



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física

ASTROFÍSICA DE ESTRELAS COMPACTAS COMO ATIVIDADE SUPLEMENTAR PARA O ENSINO MÉDIO

Jean Carlo Feital Frazzoli

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador: João R. Torres de Mello Neto

Rio de Janeiro
Novembro de 2012

ASTROFÍSICA DE ESTRELAS COMPACTAS COMO ATIVIDADE SUPLEMENTAR PARA O ENSINO MÉDIO

Jean Carlo Feital Frazzoli

Orientador: João R. Torres de Mello Neto

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Aprovada por:

Presidente, Prof. João R. Torres de Mello Neto

Prof. Dr. Alexandre Tort

Prof. Dr. Andre Massafferi

Rio de Janeiro
Novembro de 2012

FICHA CATALOGRÁFICA

F848a Frazzoli, Jean Carlo Feital
Astrofísica de Estrelas Compactas como Atividade Suplementar para o Ensino Médio / Jean Carlo Feital Frazzoli.
– Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2012.
viii, 113 f. : il. ; 30 cm.
Orientador: João R. Torres de Mello Neto.
Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Física / Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2012.
Referências Bibliográficas: f. 109-110.
1. Astrofísica. 2. estrelas compactas. 3. polítropo.
I. Mello Neto, João R. Torres de. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física. III. Astrofísica de Estrelas Compactas como Atividade Suplementar para o Ensino Médio.

Dedico esta dissertação à minha família.

Agradecimentos

Aos professores Alexandre Tort, Hélio Salim e Antônio Carlos pelas aulas inspiradoras que ajudaram a construir e ampliar as possibilidades para este projeto.

Ao professor João Torres, meu orientador, que mais uma vez me proporcionou o privilégio de trabalhar ao seu lado.

Ao professor Carlos E. Aguiar pelo compreensão com a prazo do trabalho.

À Dr. Beatriz Blanco Siffert pela sua ajuda com os meus primeiros programas em C.

À minha família, pelo apoio que todos sempre deram.

À Fabiane S. Frazzoli, minha esposa, por sempre estar ao meu lado em todas as etapas de minha vida.

RESUMO

ASTROFÍSICA DE ESTRELAS COMPACTAS COMO ATIVIDADE SUPLEMENTAR PARA O ENSINO MÉDIO

Jean Carlo Feital Frazzoli

Orientador: João R. Torres de Mello Neto

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Este trabalho tem como o tema a introdução à astrofísica de estrelas compactas. Numa abordagem concisa serão expostos os seguintes temas: classificação dos tipos de estrelas, onde há também uma breve abordagem do critério de formação das mesmas; exemplo de uma estrela da sequência principal: o Sol; e interiores de estrelas compactas. Cada tópico apresenta pelo menos uma atividade que pode ser aplicada em turmas do ensino médio e uma atividade mais complexa referente à estrutura interna de estrelas compactas, destinado a alunos interessados em aprofundar seus estudos. A exposição se dará basicamente em tópicos independentes entre si. O leitor poderá optar por seguir cada capítulo como um curso de atividade complementar, conforme pensado pelo autor, ou usar um tópico específico para introduzir ou aprofundar um conceito abordado ao longo do curso regular do ensino médio como uma única atividade extra. Finalmente, a intenção do autor é que este trabalho seja uma referência de fácil acesso ao professor que deseja apresentar assuntos relacionados à astrofísica e despertar o desejo de conhecer mais em seus alunos.

Palavras chave: Astrofísica, estrelas compactas, polítropo.

Rio de Janeiro
Novembro de 2012

ABSTRACT

ASTROPHYSICS OF COMPACT STARS AS SUPPLEMENTARY ACTIVITY FOR HIGH SCHOOL

Jean Carlo Feital Frazzoli

Supervisor: João R. Torres de Mello Neto

Abstract of master's thesis submitted to Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, in partial fulfillment of the requirements for the degree Mestre em Ensino de Física.

