E(0) = E_0$ . Durante a corrida esse valor muda de acordo com

$$\frac{dE}{dt} = -f(t)v + \sigma$$

onde  $f(t)v$  é o trabalho realizado pelo corredor por unidade de tempo (e massa), e  $\sigma$  é a energia extra por unidade de tempo que os sistemas respiratório e circulatório dão aos músculos durante a corrida. Tanto  $E_0$  quanto  $\sigma$  são parâmetros do modelo. Como a energia disponível para a corrida não pode ser negativa, temos

$$E(t) \geq 0$$

que, indiretamente, é uma restrição sobre a força  $f(t)$ .

Segundo o modelo, o problema de um corredor é estabelecer a estratégia de corrida – ou seja, escolher a força  $f(t)$  – de tal forma que o tempo no percurso seja mínimo e as restrições sobre  $f(t)$  sejam respeitadas. Keller mostrou que para provas de curta distância a estratégia ideal é escolher  $f(t) = F$ . Para distâncias maiores essa escolha não pode ser mantida, pois o desgaste físico resultante tornaria a energia  $E$  negativa durante a prova. Nesse caso a estratégia de corrida é mais complexa e  $f(t)$  varia ao longo da prova.

O modelo de Keller tem quatro parâmetros:  $F$ ,  $\tau$ ,  $E_0$  e  $\sigma$ . Estes foram ajustados de modo que o modelo reproduzisse da melhor maneira possível os recordes mundiais masculinos (de 1972) em corridas de 50 a 10.000 metros. Os valores encontrados nesse ajuste foram  $F = 12,2 \text{ m/s}^2$ ,  $\tau = 0,892 \text{ s}$ ,  $E_0 = 575 \text{ cal/kg}$  e  $\sigma = 9,93 \text{ cal/kg/s}$ . Com esses resultados, a maior distância que um atleta poderia percorrer com a estratégia de força máxima,  $f(t) = F$ , seria  $D_c = 291 \text{ m}$ . Acima dessa distância crítica, segundo o modelo, o corredor deve diminuir a força  $f(t)$  em alguma parte da corrida para poupar energia. A determinação da forma exata de  $f(t)$  que minimiza o tempo de corrida é um problema não-trivial de cálculo variacional [Keller 1974, Woodside 1991].

Para corridas de curta distância, onde  $f(t) = F$ , o movimento do atleta pode ser encontrado a partir da equação diferencial

$$\frac{dv}{dt} = F - \frac{v}{\tau},$$

cuja solução é

$$v(t) = F\tau(1 - e^{-t/\tau}).$$

A figura 3.1 mostra o gráfico dessa velocidade para a prova de 220 jardas [Keller 1973].

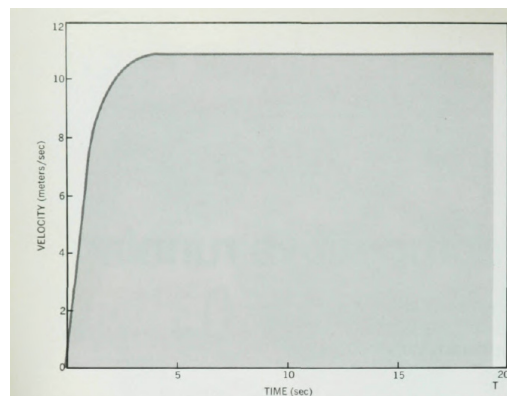


Figura 3.1: Velocidade em uma corrida de 220 jardas. Adaptado de [Keller 1973].

Integrando a velocidade  $v(t)$  encontramos posição do corredor em função do tempo,

$$x(t) = F\tau[t - \tau(1 - e^{-t/\tau})].$$

Daí, obtemos a relação entre a distância da prova,  $D$ , e o tempo  $T$  em que esta é percorrida pelo atleta,

$$D = F\tau[T - \tau(1 - e^{-T/\tau})].$$

A velocidade média ao longo da prova é dada por

$$V_m = \frac{D}{T} = F\tau\left(1 - \frac{\tau}{T}(1 - e^{-T/\tau})\right).$$

A figura 3.2 mostra a velocidade média em provas de até 2.000 m [Keller 1973]. Os pontos são os recordes mundiais masculinos (1972) e a linha é a previsão do modelo de Keller. A “quebra” na linha ocorre em  $D = D_c = 291$  m e marca a mudança do regime de curtas distâncias – no qual  $f(t) = F$  e vale a fórmula da velocidade média dada acima – para o regime de longas distâncias. A concordância entre os dados empíricos e a previsão de Keller é significativa, principalmente se considerarmos a grande variedade de distâncias descritas pelo modelo.

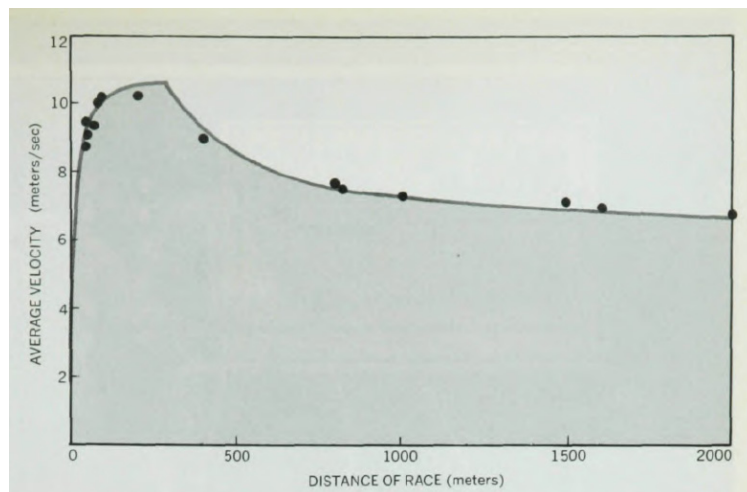


Figura 3.2: Velocidade média em corridas de diferentes distâncias. Os pontos são recordes mundiais masculinos de 1972 e a linha é a previsão do modelo de Keller. Adaptado de [Keller 1973].

No modelo de Keller, provas curtas são corridas com a força máxima  $F$ , uma constante. Em 1997 Tibshirani argumentou que essa força máxima deveria diminuir com o tempo, mesmo para corridas curtas [Tibshirani 1997]. Ele sugeriu que, numa primeira aproximação, a força máxima diminuiria linearmente com o tempo, podendo



ser escrita como  $F - ct$ , onde  $F$  é a força máxima inicial e a constante  $c$  determina a taxa de diminuição. Com isso, a equação de movimento do atleta torna-se

$$\frac{dv}{dt} = F - ct - \frac{v}{\tau},$$

a partir da qual obtemos a velocidade

$$v(t) = k(1 - e^{-t/\tau}) - c\tau t,$$

onde  $k = F\tau + \tau^2 c$ . A posição do atleta é dada por

$$x(t) = k[t - \tau(1 - e^{-t/\tau})] - c\tau t^2 / 2.$$

No modelo de Keller a velocidade aumenta monotonamente, tendendo assintoticamente ao valor máximo  $F\tau$  (veja a figura 3.1). No modelo de Tibshirani a velocidade primeiro cresce e depois diminui lentamente, refletindo a redução da força propulsora. Essa desaceleração ao final da prova é observada na maior parte das corridas [Tibshirani 1997] e está ilustrada na figura 3.3. Devemos notar que, se mantida indefinidamente, a diminuição da velocidade no modelo de Tibshirani acabaria por levar a velocidades negativas (o atleta correndo para trás!). Como o modelo de Tibshirani só se aplica a provas curtas, assim como o modelo de Keller com força constante do qual ele é derivado, as velocidades negativas nunca aparecem.

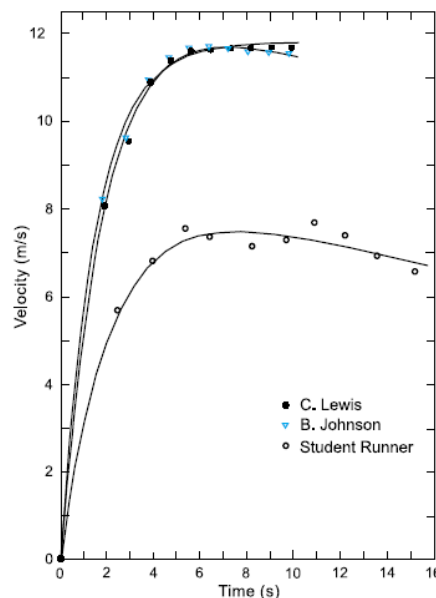


Figura 3.3: Velocidade em corridas de 100 m de dois atletas olímpicos e um estudante. As curvas são previsões do modelo de Tibshirani. Adaptado de [Wagner 1998].

Atividades escolares envolvendo a aplicação do modelo de Tibshirani foram relatadas por Wagner [Wagner 1998]. Com auxílio de um programa de ajuste de curvas, Wagner e seus alunos, em uma escola média canadense, usaram o modelo para analisar

a prova de 100 metros livres das Olimpíadas de 1996 (vencida por Ben Johnson, com Carl Lewis em segundo; posteriormente Johnson foi desclassificado por *doping*). Os alunos também fizeram suas próprias medidas, cronometrando corridas de colegas, e aplicaram o modelo a esses dados. Um desses resultados está mostrado na figura 3.3, assim como os de Lewis e Johnson. Pode-se notar que em todos os casos o modelo de Tibshirani dá uma descrição bem satisfatória.

Outra atividade de ensino envolvendo modelos de corridas está descrita por Heck e Ellermeijer [Heck 2009]. Os autores mostram como estudantes podem obter dados reais filmando corridas e analisá-los com auxílio de simulações computacionais. As simulações são baseadas em modelos como os de Keller ou Tibshirani. Outros modelos de corrida, baseados no balanço energético dos atletas, também são discutidos e aplicados.

Ainda no campo do ensino, Helene e Yamashita [Helene 2009] usaram o modelo de Tibshirani na análise duas corridas em que Usain Bolt bateu o recorde mundial dos 100 m, a primeira em 2008 e a segunda em 2009. Curiosamente, eles encontraram que na corrida de 2009, mais rápida que a de 2008, Bolt gastou menos energia, teve menor aceleração máxima e menor potência máxima.

Os modelos de Keller e Tibshirani são dinâmicos, ou seja, o movimento é calculado com base na segunda lei de Newton a partir da força exercida pelo atleta. Isso significa que, para encontrar em quanto tempo uma prova é corrida, uma equação diferencial tem que ser resolvida. Como cálculo diferencial e integral não é assunto familiar aos estudantes do ensino médio brasileiro, tais modelos dificilmente encontrariam aplicação didática em nossas escolas (no ensino universitário, por outro lado, eles são ótimos exemplos a serem explorados em cursos de mecânica básica). Em corridas de longa distância, a matemática do modelo de Keller envolve o cálculo variacional, deixando de ser acessível até mesmo a alunos dos ciclos básicos universitários.

Na próxima seção discutiremos um modelo de corridas que usa matemática muito mais simples, acessível a alunos do ensino médio. Mais ainda, o modelo é baseado apenas em conceitos de cinemática, e representa uma ótima aplicação desses conceitos a um problema capaz de despertar o interesse dos alunos.

### 3.2 Um modelo cinemático para corridas

As corridas estão entre as competições mais populares do atletismo, e por isso costumam despertar discussão e causar polêmica. Questões frequentemente debatidas são:

- Qual é a velocidade máxima com que o ser humano pode correr?
- A partir de que distância o desgaste físico se torna significativo para um atleta velocista?
- Quanto tempo é perdido no processo de largada das corridas?
- Quem é o homem mais rápido do mundo: o recordista dos 100 ou dos 200 metros rasos?

Algumas dessas questões recebem respostas que parecem obviamente corretas, mas estão erradas. A tabela 3.1 mostra os recordes mundiais masculinos atuais nas corridas de 100, 200 e 400 metros, com suas respectivas velocidades médias. Analisando esses resultados, poderíamos dizer que a velocidade máxima que o ser humano alcança, hoje, é de 10,44 m/s. Entretanto, como veremos mais à frente, esse número é enganador: a velocidade máxima é quase 40% maior.

Distância (m)	Tempo (s)	Recordista	Velocidade média (m/s)
100	9,58	U. Bolt	10,44
200	19,19	U. Bolt	10,42
400	43,18	M. Johnson	9,26

Tabela 3.1: Recordes mundiais atuais (2012) em corridas masculinas de velocidade.

Quanto ao homem mais veloz do mundo, os recordes atuais indicam que é o recordista dos 100 m, Usain Bolt. O fato de Bolt ser o recordista dos 100 e 200 metros simplifica um pouco a discussão, que em outros tempos já foi mais complicada. Em 1996, por exemplo, os recordes mundiais apontavam que a prova de 200 m era mais rápida que a de 100 m, como mostra a tabela 3.2.

Distância (m)	Tempo (s)	Recordista	Velocidade média (m/s)
100	9,84	D. Bailey	10,15
200	19,32	M. Johnson	10,35

Tabela 3.2: Recordes mundiais de 1996 nas corridas masculinas de 100 e 200 metros.

Para alguns, principalmente a imprensa americana, esses resultados sugeriam que o americano Johnson, recordista dos 200 m, era o homem mais veloz do mundo, no lugar do canadense Bailey, recordista dos 100 m (os dois recordes foram obtidos nas Olimpíadas de Atlanta). À época, chegou-se a programar uma competição de 150 m entre os dois para resolver a questão. A prova foi disputada em 1997, em Toronto, mas não chegou ao final, pois Johnson sofreu uma lesão muscular aos 110 m, quando a corrida era liderada por Bailey [Wikipedia-150m 2012].

É claro que uma discussão sobre qual é a prova mais veloz deve envolver o tempo perdido na largada, cujo efeito relativo é mais importante na prova de 100 m que na de 200 m. Entretanto, esse tempo é uma quantidade difícil de avaliar e não é óbvio como seu efeito deve ser considerado.

Essas e outras questões podem ser analisadas com o modelo cinemático que discutiremos a seguir. A idéia básica do modelo é que, após um breve período de aceleração próximo à largada, uma prova de distância  $D$  é corrida pelo atleta a uma velocidade praticamente constante  $V(D)$ , que chamaremos de *velocidade de cruzeiro*. Esta velocidade depende da extensão  $D$  da prova, mas é suposta constante ao longo de uma corrida, após a aceleração no período de largada. Já observamos que as velocidades pós-largada não são exatamente constantes, diminuindo um pouco durante a prova (ver a figura 3.2). Mesmo nesses casos podemos manter o conceito de velocidade de cruzeiro, que seria uma média das velocidades no período após a aceleração inicial.

Com isso, o tempo  $T$  em que a prova é corrida é dado por

$$T = D/V(D) + T_L, \quad (1)$$

onde  $T_L$  é o tempo perdido no processo de largada. Vemos que, devido a esse atraso, em geral a velocidade de cruzeiro  $V(D)$  será diferente da velocidade média na prova,  $V_m = D/T$ .

O tempo de largada  $T_L$  não é o tempo de reação ao sinal de partida.  $T_L$  é a diferença entre o tempo de corrida  $T$  e o tempo que seria obtido se a prova *inteira* fosse percorrida à velocidade de cruzeiro  $V(D)$ . Por exemplo, vamos supor que a velocidade ao longo das provas varie da maneira mostrada na figura 3.4: o atleta mantém aceleração constante até o instante  $T_A$  em que atinge a velocidade de cruzeiro  $V(D)$ ; daí em diante a velocidade permanece inalterada. Neste caso é fácil ver que a duração da prova é  $T = D/V(D) + T_A/2$  e, portanto, o tempo perdido com a largada é a metade do tempo que o atleta leva para chegar à velocidade de cruzeiro:  $T_L = T_A/2$ . É importante

não esquecer que essa relação só vale para o caso extremamente simplificado da figura 3.4.

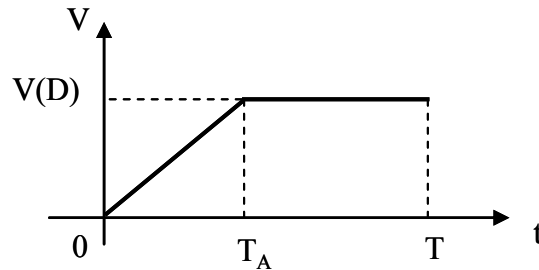


Figura 3.4: Possível variação da velocidade ao longo de uma corrida. Neste caso o tempo perdido na largada,  $T_L$ , é a metade do tempo  $T_A$  durante o qual o atleta acelera.

Ainda devemos especificar como a velocidade de cruzeiro  $V(D)$  depende da distância  $D$ . Nós iremos supor que esta velocidade diminui à medida que a distância aumenta, da seguinte maneira:

$$V(D) = \frac{V_0}{1 + D/\lambda}. \quad (2)$$

Essa expressão para  $V(D)$  possui dois parâmetros,  $V_0$  e  $\lambda$ , cujos significados são importantes. A velocidade  $V_0$  descreve quão rápido os atletas seriam capazes de correr, caso não sofressem desgaste físico. Seu valor é uma boa estimativa para a velocidade máxima que o ser humano pode atingir. O comprimento  $\lambda$  define a que distância o desgaste físico dos velocistas torna-se significativo: para  $D = \lambda$ , a velocidade de cruzeiro é  $V(\lambda) = V_0/2$ , ou seja, a metade da velocidade máxima. A equação (2) não vale para distâncias muito grandes, pois  $V(D)$  tende a zero para  $D \gg \lambda$ . Por isso nosso modelo está restrito apenas às provas de velocidade, onde  $D < \lambda$ .

Substituindo a equação (2) em (1) obtemos um polinômio do 2º grau,

$$T = a_2 D^2 + a_1 D + a_0, \quad (3)$$

onde

$$a_0 = T_L, \quad (4a)$$

$$a_1 = \frac{1}{V_0}, \quad (4b)$$

$$a_2 = \frac{1}{\lambda V_0}. \quad (4c)$$

As equações (1) e (2) – ou, de forma equivalente, as equações (3) e (4) – representam nosso modelo cinemático para corridas. Os parâmetros  $T_L$ ,  $V_0$  e  $\lambda$  devem ser obtidos a partir de dados reais, e variam dependendo do grupo de atletas ou dos indivíduos considerados. Como são três parâmetros, precisamos dos resultados de três provas para determiná-los – escolhemos as provas olímpicas mais curtas, de 100, 200 e 400 metros. A determinação desses parâmetros dá resposta a boa parte das questões sobre corridas que apresentamos no início desta seção. Veremos a seguir quanto eles valem para os atletas mais rápidos de hoje.

### 3.3 Recordes mundiais masculinos em provas de velocidade

A tabela 3.1 mostra os recordes mundiais atuais. Substituindo esses valores de  $D$  e  $T$  na equação (3), obtemos um sistema de três equações e três incógnitas (os parâmetros  $a_0$ ,  $a_1$  e  $a_2$ ). Essas equações podem ser resolvidas sem muita dificuldade e o resultado é  $a_2 = 7,95 \times 10^{-5} \text{ s/m}^2$ ,  $a_1 = 0,0723 \text{ s/m}$  e  $a_0 = 1,56 \text{ s}$ . Das equações (4), temos que  $\lambda = a_1/a_2$ ,  $V_0 = 1/a_1$  e  $T_L = a_0$ , de modo que

$$V_0 = 13,8 \text{ m/s}, \quad (5a)$$

$$\lambda = 909 \text{ m}, \quad (5b)$$

$$T_L = 1,56 \text{ s}. \quad (5c)$$

Como já mencionamos, o conhecimento de  $V_0$ ,  $\lambda$  e  $T_L$  torna possível dar resposta a muitas questões sobre corridas. Por exemplo,

- *Qual é, atualmente, a velocidade máxima com que o ser humano pode correr?*

Uma boa estimativa para esta velocidade é o valor de  $V_0$ , cerca de 14 m/s. Esse resultado é bem superior à velocidade média registrada na prova de 100 metros, que é 10,44 m/s. A velocidade de cruzeiro  $V(D)$  na prova de 100 m é 12,47 m/s, também superior à velocidade média, pois esta última considera o tempo perdido na largada.

- *A partir de que distância o desgaste físico se torna significativo para um atleta velocista?*

Segundo nosso modelo, a redução de velocidade causada pelo desgaste físico é caracterizada pela distância  $\lambda$ , que vale aproximadamente 1 km. É interessante notar que esse valor está na faixa que define as corridas de meia distância, aquelas que estão entre as provas de velocidade e as de fundo.

- *Quanto tempo é perdido durante o processo de largada?*

Essa informação é dada pelo terceiro parâmetro, o tempo de largada  $T_L$ , que vale aproximadamente 1,6 s. Já que  $T_L$  é positivo, os atletas realmente perdem tempo na

largada. Se houvesse ganho, como na natação, o tempo  $T_L$  seria negativo. Como já mencionamos, o atraso  $T_L$  não deve ser confundido com o tempo de reação do atleta ao sinal de partida, que da ordem de 0,1–0,2 s.

- *Qual é a aceleração do atleta durante a largada?*

Uma estimativa razoável pode ser obtida supondo que a aceleração é significativa apenas durante um período de aproximadamente  $2T_L$ , como no exemplo mostrado na figura 3.4. Assim, a aceleração típica durante a largada deve ser da ordem de

$$a \approx \frac{V(D)}{2T_L}. \quad (6)$$

Na prova de 100 m, onde a velocidade de cruzeiro é 12,47 m/s, a aceleração é de aproximadamente  $4,0 \text{ m/s}^2$ . Se fosse possível manter esse valor da aceleração por muito tempo, o ser humano iria de 0 a 100 km/h em 6,9 s. Uma Ferrari faz isso em 3,3 s.

### 3.4 Provas não-tradicionais: previsões do modelo

A figura 3.5 mostra o tempo previsto pelo modelo para provas de diferentes distâncias. Os recordes das provas de 100, 200 e 400 m rasos, que foram usados para definir os parâmetros do modelo, estão mostrados como losangos. Os círculos representam os recordes nas provas não oficiais de 60, 150 e 300 m, listados na tabela 3.3. Vemos que os tempos previstos pelo modelo cinemático estão em ótimo acordo com os resultados dessas provas não-tradicionais.

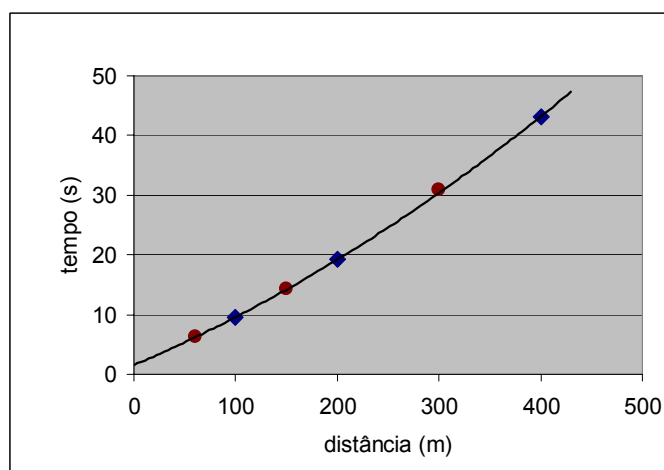


Figura 3.5: Recordes mundiais em corridas de curta distância. A curva representa a previsão do modelo cinemático. Os losangos são os tempos nas provas olímpicas, que foram usados para definir os parâmetros do modelo. Os círculos são os recordes mundiais nas provas não-tradicionais de 60, 150 e 300 metros.

D (m)	T (s)	T <sub>mod</sub> (s)	Desvio percentual (%)
60	6,39	6,18	3%
150	14,35	14,19	1%
300	30,85	30,42	1%

Tabela 3.3. Comparação entre os recordes em provas não-olímpicas e as previsões do modelo cinemático (T<sub>mod</sub>).

### 3.5 Qual é a prova mais veloz do atletismo?

Ainda não abordamos a questão de qual é a prova mais rápida do atletismo ou, mais exatamente, qual a prova com a maior velocidade média. Já vimos que em algumas épocas (1996, por exemplo) a prova mais rápida foi a de 200 m; hoje, é a de 100 m. Nosso modelo permite jogar alguma luz sobre essa discussão. Nele, a velocidade média de uma prova é dada por

$$V_m = \frac{D}{T} = \frac{D}{D/V(D) + T_L} = \frac{D}{D^2 / (\lambda V_0) + D/V_0 + T_L}, \quad (7)$$

cujo gráfico está mostrado na figura 3.6. Podemos notar que há um máximo na curva da velocidade média em função da distância, em  $D \approx 140$  m. É fácil entender a origem desse máximo. Para corridas muito curtas, boa parte do percurso é feita enquanto o atleta ainda está acelerando, o que reduz a velocidade média. Para corridas longas, o cansaço produz velocidades médias menores. A competição entre esses dois mecanismos de redução da velocidade média, um agindo a curta distância e o outro a longa distância, cria um máximo a distâncias intermediárias.

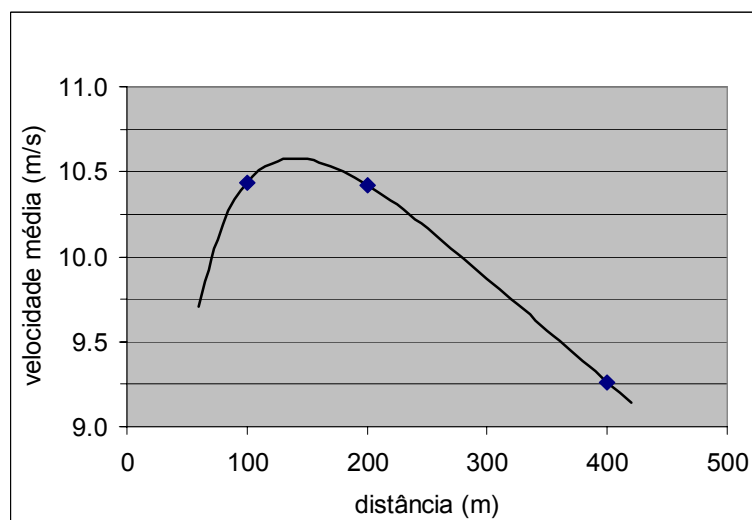


Figura 3.6: Velocidade média dos recordistas mundiais nas provas de curta distância. A curva representa a previsão do modelo cinemático.