This work presents an introduction to astrophysics with particular emphasis on compact objects. In a concise approach the following topics will be shown a classification of types of stars, where there is also a brief discussion of the criteria of formation of them; example of a main sequence star: the Sun, and interiors of compact stars. Each topic has at least one activity that can be applied in high school classes and a more complex activity on the internal structure of compact stars, for students interested in furthering their studies. The presentation will consist primarily of topics mutually independent. The reader may choose to follow each chapter as a course of complementary activity, as designed by the author, or use a specific topic to introduce or deepen a concept discussed throughout the course of the regular school as one extra activity. Finally, the author's intention is that this work be a reference for easy access to the teacher who wishes to introduce topics related to astrophysics and awaken the desire for more knowledge in his students.

Keywords: Astrophysics, compact stars, polytrop.

Rio de Janeiro
Novembro de 2012

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Justificativa e objetivo do trabalho	1
1.2	Estrutura da monografia	2
1.2.1	Capítulo 2: Enfoque teórico	2
1.2.2	Capítulo 3: As estrelas	2
1.2.3	Capítulo 4: Uma estrela típica da sequência principal: o Sol	3
1.2.4	Capítulo 5: Estrelas compactas	3
2	Enfoque teórico	5
2.1	PCN +	5
3	As estrelas	7
3.1	Introdução	7
3.2	Formação estelar: conceitos centrais	7
3.3	Luminosidade e brilho aparente	9
3.3.1	Atividade: constante solar, luminosidade e tempera- tura efetiva	11
3.3.2	Montagem do experimento	14
3.4	Magnitudes	16
3.4.1	Magnitude aparente	16
3.4.2	Magnitude absoluta	18
3.4.3	Correção bolométrica da magnitude bolométrica absoluta	20
3.5	Classificação espectral	20
3.5.1	Atividade: observação de linhas de absorção do Sol . .	23
3.5.2	Montagem do experimento	24
3.6	Diagrama Hertzsprung Russel - HR	26
4	Uma estrela típica da sequência principal: o Sol	31
4.1	Estrutura interna e atmosfera solar	31
4.1.1	O núcleo	31

4.1.2	Região radiativa	37
4.1.3	Região convectiva	42
4.2	Atmosfera solar	44
4.2.1	Fotosfera, cromosfera e coroa	45
5	Estrelas compactas	48
5.1	Introdução	48
5.2	Breve comentário sobre evolução estelar	48
5.3	Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkov	49
5.3.1	Correção da relatividade geral	53
5.4	Anã branca	54
5.4.1	O polítropo para a anã branca	56
5.4.2	Momentum de Fermi	56
5.4.3	Densidade da estrela em função da densidade do número de elétrons	58
5.4.4	Cálculo da pressão de elétrons degenerados de uma anã branca	59
5.4.5	Atividade: determinação do raio e da massa de uma anã branca	62
5.4.6	Equação para um regime qualquer do gás de Fermi para anã branca	66
5.4.7	Resultados para integração numérica no regime qualquer do gás de Fermi	69
5.5	Estrelas de nêutrons	72
5.6	Atividade: determinação do raio e massa de uma estrela de neutrons	72
5.6.1	Resultados da integração numérica para estrela de neutrons	74
5.7	Atividade: determinação da massa do buraco negro no centro da Via Láctea	76
5.7.1	Determinação newtoniana do Raio de Schwarzschild	77
6	Conclusões	79
A	Correções para a constante solar	81
A.1	Transmissão atmosférica em função do ângulo zenital	81
B	Esquema de montagem o espectroscópio de DVD	82
C	Equações da condição crítica para a convecção	86

D	Pressão gerada por um gás de férmions - pressão de degenerescência	88
E	Densidade de energia de um gás de férmions	91
F	A equação de Lane-Emden	93
G	Integração numérica	95
G.1	Anã branca para $p_F \ll m_e c$	95
G.2	Anã branca para $p_F \gg m_e c$	97
G.3	Equação de estado para um regime qualquer do gás de Fermi para anã branca	98
G.3.1	Pressão para um gás de elétrons segundo a equação <i>D.5</i>	98
G.3.2	Densidade de energia para um gás de elétrons segundo a equação <i>5.49</i>	99
G.3.3	Equação para um regime qualquer do gás de Fermi . . .	101
G.4	Equação de estado para um regime qualquer do gás de Fermi para estrelas de nêutrons	102
G.4.1	Pressão para um gás de nêutrons segundo a equação <i>D.5</i>	102
G.4.2	Densidade de energia para um gás de nêutrons segundo a equação <i>E.4</i>	104
G.5	Equação de estrutura newtoniana para um regime qualquer do gás de Fermi	105
G.6	Equação de estrutura com as correções da relatividade geral .	106
	Referências bibliográficas	109