Assim, nosso modelo prevê que o homem mais rápido do mundo não é nem o recordista dos 100 m nem o dos 200 m, mas o recordista da prova de 140 m. Como não existem provas oficiais com essa distância, a melhor corrida para indicar o homem mais rápido do mundo é a de 150 m.

A distância  $D_r$  correspondente à corrida mais rápida pode ser determinada encontrando o máximo da equação (7). Fazendo  $dV_m/dD = 0$ , é fácil ver que o máximo está em

$$D_r = \sqrt{\lambda T_L V_0} . \quad (8)$$

Substituindo esse valor na eq. (7), encontramos a velocidade média máxima:

$$V_r = \frac{V_0}{1 + 2\sqrt{T_L V_0 / \lambda}} . \quad (9)$$

Com os parâmetros do modelo (veja a eq. (5)), obtemos  $D_r = 140$  m e  $V_r = 10,55$  m/s.

Numa corrida de exibição em 2009, Usain Bolt percorreu 150 m em 14,35 s, o recorde mundial dessa distância. O resultado corresponde a uma velocidade média de 10,45 m/s, maior que as alcançadas nas corridas recordes dos 100 m (10,44 m/s) e 200 m (10,42 m/s). Esse resultado parece confirmar a previsão de nosso modelo, de que a prova de 150 m seria a mais rápida do mundo. A velocidade de Bolt nos 150 m é menor que a prevista pelo modelo ( $V_r > 10,5$  m/s, como se vê na figura 3.6), o que pode ser explicado por tratar-se de uma prova de exibição, onde não havia motivo para apresentar rendimento máximo. No entanto, é significativo que, mesmo em tais condições, esta seja a prova corrida por Bolt com a maior velocidade média.

É interessante notar que, no modelo de Keller, a velocidade média máxima é alcançada em provas com  $D = D_c \approx 300$  m (veja a figura 3.1). Isso está em flagrante desacordo com os resultados das corridas e deve-se ao fato de, no modelo de Keller, o desgaste físico só aparecer para  $D > D_c$ .

## Capítulo 4

### Atividades Escolares sobre a Cinemática das Corridas

Uma das críticas ao ensino da cinemática é que os exercícios dessa disciplina são apresentados quase sempre como problemas algébricos, e raramente como aplicação de conceitos básicos à análise de situações de interesse real.

Durante o ano de 2010, propusemos a alunos do ensino médio um conjunto de atividades sobre a cinemática das corridas de atletismo, baseadas na aplicação do modelo descrito no capítulo 3. As atividades seguiram os passos delineados a seguir:

1. Entrega a cada aluno de um roteiro (ver apêndice B) onde o modelo é descrito. O roteiro serve de referência, como estudo dirigido, para que os estudantes acompanhem o desenvolvimento do modelo realizado pelo professor em aula expositiva.
2. Começo das atividades, com discussão das questões motivadoras sobre corridas de velocidade contidas na introdução do roteiro.
3. Apresentação do modelo pelo professor.
4. (Re)construção do modelo pelos alunos, sem ajuda do professor, seguindo o roteiro dado.
5. Discussão entre os alunos para esclarecimento de dúvidas sobre o modelo.
6. Apresentação por cada aluno, ou grupo, de sua (re)construção na forma de seminário.
7. Aplicação do modelo em uma ou mais situações diferentes da apresentada no roteiro.
8. Apresentação dos resultados encontrados.

As atividades foram desenvolvidas por três alunos da 3ª série do ensino médio de um colégio público federal do município do Rio de Janeiro. Os três alunos se apresentaram como voluntários. As atividades ocorreram de setembro a novembro de 2010, ocupando duas horas por semana.

Durante as atividades, foram apresentadas aos alunos as hipóteses do modelo e o significado das variáveis mais relevantes. Eles obtiveram o polinômio do 2º grau que descreve a relação entre o tempo e a distância das corridas de velocidade (as equações (3) e (4) do capítulo 3). Um dos alunos não conseguiu chegar a esse resultado, o que foi resolvido com auxílio dos seus colegas.

Os coeficientes do polinômio estão relacionados aos indicadores  $V_0$ ,  $\lambda$  e  $T_L$  da performance dos atletas. Aplicando o modelo com lápis e papel, os alunos obtiveram os valores dos coeficientes e determinaram os indicadores correspondentes aos recordistas mundiais. Reclamaram um pouco da necessidade de resolver um sistema linear de três equações e três incógnitas, pois “*era uma ‘calculera’ danada!*” segundo eles próprios. Após esses cálculos, foi apresentado a eles outro método de obter esses coeficientes, utilizando a planilha *Excel* do *MS Office*. Usando a ferramenta de ajuste de curvas dessa planilha, é fácil passar uma parábola pelos três pontos dados e determinar os valores dos coeficientes “instantaneamente”. Os parâmetros de performance podem ser calculados diretamente na própria planilha a partir dos coeficientes polinomiais encontrados. A planilha também é útil para fazer gráficos e comparar diferentes situações. Os alunos ficaram muito satisfeitos com essas facilidades e passaram a usar a planilha em suas atividades posteriores.

Uma coisa é calcular parâmetros; outra é interpretar o que se calculou. Após determinar os valores dos parâmetros de performance, os alunos foram estimulados a interpretá-los, com auxílio das perguntas motivadoras. Os alunos responderam a essas perguntas com suas próprias palavras.

Na etapa seguinte eles aplicaram o modelo em outras situações, de sua escolha. Fizeram isto com os recordes de diferentes categorias: feminino, junior masculino e feminino, sul-americano masculino e feminino, e sul-americano juvenil masculino e feminino. Mostraremos aqui apenas as análises dos recordes sul-americanos masculinos e femininos. Os demais resultados obtidos pelos alunos estão apresentados no apêndice B.

A tabela 4.1 contém os recordes femininos sul-americanos em provas de velocidade, encontraram pelos estudantes em 2010. Os mesmos resultados estão mostrados na figura 4.1, juntamente com a curva prevista pelo modelo.

Recordes Sul-Americanos Femininos		
Recordistas	D(m)	T(s)
Ana Claudia Lemos Silva	100	11,15
Lucimar Aparecida de Moura	200	22,6
Ximena Restrepo	400	49,64

Tabela 4.1: Recordes sul-americanos femininos em provas de velocidade (2010).

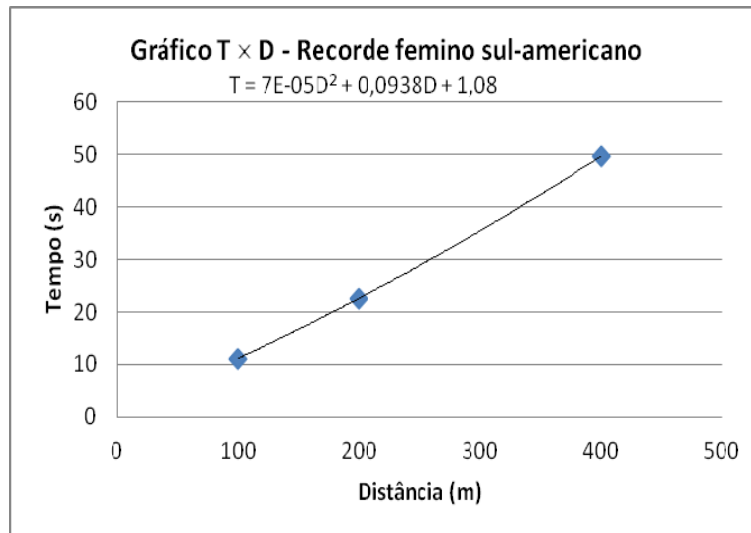


Figura 4.1: Recordes sul-americanos femininos em provas de velocidade (2010).  
 A curva é o polinômio do 2º grau previsto pelo modelo, ajustado aos pontos mostrados. Os coeficientes do polinômio são dados na figura.

Os recordes sul-americanos masculinos estão na tabela 4.2 e na figura 4.2.

Recordes Sul-Americanos Masculinos		
Recordistas	D(m)	T(s)
Robson Caetano da Silva	100	10
Claudinei Quirino da Silva	200	19,89
Sanderlei Claro Parrela	400	44,29

Tabela 4.2: Recordes sul-americanos masculinos em provas de velocidade (2010).

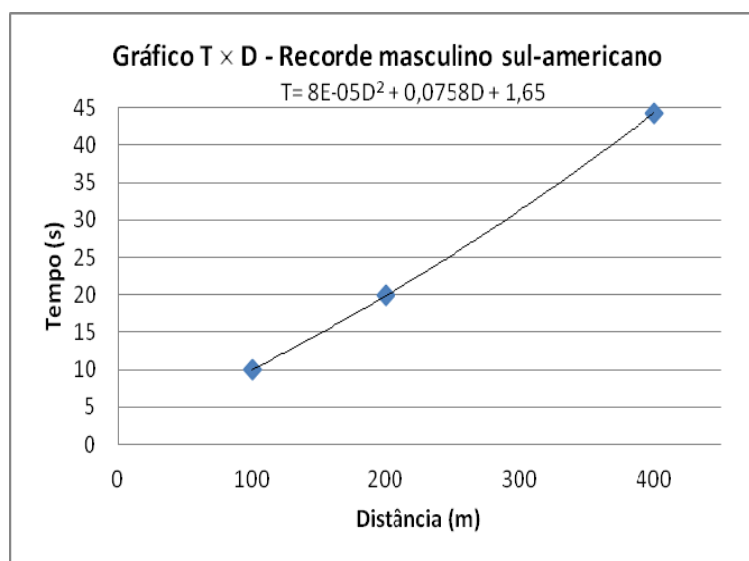


Figura 4.2: Recordes sul-americanos masculinos em provas de velocidade (2010).  
 A curva é o polinômio do 2º grau previsto pelo modelo, ajustado aos pontos mostrados. Os coeficientes do polinômio são dados na figura.

A primeira observação que os alunos fizeram foi que tanto o gráfico quanto a relação cinemática eram do tempo em função da distância, ao contrário do que costumavam encontrar. Esse momento foi útil para discutirmos que tanto a função quanto os eixos dos gráficos devem ser organizados de forma a propiciar a melhor compreensão possível da relação entre as variáveis, de acordo com a conveniência de quem está realizando o estudo.

Usando o *Excel*, os estudantes obtiveram os parâmetros de performance  $V_0$ ,  $\lambda$  e  $T_L$  a partir dos coeficientes polinomiais encontrados nos gráficos. Reproduzimos uma parte dos resultados nas tabelas 4.3 e 4.4. As análises completas dos alunos estão no apêndice B.

Recordistas Femininas Sul-Americanas		
$V_0$	$\lambda$	$T_L$
10,7 m/s	1340 m	1,08 s

Tabela 4.3: Parâmetros de performance das recordistas femininas sul-americanas (2010).

Recordistas Masculinos Sul-Americanos		
$V_0$	$\lambda$	$T_L$
13,2 m/s	948 m	1,65 s

Tabela 4.4: Parâmetros de performance dos recordistas masculinos sul-americanos (2010).

Outra observação importante feita pelos alunos foi que a planilha lhes permitiu economizar tempo nos cálculos, tempo esse que foi usado para a interpretação dos resultados, tarefa que acharam mais difícil conceitualmente.

Ao analisar os parâmetros de performance, os alunos concluíram que as velocidades máximas das mulheres são menores que as dos homens, independente da categoria. Mas ao observar a distância na qual o desgaste físico se torna significativo, surgiu um dado que eles não esperavam: as mulheres eram mais resistentes ao cansaço que os homens, na grande maioria das categorias investigadas. Por exemplo, para os recordistas mundiais,  $\lambda(\text{homens}) = 903 \text{ m}$  e  $\lambda(\text{mulheres}) = 1070 \text{ m}$ . O mesmo ocorre para os recordistas sul-americanos, como se nota nas tabelas 4.3 e 4.4. As mulheres diminuem a velocidade menos que os homens à medida que a distância aumenta. Qual seria a razão?

Outra observação dos alunos foi que, de modo geral, as mulheres gastam menos tempo no processo de largada que os homens, em todas as categorias. Os recordistas mundiais têm  $T_L(\text{homens}) = 1,56 \text{ s}$  e  $T_L(\text{mulheres}) = 1,16 \text{ s}$ , uma diferença muito significativa de 24%. Entre os recordistas sul-americanos a diferença é ainda maior: o tempo de largada das mulheres é 35% menor que o dos homens. Algumas hipóteses foram levantadas pelos alunos para explicar esse fato. Uma idéia foi que as mulheres, tendo uma velocidade máxima menor, gastariam menos tempo para atingi-la. O cálculo das acelerações iniciais (ver a eq. (6) do capítulo 3), entretanto, mostrou que as mulheres aceleram mais que os homens. Para compreender melhor esses resultados, os alunos foram procurar referências com os professores de educação física e biologia. Se há interesse por temas interdisciplinares, a cinemática das corridas é um assunto promissor.