Capítulo 1

Introdução

1.1 Justificativa e objetivo do trabalho

Este trabalho é voltado ao professor de ensino médio que tenha desejo de motivar o estudo de física através do fascínio que os temas abordados parecem exercer sobre os alunos. Os tópicos podem ser apresentados ao longo dos três anos do ensino médio como parte de um curso complementar, como a "disciplina" atividade complementar existente nas escolas públicas do Estado do Rio de Janeiro. Quanto a motivação, pode-se dizer que ao longo da experiência adquirida com o magistério o autor pode, eventualmente, compartilhar com os alunos de seus cursos regulares (de todas as séries do ensino médio e educação de jovens e adultos) assuntos relacionados à formação, evolução e estrutura estelar. Nesses breves momentos, os alunos mostravam-se particularmente participativos e, principalmente, inquisitivos sobre questões como: "de que forma o Sol brilha", "como surgiram as estrelas", "se as mesmas vão durar para sempre", sendo esta última seguida de um certo assombro após a resposta. Vale também comentar que por vezes os assuntos tomaram todo o período de seus intervalos, levando o autor a imaginar que essa curiosidade legítima merecia um esforço para ser devidamente correspondida. Diante disso, este trabalho tem a intensão de cobrir as questões mais frequentes, abordando os conceitos centrais relacionados às mesmas, funcionando como ferramenta básica para produzir outros conteúdos relevantes e atividades esti-

mulantes para seus alunos. Além disso, para o professor, esse trabalho deverá servir como guia em seus estudos, onde os resultados, alguns de muito difícil acesso em português, são explicados, com um grau razoável de detalhamento, numa linguagem matemática compatível com sua formação.

1.2 Estrutura da monografia

A monografia foi construída para que cada capítulo pudesse ser usado independentemente. Assim, o professor pode utilizar os conceitos centrais apresentados e posteriormente, usando as fontes bibliográficas apresentadas ou outras que venha a encontrar, aprofundá-los para a construção de um curso de ensino médio paralelo ao curso regular. A seguir uma descrição do conteúdo que será apresentado nesse breve trabalho.

1.2.1 Capítulo 2: Enfoque teórico

Neste capítulo serão discutidos brevemente as perspectivas quanto ao aprendizado dos assuntos tratados neste trabalho à luz dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+).

1.2.2 Capítulo 3: As estrelas

Neste capítulo serão abordados temas relacionados com as perguntas:

1. Como se formam as estrelas?
2. Como determinar a distância entre a Terra e uma estrela específica?
3. Como determinar a temperatura da "superfície" de uma estrela?
4. Como determinar a composição química de uma estrela?

Além disso, são dadas duas atividades que podem ser reproduzidas em sala de aula que, além de motivar o entendimento de temas típicos do ensino médio (fenômenos de transporte de energia), apresentam conceitos novos tais como: medida de distância em *parsec* e espectros atômicos.

1.2.3 Capítulo 4: Uma estrela típica da sequência principal: o Sol

Neste capítulo a estrutura interna básica do Sol será estudada, sendo abordadas as seguintes questões:

1. Como se dividem as estruturas interna e externa do Sol?
2. Qual é a natureza da fonte de energia do Sol?
3. Qual é o valor estimado da temperatura no centro do Sol?
4. Qual é a natureza do gás constituinte do Sol?

Neste capítulo serão vistos também equações mais complexas que são relevantes para o entendimento de alguns processos que ocorrem no interior do Sol, servindo de apoio para o professor interessado em tais tópicos.