Os alunos também construíram gráficos da velocidade média em função da distância da corrida. As figuras 4.3 e 4.4 mostram os resultados para os recordistas sul-americanos. Há um máximo nas curvas, indicando que o atleta mais rápido da América do Sul deve ser o recordista de uma prova entre 100 e 200 m. No caso dos homens, o máximo está em  $D \approx 140 \text{ m}$ , que pode ser aproximado pela prova de 150 m. Para as mulheres, entretanto, o máximo está em  $D \approx 120 \text{ m}$ .

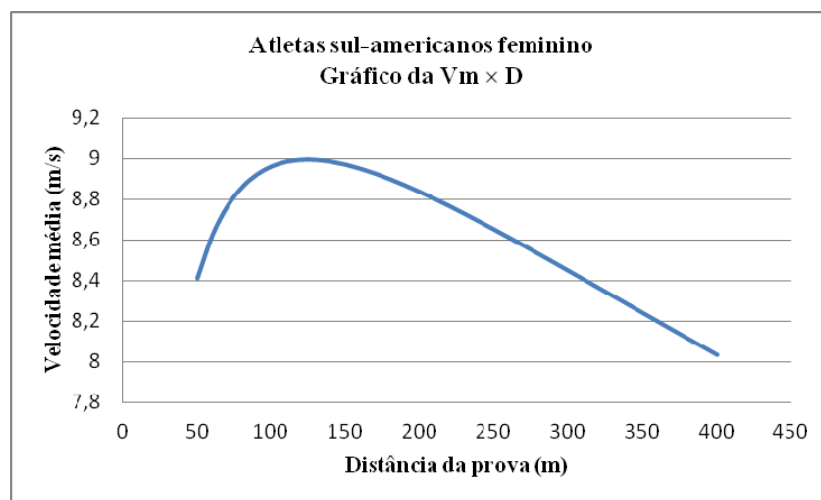


Figura 4.3: Velocidade média como função da distância da prova, para as recordistas sul-americanas. A prova mais veloz é a de 120 m.

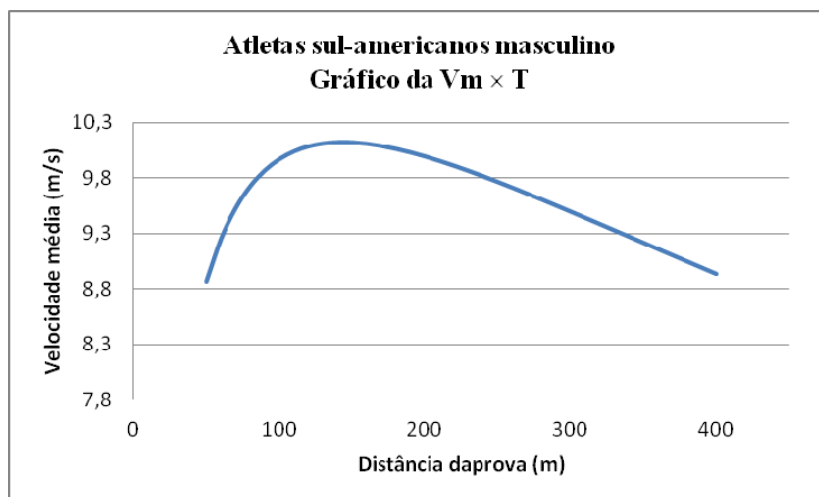


Figura 4.4: Velocidade média como função da distância da prova, para os recordistas sul-americanos. A prova mais veloz é a de 140 m.

Os alunos descobriram que em todas as categorias masculinas examinadas a prova mais rápida é a de 140 m. Para quase todas as categorias femininas as provas de 120 m foram as mais rápidas (a exceção foi a juvenil sul-americana, com 130 m).

Um dos alunos propôs acrescentar um termo exponencial à definição da velocidade de cruzeiro  $V(D)$ , com o intuito de estender o modelo para corridas de qualquer distância. Os demais alunos logo aplicaram o novo modelo, mas observaram que a resolução do sistema de equações ficava extremamente complicada, inviabilizando, a princípio, a proposta. O que é digno de nota é o fato de que um aluno, depois de compreender o modelo, “ousa” ao ampliá-lo, caracterizando uma autonomia que não existiria sem o domínio dos conteúdos envolvidos.

Algumas observações feitas a partir da interação com os alunos durante as atividades são:

1. O modo inusitado de estudar as grandezas cinemáticas foi muito produtivo. Cada valor encontrado para  $V_0$ ,  $\lambda$ ,  $T_L$ ,  $V(D)$  e  $V_m$  teve que ser analisado dentro de um contexto, buscando significados que descrevessem os desempenhos de pessoas reais.
2. Os alunos demonstraram satisfação e empolgação ao trabalhar (tomadas as devidas proporções) como pesquisadores que constroem modelos, analisam dados reais, fazem previsões e produzem conhecimento.
3. Os alunos se envolveram ativamente no trabalho, demonstrando autonomia, fazendo adaptações, propondo alterações e criando novas situações de estudo.

## Capítulo 5

### Conclusões

Geralmente a cinemática é ensinada como se seus conceitos fossem todos muito simples. Apresentam-se rapidamente as ideias de referencial, tempo, intervalo de tempo, posição, deslocamento e as definições de velocidade e aceleração média e instantânea. A atenção principal é dada à solução de problemas e à “técnica” para resolvê-los: identificar dados e incógnitas, aplicar fórmulas memorizadas e resolver equações. Os problemas, em sua maioria, são meramente matemáticos e desvinculados de uma situação real.

Existe uma justificada desconfiança de que não se aprende muita física com esse procedimento, que mesmo assim permanece inalterado há gerações [Nicioli 2006]. Mais ainda, existem fortes evidências de que sequer os conceitos básicos de cinemática são realmente aprendidos desta maneira [Trowbridge 1980, Arons 1996]. Isso representa um sério problema, pois os conceitos da cinemática são importantes na mecânica e em muitas outras áreas da física.

A aplicação da cinemática às corridas atléticas que propusemos nesta dissertação foge dos padrões de exercícios baseados em algoritmos. O problema envolve uma situação real e inusitada, que gera questões que os alunos gostariam de ver respondidas.

Ao contrário dos modelos normalmente utilizados para estudar corridas, que são baseados na segunda lei de Newton ou em considerações energéticas, o modelo que desenvolvemos utiliza apenas conceitos de cinemática. Mesmo assim ele é capaz de explorar aspectos importantes das corridas de velocidade, dando informações não-triviais sobre as performances dos atletas (ou qualquer outra pessoa). Em particular, o modelo permite descobrir a velocidade que seria alcançada pelo atleta se não houvesse desgaste físico, a distância típica em que o cansaço se manifesta, e o tempo perdido na largada.

O modelo também é capaz de fazer previsões. Uma delas é que a prova apropriada para indicar o “homem mais rápido de mundo” é a de 140 metros. Como essa prova não existe, a de 150 m é uma boa aproximação. Essa previsão é confirmada pelos resultados obtidos nas pistas. A “mulher mais rápida do mundo” seria a recordista dos 120 metros, como foi descoberto pelos alunos que aplicaram o modelo a provas femininas.



Ao tentar entender o modelo e interpretar seus resultados, os alunos são motivados a aprofundar sua compreensão dos conceitos de cinemática. A velocidade do atleta, por exemplo, é descrita de muitas maneiras distintas – a velocidade média  $V_m$ , a velocidade máxima  $V_0$  e a velocidade de cruzeiro  $V(D)$  – e é instrutivo que os alunos discutam as diferenças entre essas representações.

Como os resultados do modelo referem-se ao desempenho de seres humanos em corridas, os alunos podem discutir seus resultados com os professores de biologia e educação física, criando uma interação interdisciplinar que raras vezes é encontrada na escola.

O trabalho em grupo é outro fator importante, pois os alunos estão envolvidos em uma situação nova, procurando respostas que não estão “no final do livro”. A troca de informações é enriquecedora e essencial para que o trabalho de desenvolva da melhor maneira possível.

Ao estudar a descrição matemática do modelo, os alunos têm contato com representações funcionais não muito comuns nos livros textos do ensino médio. Por exemplo, foi uma surpresa para eles ter que usar um gráfico de tempo versus distância, com essa última grandeza sendo a variável independente, quando o usual em cinemática é tomar o tempo como variável independente. Também foi estranho para eles encontrar que o tempo da prova depende da distância como um polinômio de segundo grau (veja a equação (3) do capítulo 3). A comparação com a familiar “função horária” do movimento retilíneo uniformemente variado, em que a distância depende do tempo como um polinômio do segundo grau, forçou os alunos a discutir as diferenças entre as duas situações e a avaliar o papel das variáveis dependentes e independentes.

Embora o modelo dê respostas às questões motivadoras que são apresentadas no início da discussão com os alunos, essas respostas podem suscitar novos questionamentos. Por exemplo, a comparação entre resultados de atletas de diferentes gêneros e idades leva a novas discussões, de caráter interdisciplinar, sobre a origem das variações de performance.

O modelo cinemático pode ser aplicado a provas que não exploramos aqui, como corridas com barreiras e revezamentos. Ele também pode ser aplicado a outros esportes, como a natação [Santos 2011]. Corridas de cavalo, para as quais é fácil encontrar dados, também apresentam uma possibilidade de estudo com o modelo.

Mesmo nas corridas de atletismo existem questões muito interessantes que ainda não estudamos. Uma delas é a variação dos recordes mundiais ao longo dos anos. Qual

a principal razão para os tempos diminuírem: os atletas correrem mais rápido, largarem melhor ou cansarem menos? Esta questão pode ser um ótimo projeto de investigação para os alunos.

Também é possível usar modelo para estudar o desempenho dos próprios alunos em corridas. Se o tempo de um estudante for medido em três corridas de distâncias diferentes, seus parâmetros de performance  $V_0$ ,  $\lambda$  e  $T_L$  podem ser determinados. As corridas não necessitam ser de 100, 200 e 400 metros; nada impede que distâncias menores como 50, 100 e 150 metros sejam usadas. A comparação entre os resultados de diferentes alunos pode levar a discussões interessantes, sobre quem são os mais velozes, os mais resistentes, os de maior ‘explosão’ na largada. A participação dos professores de educação física nessas atividades criaria uma oportunidade rara de interação entre disciplinas escolares que, supostamente, têm pouco em comum.

Em conclusão, esperamos ter mostrado neste trabalho que é possível ensinar cinemática sem cair na rotina de questões puramente matemáticas desvinculadas de situações de interesse real. Vimos que isso nem sempre é necessário, e que o uso da cinemática como instrumento de modelagem e investigação pode enriquecer consideravelmente o ensino dessa disciplina.

## Apêndice A

### Cinemática das Corridas: Roteiro para o Professor

Esse roteiro segue, inicialmente, uma proposta de estudo dirigido, tendo em vista a não familiaridade dos alunos com o tipo de modelagem e atividade proposta.

Inicialmente o professor divide a turma em grupos de cinco componentes no máximo e entrega a cada aluno de um roteiro onde o modelo está descrito. O roteiro para os alunos, apresentado no apêndice B, serve de referência para que os estudantes acompanhem o desenvolvimento do modelo realizado pelo professor em aula expositiva.

As atividades começam efetivamente com a discussão das questões motivadoras sobre corridas de velocidade contidas no início do roteiro para os alunos, seguido da apresentação do modelo pelo professor.

Nessa fase os alunos acompanham passo-a-passo o desenvolvimento do modelo pelo professor, onde ele esclarece possíveis dúvidas.

A pergunta mais comum é “De onde vem a fórmula que defini  $V(D)$ ?”. É importante ressaltar que é uma expressão parte da proposta do modelo, sendo justificada (ou não) pelo sucesso (ou fracasso) da sua aplicação.

Após a apresentação do professor, é proposto para os grupos a (re)construção do modelo, sem ajuda do professor, seguindo os passos da apresentação. Nessa etapa cabe aos próprios alunos a discussão para esclarecimento de dúvidas; caso não consigam, deverão recorrer ao professor.

O professor marcará um dia para dois grupos apresentarem a (re)construção do modelo na forma de seminário, um para a parte do construção do modelo e outro para aplicação do mesmo. Os dois grupos serão sorteados na hora do seminário.

Cumprida essa fase, eles deverão aplicar o modelo em uma ou mais situações diferentes da apresentada no roteiro (recordes mundiais atuais).

No final cada grupo apresenta os resultados encontrados para discussão e conclusões.

*Utilizando a planilha Excel para determinar os parâmetros do modelo*

Uma das formas de representação do modelo é dada pela expressão

$$T = a_2 D^2 + a_1 D + a_0 \quad (1)$$

onde  $a_2 = 1 / (\lambda V_0)$ ,  $a_1 = 1 / V_0$  e  $a_0 = T_L$ .

As constantes  $\lambda$ ,  $V_0$  e  $T_L$ , são a distância em que o desgaste físico se torna significativo para um corredor de corridas de velocidade, a velocidade máxima atingida por ele e o tempo gasto no processo de largada, respectivamente. São parâmetros importantes para analisar o desempenho desse corredor.

Para encontrar os valores desses parâmetros é necessário determinar os coeficientes da função quadrática expressa na equação (1). O procedimento para isso está descrito no roteiro dos alunos. Para evitar o trabalho enfadonho de resolver à mão um sistema de três equações e três incógnitas utilizamos a planilha *Excel* do *MS Office*, seguindo as etapas descritas a seguir:

1. Abra um documento em branco da planilha *Excel* e crie uma tabela com os valores dos recordes mundiais atuais, conforme mostrado abaixo:

D (m)	T (s)
100	9,58
200	19,19
400	43,18

Figura 1: tabela com recordes mundiais atuais de corridas de velocidade para confecção do gráfico utilizando a planilha *Excel*.

2. Com a tabela em destaque, clique em inserir, na barra de ferramentas; gráficos; dispersão e escolha “Dispersão Somente com Marcadores”, como tipo de gráfico. A tela deverá ter a seguinte aparência.

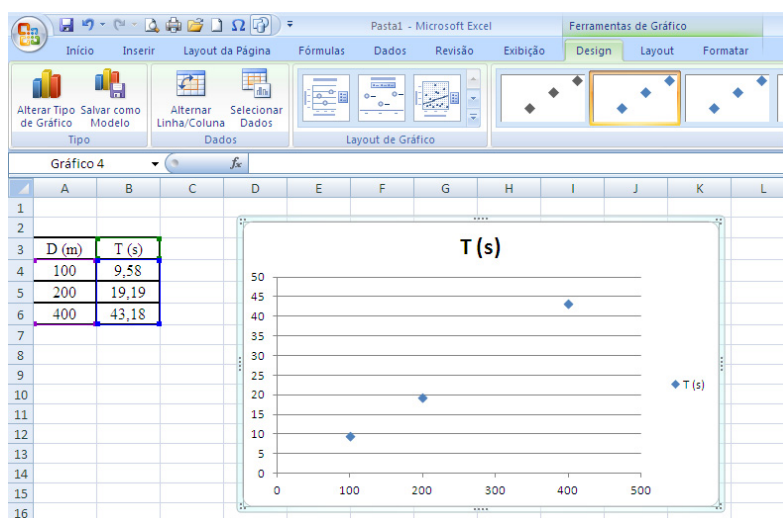


Figura2: Tela com tabela e o gráfico com os pontos tabela plotados.

O título do gráfico [T(s)] está na caixa de texto sobre o mesmo. Dê dois cliques e digite um título adequado (sugestão: Recordes mundiais de 2012). Destaque com um clique sobre a legenda [♦T(s)] do gráfico (à direita do mesmo) e apague-a (delete).

Coloque o mouse sobre um dos pontos do gráfico e clique com o botão direito. Aparecerá uma tela conforme a figura 3.

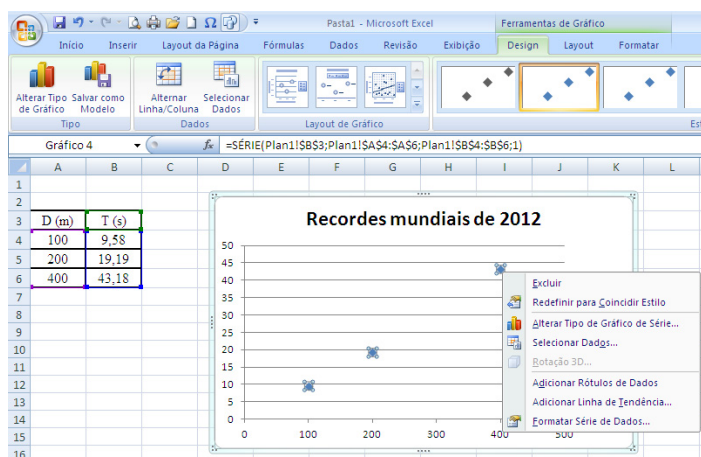


Figura 3: Tela com caixa de diálogo para adicionar linha de tendência.

3. Clique em “Adicionar linha de tendência”. Surgirá uma tela de interface conforme a figura 4.

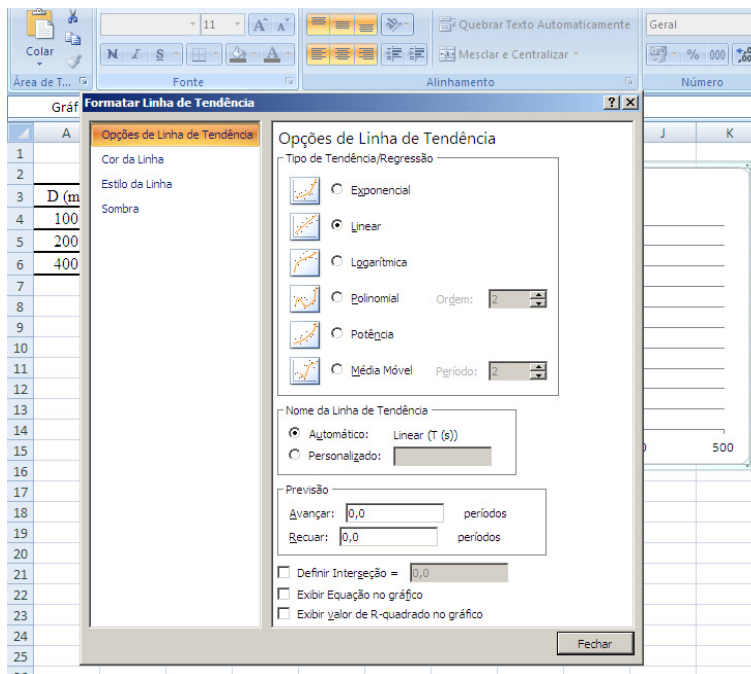


Figura 4: tela de interface para adicionar linha de tendência.

Como a função da equação (1) é do segundo grau, clique na opção “Polinomial” escolhendo “Ordem 2”, digite em “Recuar” o valor “100”, clique em “Exibir Equação no gráfico” e em fechar.

Aparecerá o gráfico com a equação e os respectivos coeficientes, conforme a figura 5.



Figura 5: Tela com a tabela, o gráfico e a função do mesmo, com os respectivos coeficientes.

O eixo da ordenada ( $y$ ) corresponde à distância da prova  $D(m)$  e o eixo da abscissa ( $x$ ) ao recorde de cada prova  $T(s)$ .

4. Na função apresentada no gráfico aparecem os coeficientes da equação (1) quando aplicados os valores dos recordes mundiais das provas de 100, 200 e 400 m.

Os coeficientes  $8E-05$  ( $8 \times 10^{-5}$ );  $0,0722$  e  $1,56$  da função do gráfico correspondem a

$$a_2 = 1 / (\lambda V_0), a_1 = 1 / V_0 \text{ e } a_0 = T_L.$$

5. A planilha também pode ser utilizada para determinar os parâmetros  $\lambda$ ,  $V_0$  e  $T_L$ , que fornecem dados das performances dos atletas. Basta inserir as fórmulas

$$\lambda = a_1/a_2; V_0 = 1/a_1$$

e substituir os valores dos coeficientes obtidos no item anterior.

Para inserir as fórmulas, clique em uma célula vazia, digite  $\lambda$ . Na célula ao lado digite “= 0,0722/8E-5” (ou = 0,0722/0,00008) e tecla “enter”. O resultado dessa operação aparecerá, conforme apresentado na figura 6.

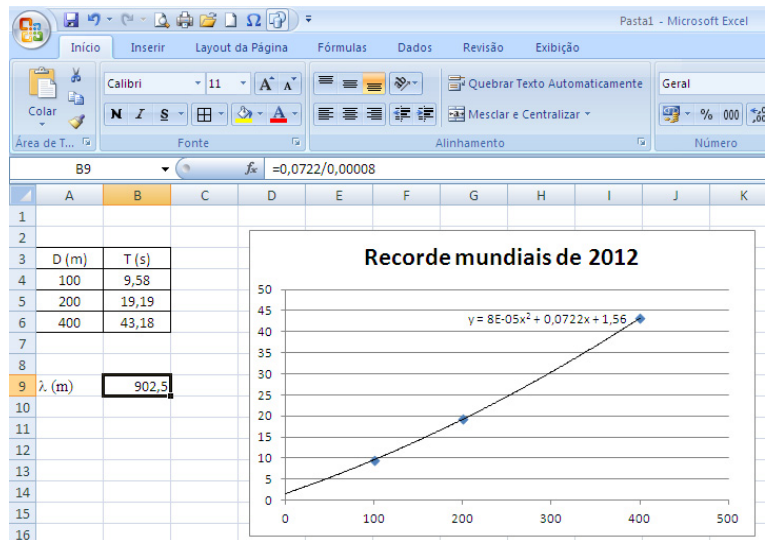


Figura 6: inserindo fórmula para obtenção de  $\lambda$ . Na célula A9 foi digitado  $\lambda$  com auxílio de “Inserir Símbolo” na barra de ferramentas da planilha do Excel. O resultado que aparece na célula B9 foi obtido digitando-se “= 0,0722/8E-5” na própria célula.

Na célula A10 digite  $V_0$  (m/s) e, na célula B10, digite “=1/0,0722”. Tecla “enter” e o resultado aparecerá como na figura 7.

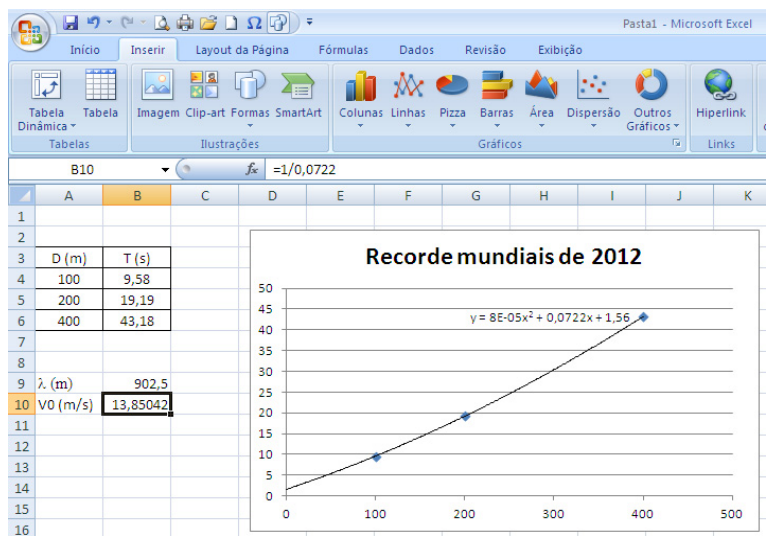


Figura 7: inserindo fórmula para obtenção de  $V_0$ . Na célula B10 foi digitado “=1/0,0722”.

Apenas para completar a tabela com os valores dos parâmetros que fornecem dados das performances dos atletas, digite  $T_L$  (s) na célula A11 e o valor 1,56, que o valor de  $a_0$ . Aparecerá como representado na figura 8.

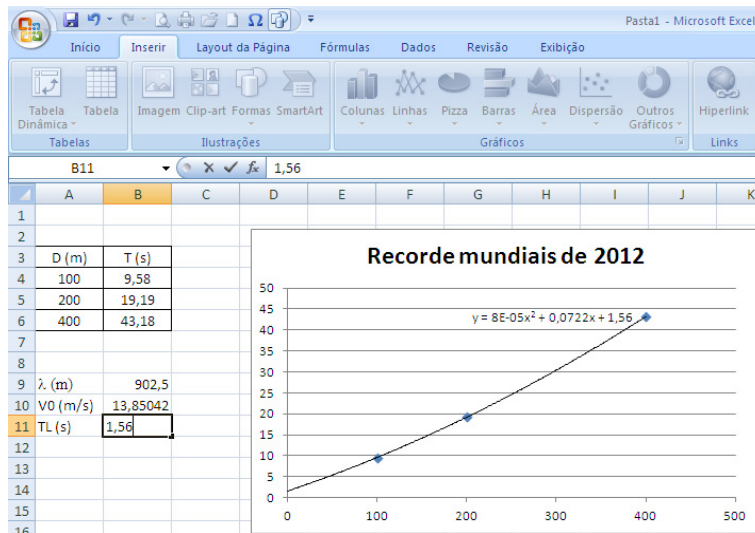


Figura 8: Figura com a tabela dos recordes, gráfico e função correspondente e os valores dos parâmetros que fornecem os dados da performance dos atletas após aplicarmos o modelo desenvolvido por nós.

Assim os valores dos parâmetros desejados são  $V_0 = 13,8$  m/s,  $\lambda = 909$  m,  $T_L = 1,56$  s, obtidos sem cálculos enfadonhos que tiram o foco da aplicação e análise do modelo.



## Apêndice B

# Cinemática das Corridas: Roteiro Didático para os Alunos

### I. Introdução

Muitas vezes nos perguntamos para que aprendemos isso ou aquilo. Ao menos nas aulas de física essa pergunta é muito comum. Não vemos conexão entre o que aprendemos e a sua respectiva utilidade ou aplicabilidade.

Ao iniciarmos os estudos da física, geralmente começamos com os conceitos fundamentais da cinemática, tais como referencial, repouso, movimento, posição deslocamento, instante de tempo, intervalo de tempo, velocidade média, aceleração média, etc. E a pergunta continua, “*para que aprendemos isso*”. Que tal respondê-la com um desafio: a cinemática pode nos ajudar a compreender melhor esportes como as corridas?