1.2.4 Capítulo 5: Estrelas compactas

Este capítulo explica o mecanismo de equilíbrio de estrelas que consumiram o seu combustível nuclear e é, dentre todos, o que apresenta os conceitos mais complexos. Como exemplo podemos citar: a estatística de Fermi-Dirac, a resolução de equações diferenciais acopladas e uso de métodos computacionais. Além disso, são apresentados modelos alternativos aos *polítropos* que, embora ainda represente um modelo bem simplificado, podem ser considerados fisicamente mais realista como sugerido por Silbar e Reddy (2004). Finalmente, há a oportunidade de apresentar aos alunos interessados as seguintes questões:

1. Qual é o destino final das estrelas?
2. Qual é o mecanismo de equilíbrio que mantém a existência de tais estrelas?
3. Qual é o limite da massa das estrelas compactas?

4. Qual é o impacto das correções da relatividade geral no modelo usado para descrever estrelas de nêutrons?

A atividade apresentada neste capítulo é mais indicada para alunos que tenham interesse em desenvolver habilidades específicas para os cursos superiores de ciências exatas, pois exigem conhecimentos mais profundos de certos tópicos da física bem como ferramentas matemáticas mais sofisticadas. Por fim, neste capítulo, há uma atividade especial voltada para o ensino médio que tem por objetivo estimular o aprendizado de temas associados às leis de Kepler.

Capítulo 2

Enfoque teórico

2.1 PCN +

Para o estudo das propriedades físicas de estrelas, de sua formação e evolução é necessário o domínio de muitos campos da física, dos princípios da dinâmica de Newton à teoria da relatividade geral de Albert Einstein. Entretanto, já no primeiro ano do ensino médio, os conceitos básicos para o entendimento de alguns dos aspectos centrais dos temas abordados neste trabalho já estão disponíveis e podem ser ampliados paralelamente à formação do aluno. Dessa forma, os conhecimentos adquiridos relativos à física podem, mesmo para alunos que não venham a ter qualquer outro contato escolar futuro, apresentar-se como o conjunto de competências que permitam perceber e lidar com os fenômenos naturais do universo distante (PCN+ P.59).

Outro aspecto relevante ao tema escolhido refere-se à possibilidade de apresentar alguns conceitos de física moderna primando pelo entendimento dos aspectos conceituais principais. De fato, para alunos que contam com um tempo reduzido para a disciplina de física, ter a oportunidade de estudar tais conceitos pode fazer grande diferença em sua formação já que, estando intensamente presentes no cotidiano de todos, não há garantias de que futuramente esses alunos terão acesso aos mesmos, podendo resultar em um não desenvolvimento de certas competências (tal como a capacidade de criar modelos explicativos e representativos como posto no PCN +, página 66).

Por outro lado, é importante ressaltar que a apresentação de novos assuntos (principalmente um tão vasto e complexo como a astrofísica) necessita de certa preparação. Assim, esse trabalho pretende fornecer algumas propostas de aplicação dentro da concepção do "para que ensinar física" (PCN+ P.61) e em consonância com o que é esperado do ensino de física: "construir uma visão da física voltada para a formação de um cidadão contemporâneo, atuante e solidário, com instrumentos para compreender, intervir e participar na realidade" (PCN+ P.59).

Finalmente, espera-se que esse trabalho possa servir de base para projetos semelhantes que buscam ampliar a visão dos alunos do ensino médio sobre tópicos pertinentes à física de objetos celestes - seja com ênfase nos aspectos relacionados à Física Clássica, seja com foco na Física Moderna ou, como no caso do presente trabalho, com ambos - permitindo aos jovens adquirir competências para lidar com situações que vivenciam ou que venham a vivenciar (PCN+ P.61).