Pense nas seguintes questões:

- Qual a velocidade máxima que um ser humano pode atingir?
- A partir de que distância o desgaste físico diminui significativamente a velocidade de um atleta de corridas?
- Qual o tempo perdido na largada das corridas?
- Qual a prova que um atleta deve vencer para ser considerado o homem mais rápido do mundo?

Parece difícil relacionar essas questões aos conceitos estudados na física. Elas estão mais próximas da educação física do que da física (sem educação). Entretanto, essa relação existe e é muito instigante. Como veremos, usando algumas idéias simples de cinemática encontraremos respostas a todas as questões acima.

### II. Um modelo cinemático para corridas

Iniciaremos fazendo as seguintes hipóteses sobre uma corrida de velocidade:

- O atleta perde tempo na largada. Esse tempo  $T_L$  é perdido, principalmente, porque o atleta está inicialmente em repouso e necessita acelerar para atingir uma velocidade alta.

- Após a aceleração na largada, a velocidade do atleta fica constante durante o resto da prova. Chamaremos essa velocidade de ‘velocidade de cruzeiro’  $V(D)$ .

Com essas hipóteses, o atleta deve completar a corrida num tempo  $T$  dado por

$$T = D / V(D) + T_L \quad (1)$$

onde  $D$  é a distância da prova.

Vamos fazer uma última hipótese:

- A velocidade de cruzeiro depende da distância da prova. Quanto maior for a distância da prova  $D$ , menor será a velocidade de cruzeiro.

Assim, a velocidade de cruzeiro diminui com a distância da prova da seguinte maneira:

$$V(D) = V_0 / (1 + D / \lambda) \quad (2)$$

Os parâmetros  $V_0$  e  $\lambda$  têm significados importantes:

- $V_0$  é a velocidade máxima que o atleta pode atingir. Ela corresponde à velocidade de cruzeiro a pequenas distâncias ( $D \ll \lambda$ ), para as quais não há desgaste físico.
- $\lambda$  é a distância em que o desgaste físico se torna significativo para o atleta.

### III. Aplicação do modelo aos recordistas mundiais

Vamos aplicar o modelo a corridas com atletas de ponta (recordistas mundiais).

Para tanto vamos substituir (2) em (1), obtendo

$$T = a_2 D^2 + a_1 D + a_0 \quad (3)$$

onde  $a_2 = 1 / (\lambda V_0)$ ,  $a_1 = 1 / V_0$  e  $a_0 = T_L$ .

- Como exercício, obtenha a equação (3) e verifique as relações entre os coeficientes  $a_2$ ,  $a_1$  e  $a_0$  e os parâmetros  $T_L$ ,  $\lambda$  e  $V_0$ .

Para determinar os valores dessas constantes utilizaremos os dados oficiais das provas de 100, 200 e 400 metros rasos, dispostos na tabela 1.

D (m)	T (s)	Recordista	Veloc. média (m/s)
100	9,58	U. Bolt	10,44
200	19,19	U. Bolt	10,42
400	43,18	M. Johnson	9,26

Tabela 1: Recordes mundiais em provas masculinas de curta distância.

Substituindo os valores de  $D$  e  $T$  de cada prova na expressão (3), obtemos um sistema com três equações e três incógnitas. A solução dessas equações é

$$a_2 = 8,0 \times 10^{-5} \text{ s/m}^2,$$

$$a_1 = 0,0723 \text{ s/m},$$

$$a_0 = 1,56 \text{ s}.$$

Como  $\lambda = a_1/a_2$ ,  $V_0 = 1/a_1$  e  $T_L = a_0$ , temos finalmente que

$$V_0 = 13,8 \text{ m/s}, \quad \lambda = 909 \text{ m}, \quad T_L = 1,56 \text{ s}. \quad (4)$$

- Mais um exercício: monte e resolva o sistema de equações, obtendo os valores acima.

Analisando os valores obtidos em (4), encontramos respostas a três das questões iniciais que motivaram o nosso estudo:

- A velocidade máxima que um atleta poderia atingir hoje é da ordem de 14 m/s.
- A distância em que o desgaste físico se torna significativo é de aproximadamente 1000 m.
- O tempo gasto no processo da largada é de 1,6 m/s.

O modelo que desenvolvemos ainda pode nos revelar muitas coisas. Vamos ver algumas previsões que ele faz.

## IV. Previsões do modelo

### *Tempos em provas não-olímpicas*

O nosso modelo fornece uma relação entre os recordes  $T$  e as distâncias  $D$  de suas respectivas provas:

$$T = 8,10^{-5} D^2 + 0,0722 D + 1,56 \quad (5)$$

com  $T$  em segundos e  $D$  em metros,

Essa fórmula nos permite prever o resultado de provas não-tradicionais como as de 60, 150 e 300 metros. Na tabela 2 comparamos os recordes dessas provas com as previsões do modelo ( $T_{\text{mod}}$ ). Vemos que as discrepâncias são pequenas, um resultado significativo dada a simplicidade do modelo.

D (m)	T (s)	$T_{\text{mod}}$ (s)	Desvio percentual (%)
60	6,39	6,18	3%
150	14,35	14,19	1%
300	30,85	30,42	1%

Tabela 2. Comparação entre os recordes previstos pelo modelo ( $T_{\text{mod}}$ ) e os obtidos nas provas de 60, 150, e 300 m.

A figura 1 faz uma comparação gráfica desses resultados. A curva mostra a previsão do modelo (equação (5)) e os círculos representam os recordes das corridas não-olímpicas. Os losangos são as provas olímpicas que foram usadas para determinar os parâmetros do modelo. Vemos novamente que a previsão do modelo está muito próxima dos resultados nas pistas.

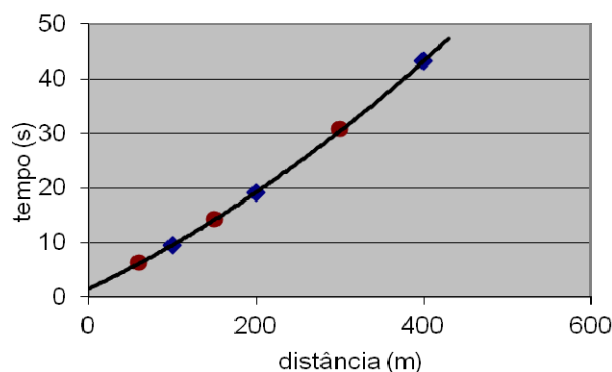


Figura 1. Previsão do modelo cinemático para diferentes distâncias. Os losangos são pontos utilizados para construir o modelo (provas oficiais) e os círculos representam as provas não-oficiais.

- Exercício: Estenda o gráfico da figura 1 para distâncias maiores e determine a partir de que ponto o modelo começa a distanciar-se dos resultados medidos nas competições. Explique por que o modelo não vale para distâncias grandes.

### *O homem mais rápido do mundo*

Qual a prova que um atleta deve vencer para ser considerado o homem mais rápido do mundo? A de 100 m ou 200 m rasos? Para responder a essa questão vamos construir um gráfico da velocidade média em função da distância. Utilizaremos a expressão (5) para construir uma tabela onde estão as distâncias  $D$  das provas, os respectivos tempos  $T$ , e as velocidades médias  $V_m = D/T$

Com base nessa tabela construímos o gráfico  $V_m \times D$  mostrado na figura 2.

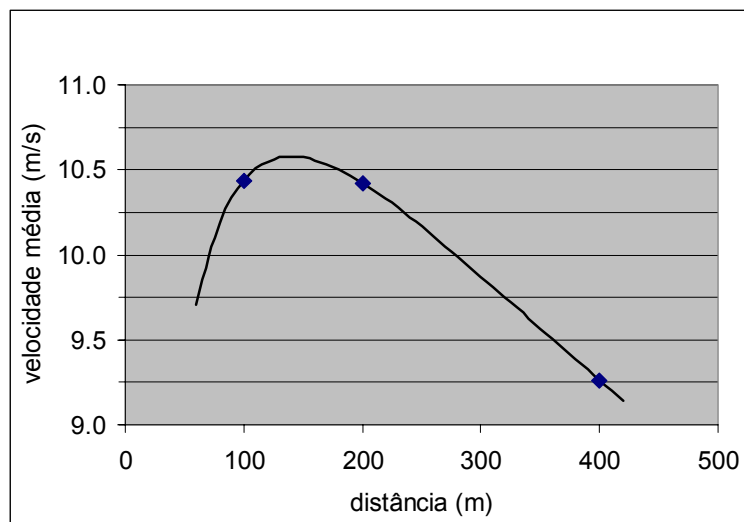


Figura 2. Gráfico das velocidades médias em função das distâncias

Ao analisar a figura 2 (ou a tabela que a gerou) observamos que a velocidade média passa por um máximo entre 100 e 200 m, ou seja, a prova mais rápida do atletismo não a de 100 m nem a de 200 m, cujas velocidades médias são 10,44 m/s e 10,42 m/s, respectivamente. Segundo o modelo, a prova mais rápida do atletismo seria a de 140 m, na qual a velocidade média seria maior que 10,5 m/s. Como essa prova não é corrida em nenhuma competição, a melhor substituta é a de 150 m. O recorde atual dos 150 m é de Usain Bolt, que correu a prova a uma velocidade média de 10,45 m/s. Embora esse resultado seja menor que a previsão do modelo, essa é a maior velocidade média já registrada numa prova de atletismo, o que confirma nossa previsão.

## V. Para os alunos realizarem

### *Mãos na massa*

Como sugestão, você pode aplicar o modelo a outras categorias de atletas, tais como recordistas mundiais femininas, sul-americanos, juvenis, etc. Você e seus colegas também podem medir os tempos uns dos outros em três distâncias diferentes, e determinar seus parâmetros de rendimento  $V_0$ ,  $\lambda$  e  $T_L$ . As distâncias podem ser menores que os 100-200-400 metros dos atletas de ponta.

Qualquer que seja sua escolha use os resultados para responder as questões abaixo (ou crie outras):

- Qual a velocidade máxima que pode ser alcançada?
- A partir de que distância o desgaste físico é significativo?
- Qual o tempo gasto na largada?

## Apêndice C

### Resultados das Análises dos Alunos

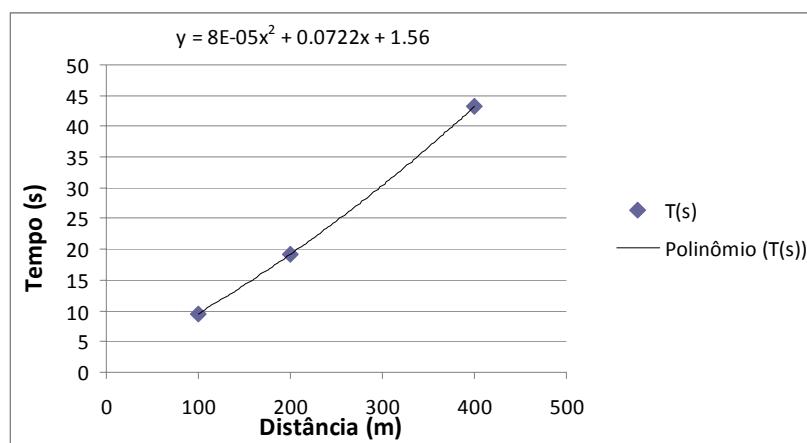
#### Recordes mundiais masculinos

Recondes Mundiais Masculino		
Recordistas	D(m)	T(s)
Usain Bolt	100	9.58
Usain Bolt	200	19.19
Michael Johnson	400	43.18

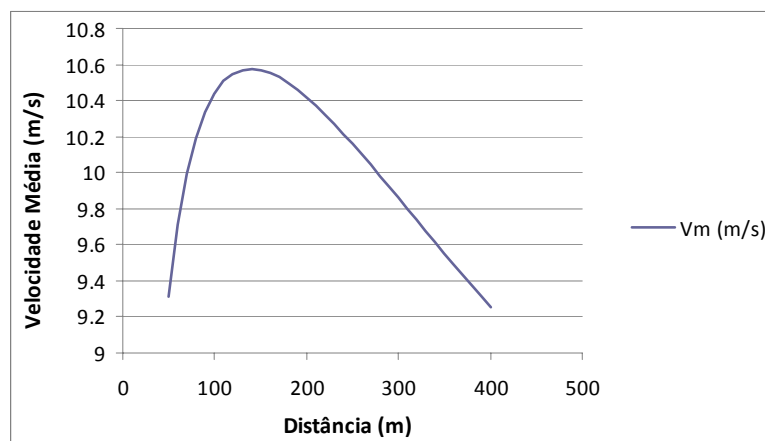
$$TL = 1,56 \text{ s}$$

$$V0 = 13,8 \text{ m/s}$$

$$\lambda = 902 \text{ m}$$



Recordes Mundiais Masculino						
a	b	c			D(m)	V(D)= 1/(b+D.a) ou V0/(1+D/l)
8.00E-05	0.0722	1.56			100	1.25E+01
$V_0(1/b)$	$l(b/a)$	$T_l [C]$	$T_A=2.c$		200	1.13E+01
13.85042	9.03E+02	1.56			400	9.60E+00