Capítulo 3

As estrelas

3.1 Introdução

O Universo conhecido possui algo em torno de 10^{23} estrelas (um número realmente espantoso!). Porém, apesar dessa quantidade impressionante, podemos encaixar todas essas estrelas em alguns grupos com características bem distintas. Tais grupos dependem basicamente da etapa evolutiva e da massa inicial, sendo a última um fator primordial para a determinação de seu destino final. Para entendermos a classificação das estrelas devemos conhecer os parâmetros relevantes utilizados na mesma e como estão relacionados entre si. Para isso, ao longo deste capítulo, iremos explicar os conceitos principais relativos à *luminosidade*, *magnitudes* e *classificação espectral*. Ainda, será visto a forma com que esses parâmetros agrupam-se em uma representação gráfica das etapas evolutivas das estrelas (*diagrama HR*). Finalmente, neste capítulo, trataremos de forma simplificada da condição de formação de estrelas em nuvens de hidrogênio molecular.

3.2 Formação estelar: conceitos centrais

Embora o processo de formação estelar não tenha sido completamente desenvolvido pelos astrofísicos, podemos considerar duas questões gerais. São elas:

1º Onde pode ocorrer a formação de uma estrela? A formação de estrelas ocorre em regiões do meio interestelar chamadas nuvens moleculares. Constituídas principalmente de hidrogênio na forma molecular (H_2), além de traços de CO , H_2O e HCN . Essas nuvens possuem estruturas cuja ordem de grandeza dos raios variam de 0,01 ano-luz¹ até 10 anos-luz. Assim, para termos uma ideia dessas dimensões, o menor raio citado é cerca de mil vezes maior que o raio médio compreendido pela órbita da Terra em torno do Sol. Além disso, embora possuam até cem mil vezes a massa do Sol, não apresentam em geral uma densidade maior que algumas centenas de moléculas de hidrogênio por centímetro quadrado além de possuírem temperaturas da ordem de 10^1 kelvins.

2º Qual é a condição necessária para que haja a formação de uma estrela? Uma nuvem molecular está sujeita à atração gravitacional entre as suas partes e, dessa forma, deveríamos esperar que a mesma acabasse por colapsar. Assim, podemos imaginar que existe um ou mais fatores que evitam a ocorrência de tal evento. O único fator² que será considerado neste trabalho é a pressão do gás contido no volume que compreende a nuvem molecular. Dessa forma, para que ocorra a formação de uma estrela é necessário que a energia potencial gravitacional da distribuição de massa da nuvem seja maior que a energia cinética, levando a nuvem a se contrair. Ou seja:

$$|E_{grav}| > E_{term} \quad (3.1)$$

A expressão para a energia potencial gravitacional da distribuição é dada por:

$$E_{grav} = -C_{grav} \frac{GM^2}{R} \quad (3.2)$$

onde G é a constante de gravitação, M é a massa da nuvem, R é o raio considerado para a nuvem e C_{grav} representando uma constante que depende

¹1ano – luz equivale à $9,46 \times 10^{15}$ metros

²Os demais fatores, que não serão considerados neste trabalho, estão relacionados às energias cinética de rotação, cinética de turbulência e magnética.

da distribuição de massa da névem (suposta, por simplicidade, esférica e com densidade uniforme) cujo valor, neste caso, vale $\frac{3}{5}$.

Para a expressão da energia térmica devemos considerar o gás como sendo ideal³ (isso é bastante razoável pois a densidade das névens moleculares são incrivelmente baixas). Assim, a equação para a energia térmica é dada por:

$$E_{term} = \frac{3}{2} \frac{M}{\mu} R_g T \quad (3.3)$$

Para as equações acima T representa a temperatura absoluta, μ a massa atômica e R_g a constante universal dos gases.

Igualando as equações 3.2 e 3.3 e explicitando R , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} \frac{GM^2}{R} &= \frac{3}{2} \frac{M}{\mu} R_g T \\ \Rightarrow R_J &= \frac{2}{5} \frac{GM\mu}{R_g T} \end{aligned} \quad (3.4)$$

A equação 3.4 representa o raio de Jeans⁴. Respondendo à segunda questão, em uma determinada região da nuvem molecular com uma massa $M(R)$ e uma temperatura T , devemos ter um raio menor que R_J para que ela possa sucumbir ao colapso gravitacional.

3.3 Luminosidade e brilho aparente

Ao observar um conjunto de estrelas em um local sem fontes de luz próximas pode-se perceber facilmente a diferença de brilho entre muitas delas. Essa diferença está relacionada com uma grandeza chamada **brilho aparente** ou, para o caso particular do Sol, **constante solar**. Formalmente o brilho aparente f representa a energia por unidade de tempo que atinge perpendicularmente uma superfície de área unitária acima da atmosfera terrestre

³Todo gás de baixa densidade se comporta da mesma maneira independentemente de sua natureza sendo, por isso, chamado de ideal.

⁴Sir James Hopwood Jeans (1877-1946).

⁵; sua unidade, no sistema internacional, é $J/s \cdot m^2$. Além disso, usando a conservação de energia, podemos verificar que a constante solar está relacionada com a luminosidade L que é a energia total emitida isotropicamente pela estrela por unidade de tempo. Para isso, basta imaginar que a mesma energia emitida a partir da superfície da estrela atravessou uniformemente uma esfera imaginária de raio r , onde r é a distância entre a estrela e a Terra. Com isso, podemos escrever:

$$L = f4\pi r^2 \quad (3.5)$$

De posse da luminosidade podemos determinar a temperatura efetiva T_e , parâmetro relativo à temperatura da fotosfera⁶ da estrela, usando a relação.

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4 \quad (3.6)$$

Na equação acima R é o raio da estrela e σ é a *constante de Stefan-Boltzmann*; seu valor é $5,6704 \times 10^{-8} W/m^2 \cdot K^4$.

A equação 3.6 está relacionada com a teoria de emissão de radiação de *corpo negro* que estabelece a quantidade *radiância* R_T como função da quarta potência da temperatura absoluta segundo a *lei empírica de Stefan*⁷ dada por $R_T = \sigma T^4$.

A seguir será proposta uma atividade relacionada aos conceitos tratados nesta seção com o objetivo de levar o aluno a questionar a relação entre a energia emitida pelo Sol e a energia recebida na Terra, bem como a relação entre a intensidade da energia irradiada com a temperatura efetiva de nossa estrela.

⁵Para que efeitos decorrentes da interação entre a atmosfera e a radiação possam ser desprezados.

⁶A fotosfera é a região de uma estrela a partir do qual toda luz parece ser emitida.

⁷Posteriormente demonstrada como um resultado da Lei de Planck.

3.3.1 Atividade: constante solar, luminosidade e temperatura efetiva

O objetivo dessa atividade é determinar o valor da constante solar e , de posse da mesma, determinar a luminosidade e a temperatura efetiva do Sol. Assim, iniciaremos com a montagem experimental para determinação da constante solar.

Material necessário:

1. Recipiente de isopor
2. Tinta preta fosca Látex PVA a base de água
3. Termômetro
4. Pincel
5. Cronômetro
6. Régua
7. Fime PVC transparente

Conforme definido na seção 3.2 a constante solar representa a energia por unidade de tempo que atinge **perpendicularmente** uma superfície de área unitária. Assim, a energia Q que atravessa a área A da abertura do nosso recipiente em um intervalo de tempo Δt é dada por:

$$Q = fA\Delta t \quad (3.7)$$

Dependendo do horário em que a experiência for realizada a radiação não estará incidindo perpendicularmente à superfície do recipiente. Por isso, é necessário introduzir uma pequena correção na equação 3.7.

Conforme a figura acima, basta determinar a projeção da direção de propagação da radiação sobre a normal à superfície do recipiente. Com isso, a equação 3.6 fica:

$$Q = fA \cos \theta \Delta t \quad (3.8)$$



Figura 3.1: Materiais usados - o termômetro é culinário com boa sensibilidade e bom intervalo de funcionamento.

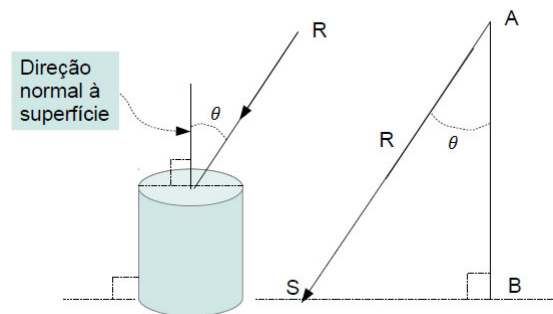


Figura 3.2: Recipiente com sua superfície não paralela a direção de incidência da radiação R e bastão de comprimento \overline{AB} projetado sobre o solo uma sombra de comprimento \overline{BS} .