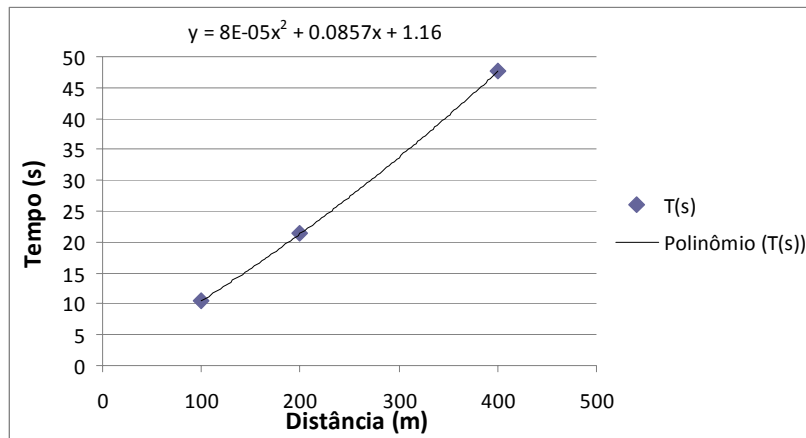
## Recordes mundiais femininos

Recordes Mundiais Feminino		
Recordistas	D(m)	T(s)
Florence G. Joyner	100	10.49
Florence G. Joyner	200	21.34
Marita Koch	400	47.6

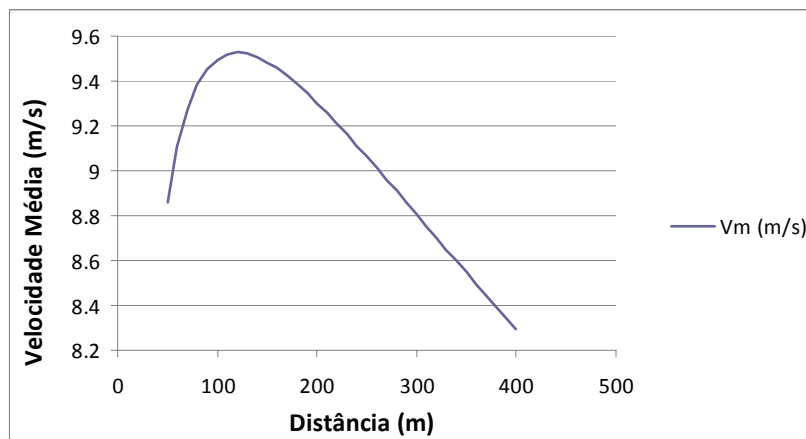
$$T_L = 1,16 \text{ s}$$

$$V_0 = 11,7 \text{ m/s}$$

$$\lambda = 1071 \text{ m}$$



Recordes Mundiais Femininos						
a	b	c			D(m)	V(D)= 1/(b+D.a) ou V <sub>0</sub> /(1+D/l)
8.00E-05	0.0857	1.16			100	1.07E+01
V <sub>0</sub> (1/b)	l(b/a)	T <sub>l</sub> [C]	T <sub>A</sub> =2.c		200	9.83E+00
11.66861	1.07E+03	1.16	2.32		400	9.12E+00





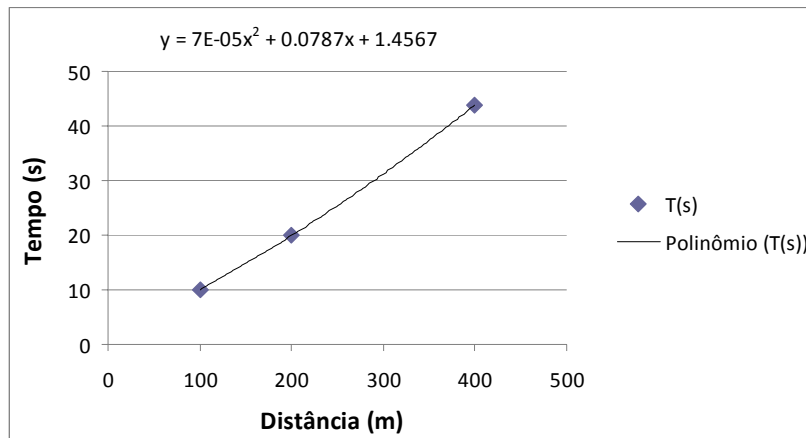
## Recordes mundiais masculinos júnior

Recordes Mundiais Júnior Masculino		
Recordistas	D(m)	T(s)
Darrel Brown	100	10.01
Usain Bolt	200	19.93
Steve Lewis	400	43.87

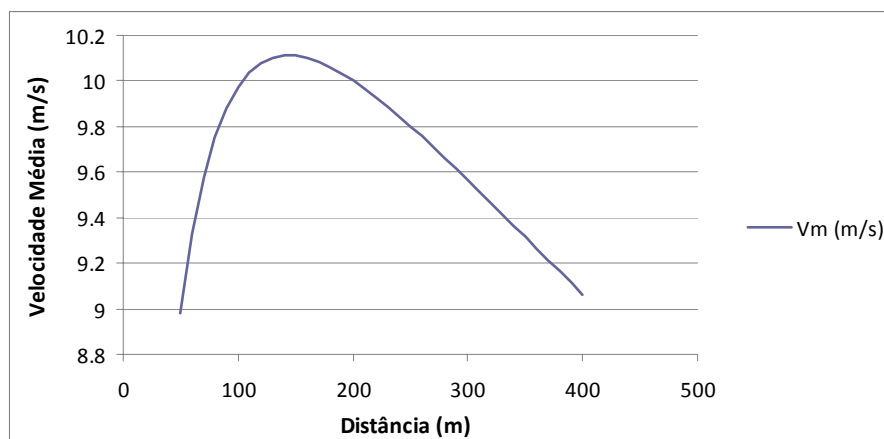
$$TL = 1,46 \text{ s}$$

$$V_0 = 12,7 \text{ m/s}$$

$$\lambda = 1124 \text{ m}$$



Recordes Mundiais Júnior Masculino						
a	b	c			D(m)	V(D)= 1/(b+D.a) ou V <sub>0</sub> /(1+D/l)
7.00E-05	0.0787	1.4567			100	1.17E+01
V <sub>0</sub> (1/b)	l(b/a)	T <sub>l</sub> [C]	T <sub>A</sub> =2.c		200	1.08E+01
12.70648	1.12E+03	1.4567	2.9134		400	9.37E+00



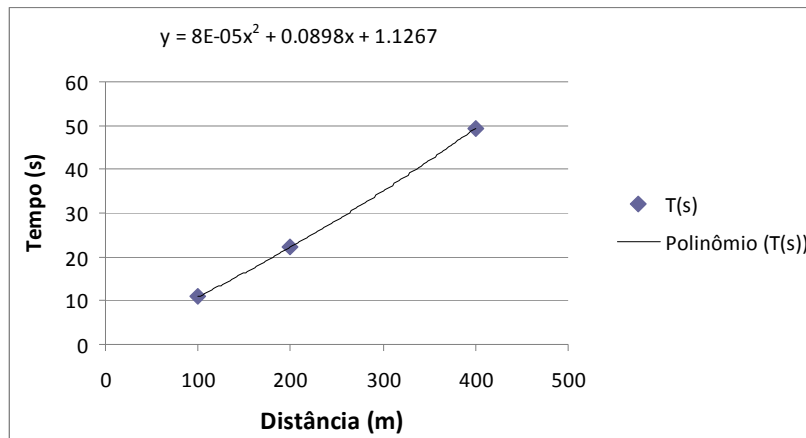
## Recordes mundiais femininos júnior

Recordes Mundiais Júnior Feminino		
Recordistas	D(m)	T(s)
Marlies Oelsner	100	10.88
Allyson Felix	200	22.18
Grit Breuer	400	49.42

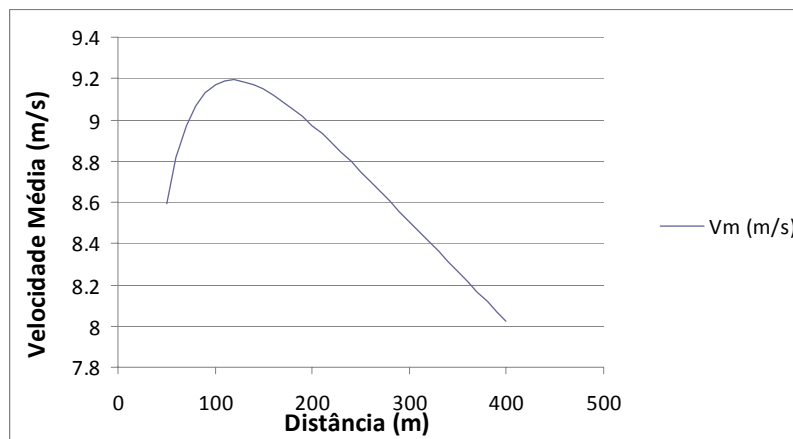
$$T_L = 1,13 \text{ s}$$

$$V_0 = 11,1 \text{ m/s}$$

$$\lambda = 1122 \text{ m}$$



Recordes Mundiais Júnior Feminino						
a	b	c			D(m)	V(D)= 1/(b+D.a) ou V <sub>0</sub> /(1+D/l)
8.00E-05	0.0898	1.1267			100	1.02E+01
V <sub>0</sub> (1/b)	l(b/a)	T <sub>l</sub> [C]	T <sub>A</sub> =2.c		200	9.45E+00
11.13586	1.12E+03	1.1267			400	8.21E+00



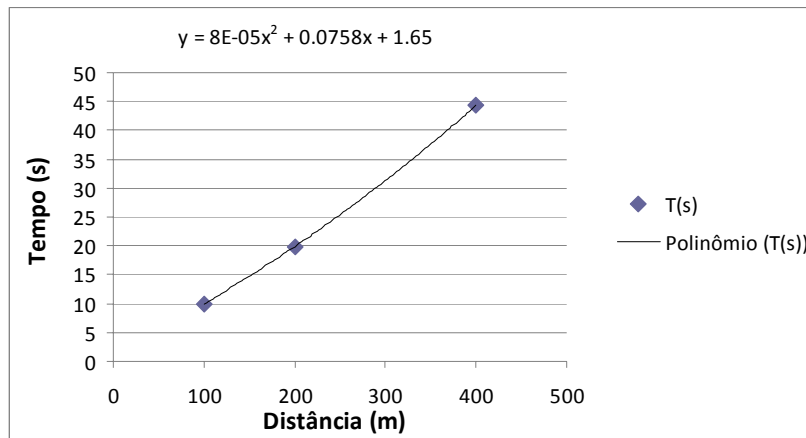
## Recordes sul-americanos masculinos

Recordes Sul-Americanos Masculino		
Recordistas	D(m)	T(s)
Robson Caetano da Silva	100	10
Claudinei Quirino da Silva	200	19.89
Sanderlei Claro Parrela	400	44.29

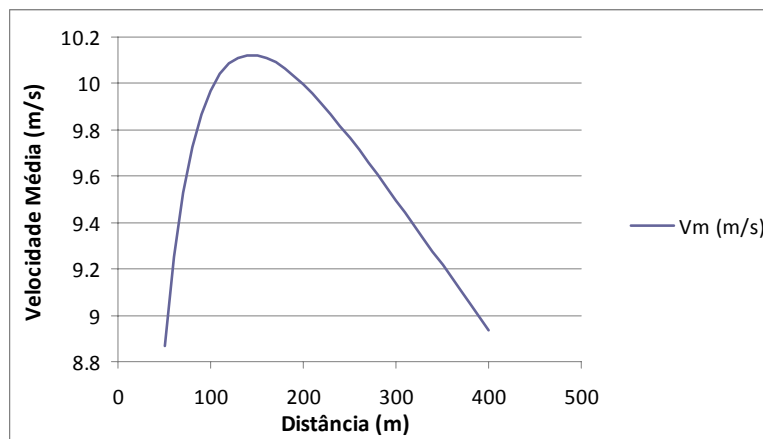
$$T_L = 1,65 \text{ s}$$

$$V_0 = 13,2 \text{ m/s}$$

$$\lambda = 947 \text{ m}$$



Recordes Sul-Americanos Masculino						
a	b	c			D(m)	V(D)= 1/(b+D.a) ou V <sub>0</sub> /(1+D/l)
8.00E-05	0.0758	1.65			100	1.19E+01
V <sub>0</sub> (1/b)	l (b/a)	T <sub>l</sub> [C]	T <sub>A</sub> =2.c		200	1.09E+01
13.19261	9.48E+02	1.65	3.3		400	9.28E+00