O cosseno de θ pode ser determinado com auxílio da sombra \overline{BS} formada pelo bastão \overline{AB} como se segue:

$$\cos \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BS}} \quad (3.9)$$

A ideia fundamental é que a energia que atravessa a superfície do recipi-

ente é absorvida pela água que, por sua vez, sofre uma variação de temperatura de acordo com a equação bem conhecida da calorimetria:

$$\Delta T = \frac{Q}{mc} \quad (3.10)$$

onde m é a massa de água no interior do recipiente, c é o calor específico da água e ΔT é a variação de temperatura. Note que estamos usando as unidades do sistema internacional.

Combinando as equações 3.8 e 3.10 obtemos a relação desejada entre a variação de temperatura e o intervalo de tempo.

$$\Delta T = f \frac{A \cos \theta}{c m} \Delta t \quad (3.11)$$

Como geralmente não dispomos de uma balança para determinar a massa de água, substituiremos m por ρV , onde ρ é a densidade e $V = h A$ o volume. Que resulta em:

$$\Delta T = f \frac{\cos \theta}{c \rho h} \Delta t \quad (3.12)$$

Finalmente, dada a temperatura inicial da água e adotando o instante inicial como *zero* temos:

$$T(t) = f \frac{\cos \theta}{c \rho h} t + T_0 \quad (3.13)$$

Essa expressão é uma função do primeiro grau cujo gráfico está abaixo representado.

A partir do coeficiente angular da função e do ângulo de inclinação da reta ϕ pode-se determinar a constante solar pela relação:

$$f = \tan \phi \frac{c \rho h}{\cos \theta} \quad (3.14)$$

Para determinar a luminosidade e a temperatura efetiva basta usar as equações 3.5 e 3.6, respectivamente.

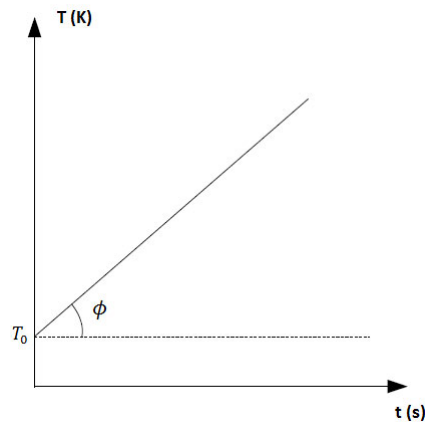


Figura 3.3: Gráfico qualitativo da equação 3.13.

3.3.2 Montagem do experimento

Iremos supor como dados da experiência os valores do calor específico da água c_{agua} , sua densidade média ρ_{agua} e a altura h da coluna de água colocada no recipiente.

1. $c_{\text{agua}} = 4190 \text{ j/kg K}$
2. $\rho_{\text{agua}} = 1000 \text{ kg/m}^3$
3. $h = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

Suporemos que a reflexão dos arredores onde se encontra o recipiente é desprezível e que o ângulo θ de incidência da radiação apresenta variação desprezível no decorrer da tomada de dados.

Para prepararmos o recipiente deve-se reduzir o seu tamanho para evitar que a radiação seja obstruída pelo mesmo. Uma altura **interna** de 3 cm é razoável e, para uma abertura de $6,5 \text{ cm}$ de diâmetro, teremos aproximadamente 100 g de água. Finalmente, devemos pintar de preto o interior de nosso recipiente para minimizar a reflexão e cobrir a parte superior com filme PVC transparente para evitar a evaporação (a reflexão gerada pelo filme PVC é desprezível), estando o mesmo pronto.