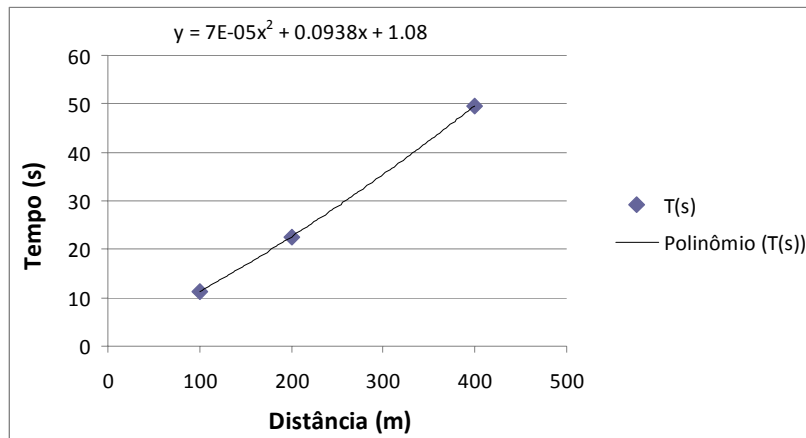
## Recordes sul-americanos femininos

Recordes Sul-Americanos Feminino		
Recordistas	D(m)	T(s)
Ana Claudia Lemos Silva	100	11.15
Lucimar Aparecida de Moura	200	22.6
Ximena Restrepo	400	49.64

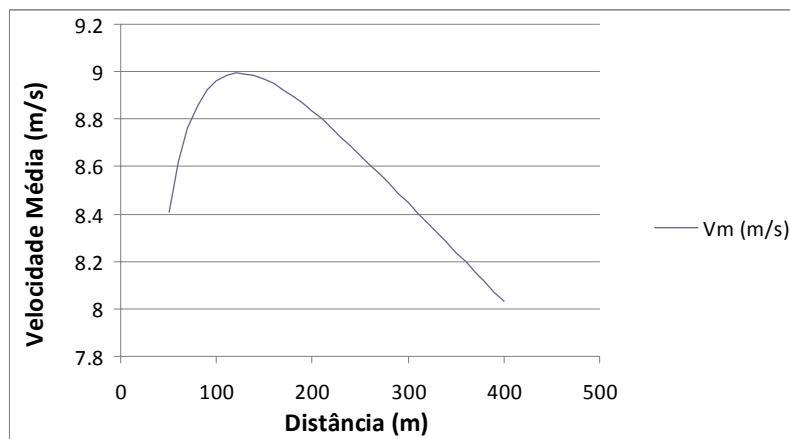
$$T_L = 1,08 \text{ s}$$

$$V_0 = 10,7 \text{ m/s}$$

$$\lambda = 1340 \text{ m}$$



Recordes Sul-Americanos Feminino						
a	b	c			D(m)	V(D)= 1/(b+D.a) ou V <sub>0</sub> /(1+D/l)
7.00E-05	0.0938	1.08			100	9.92E+00
V <sub>0</sub> (1/b)	l(b/a)	T <sub>l</sub> [C]	T <sub>A</sub> =2.c		200	9.28E+00
10.66098	1.34E+03	1.08	2.16		400	8.21E+00



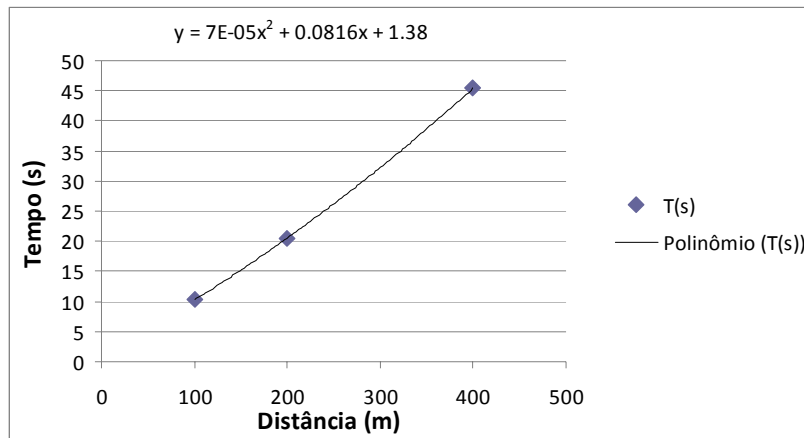
## Recordes sul-americanos juvenis masculinos

Recordes Sul-Americanos Juvenis Masculino		
Recordistas	D(m)	T(s)
Alonso Edwards	100	10.25
Bruno Nascimento Pacheco	200	20.54
Andres Byron Silva	400	45.38

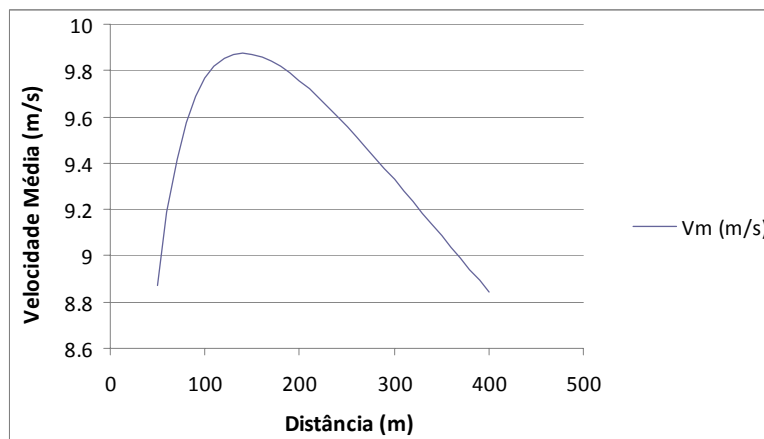
$$T_L = 1,38 \text{ s}$$

$$V_0 = 12,5 \text{ m/s}$$

$$\lambda = 1166 \text{ m}$$



Recordes Sul-Americanos Juvenis Masculino						
a	b	c			D(m)	V(D)= 1/(b+D.a) ou V <sub>0</sub> /(1+D/l)
7.00E-05	0.0816	1.38			100	1.13E+01
V <sub>0</sub> (1/b)	l(b/a)	T <sub>l</sub> [C]	T <sub>A</sub> =2.c		200	1.05E+01
12.2549	1.17E+03	1.38	2.76		400	9.12E+00



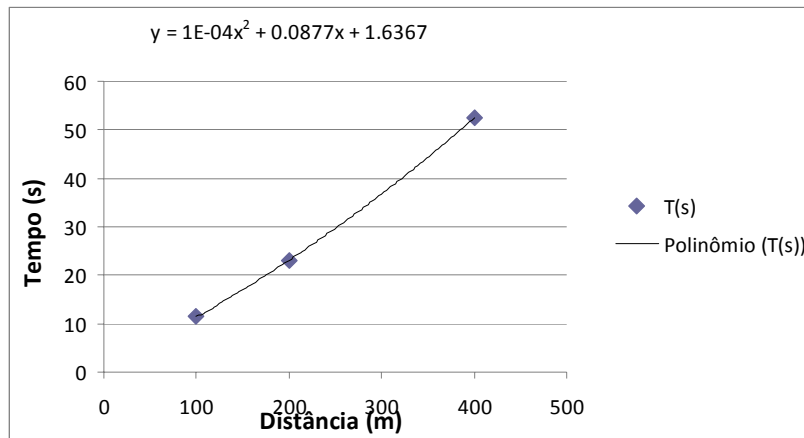
## Recordes sul-americanos juvenis femininos

Recordes Sul-Americanos Juvenis Feminino		
Recordistas	D(m)	T(s)
Franciela das Graças Krasucki	100	11.39
Darlenis Obregon	200	23.1
Norma Gonzalez	400	52.39

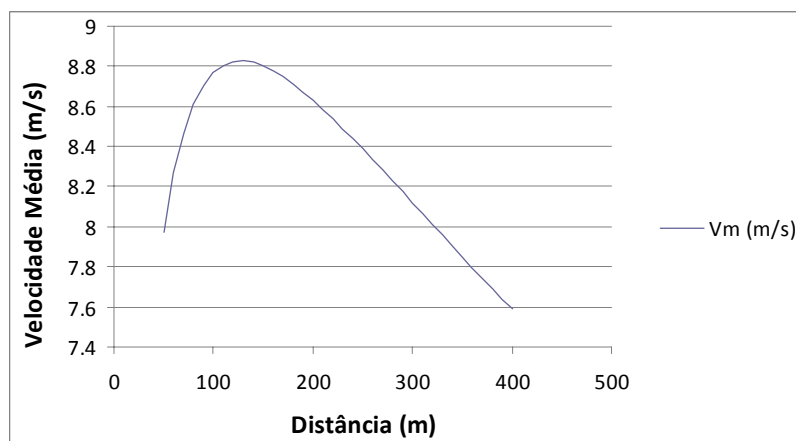
$$T_L = 1,64 \text{ s}$$

$$V_0 = 11,4 \text{ m/s}$$

$$\lambda = 877 \text{ m}$$



Recordes Sul-Americanos Juvenis Feminino						
a	b	c			D(m)	V(D)= 1/(b+D.a) ou V <sub>0</sub> /(1+D/l)
1.00E-04	0.0877	1.6367			100	1.02E+01
V <sub>0</sub> (1/b)	l(b/a)	T <sub>l</sub> [C]	T <sub>A</sub> =2.c		200	9.29E+00
11.40251	8.77E+02	1.6367	3.2734		400	7.83E+00



## Referências Bibliográficas

- [Arons 1997] A. B. Arons, *Teaching Introductory Physics*, Wiley, 1997
- [Dias 2009] Marco A. Dias, Helio S. Amorim e Susana L. S. Barros, “Produção de fotografias estroboscópicas sem lâmpada estroboscópica”, *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 26, p. 492-513, 2009
- [Dias 2011] Marco Adriano Dias, *Utilização de fotografias estroboscópicas digitais para o estudo da queda dos corpos*, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2011
- [Feynman 1964] R. P. Feynman, R. B. Leighton e M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, v. 1, Addison-Wesley, 1964
- [Gaspar 1994] A. Gaspar, “O ‘r’ de retilíneo”, *Cadernos Catarinenses de Ensino de Física*, v. 11, n. 1, p. 7-10, 1994
- [Halloun 1985] I. A. Halloun e D. Hestenes, “Common sense concepts about motion” *American Journal of Physics*, v. 53, n. 11, p. 1056-1065, 1985
- [Heck 2009] A. Heck and T. Ellermeijer, “Giving students the run of sprinting models”, *American Journal of Physics*, v. 77, n. 11, p. 1028-1037, 2009
- [Helene 2010] O. Helene e M. T. Yamashita, “The force, power, and energy of the 100 meter sprint”, *American Journal of Physics*, v. 78, n. 3, p. 307-309, 2010
- [Hewson 1985] P. W. Hewson, “Diagnosis and remediation of an alternative conception of velocity using a microcomputer program”, *American Journal of Physics*, v. 53, p. 684, 1985
- [Keller 1973] J. B. Keller, “A theory of competitive running”, *Physics Today*, v. 26, n. 9, p. 43-47, 1973
- [Keller 1974] J. B. Keller, “Optimal Velocity in a Race”, *The American Mathematical Monthly*, vol. 81, no. 5, pp. 474-480, 1974
- [Mureika 2001] J. R. Mureika, “A realistic quasi-physical model of the 100 m dash”, *Canadian Journal of Physics*, v. 79, n. 4, p. 697-713, 2001 (arXiv:physics/0007042)

- [Nicioli 2006] R. B. Nicioli Jr. e C. R. Mattos, “Uma análise de livros didáticos de física das décadas de 50 e 60,” *Anais do X Encontro de Pesquisa em Ensino de Física*, Londrina, 2006.
- [Pritchardt 1993] W. G. Pritchardt, “Mathematical models of running”, *SIAM Review*, v. 35, n. 3, p. 359-379, 1993
- [Rosenquist 1987] M. L. Rosenquist e L. C. McDermott, “A conceptual approach to the teaching of kinematics”, *American Journal of Physics*, v. 55, n. 5, p. 407-415, 1987
- [Santos 2011] J. L. dos Santos, C. E. Aguiar e A. Miron, “Modelos cinemáticos no atletismo e natação”, *Anais do XIX Simpósio Nacional de Ensino de Física*, 2011
- [Tibshirani 1997] R. Tibshirani, “Who is the fastest man in the world?”, *The American Statistician*, v. 51, n. 2, p. 106–111, 1997
- [Trowbridge 1980] D. E. Trowbridge e L. C. McDermott, “Investigation of student understanding of the concept of velocity in one dimension”, *American Journal of Physics*, v. 48, n. 12, p. 1020-1028, 1980
- [Trowbridge 1981] D. E. Trowbridge e L. C. McDermott, “Investigation of student understanding of the concept of acceleration in one dimension”, *American Journal of Physics*, v. 49, n. 3, p. 242-253, 1981
- [Wagner 1998] G. Wagner, “The 100-meter dash: theory and experiment”, *The Physics Teacher*, v. 36, n. 3, p. 144-146, 1998
- [Wikipedia-150m 2012] “Bailey–Johnson 150-metre race”, [http://en.wikipedia.org/wiki/Bailey-Johnson\\_150-metre\\_race](http://en.wikipedia.org/wiki/Bailey-Johnson_150-metre_race) (consultado em janeiro de 2012)
- [Woodside 1991] W. Woodside, “The optimal strategy for running a race”, *Mathematical and Computer Modelling*, v. 15, n. 10, p. 1-12, 1991