Usaremos um bastão ou caixa para projetar a sombra sobre a superfície e mediremos os comprimentos da caixa e da sombra (ver fig. ??) para ob-



Figura 3.4: Preparação de nosso recipiente que originalmente era usado para manter a temperatura de latas de cerveja e refrigerantes.

termos o valor de $\cos \theta$. Após medirmos o valor da temperatura inicial da água, posicionaremos o conjunto sob o Sol. Tomando o valor da temperatura em intervalos de 30 segundos devemos obter algo em torno de 30 medidas confiáveis.

Por fim, faremos uso de um programa apropriado para construir uma tabela de temperatura contra o tempo e, a partir da mesma, construiremos um gráfico como ilustrado na figura 3. Com isso, determinaremos o valor do coeficiente angular do gráfico a fim de substituí-lo na equação 3.14.

Comentário sobre os resultados

O valor esperado para o resultado da constante solar é de $1367,5 W/m^2$ conforme podemos encontrar na literatura em geral. No entanto, o valor encontrado será consideravelmente menor devido as atenuações atmosféricas e do ângulo de inclinação da incidência da radiação (ângulo zenital). Além disso, existem os efeitos de atenuação relativos ao dia do ano e da latitude. No apêndice A encontra-se um gráfico que será de ajuda para determinar o valor esperado da constante solar.

Uma vez obtido o valor da constante solar, basta substituir o resultado nas equações 3.5 e 3.6 para determinar L_{\odot} e T_e , respectivamente.

3.4 Magnitudes

3.4.1 Magnitude aparente

A intensidade do brilho aparente medido da Terra pode ser colocada em termos de **magnitude aparente** denotada por m e definida como:

$$m = K \log f + C \quad (3.15)$$

onde C é uma constante que define o zero da escala e K é uma constante relacionada com a diferença entre magnitudes aparentes de duas estrelas.

O motivo de a magnitude ser expressa como função do logaritmo da quantidade f está relacionado com a escala de sensibilidade do olho humano. As magnitudes vistas a olho nu variam de 1 até 6, sendo a maior magnitude correspondente ao menor brilho aparente. N. R. Pogson⁸ estabeleceu que uma estrela de magnitude 1 possui um brilho aparente f_1 cem vezes mais intenso que uma de magnitude 6 de brilho aparente f_6 de modo que, ao aplicarmos a equação 3.15, podemos obter o valor de K :

$$m_6 - m_1 = K \log f_6 - K \log f_1 \Rightarrow m_6 - m_1 = K \log \frac{f_6}{f_1} \quad (3.16)$$

Fazendo $m_1 = 1$ e $m_6 = 6$ na equação 3.16, temos;

$$K \log \frac{f_1}{f_6} = -5 \Rightarrow K \log(100) = -5 \Rightarrow K = -2,5$$

Dessa forma a equação 3.16 fica:

$$\begin{aligned} m_6 - m_1 &= -2,5 \log f_6 - 2,5 \log f_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow m_6 - m_1 = -2,5 \log \frac{f_6}{f_1} \end{aligned} \quad (3.17)$$

⁸Norman Robert Pogson (1829-1891).

É importante notar que as magnitudes de 1 até 6 referem-se à percepção do olho humano. Assim, se usássemos um telescópio com uma abertura de 70 milímetros de diâmetro, que representa um valor dez vezes maior que o diâmetro do olho humano com a abertura máxima da pupila, teríamos uma área cem vezes maior⁹ possibilitando a percepção de 5 magnitudes mais fracas.

Imagine agora a situação em que temos duas estrelas, chamaremos de estrela A e estrela B , com distâncias relativas à Terra iguais a r_A e r_B , respectivamente. Se, por algum motivo, a luminosidade de A for quatro vezes maior que a luminosidade de B e $r_A = 2r_B$ então a magnitude, como definida, resultaria em valores iguais para as duas estrelas. Podemos entender melhor a razão que leva a valores iguais para as magnitudes de duas estrelas com luminosidades diferentes nas condições acima apenas lembrando que o brilho aparente é dado por:

$$f = \frac{L}{4\pi r^2}$$

Assim, aplicando a diferença de magnitude aparente dada pela equação 3.17 para as estrelas A e B , temos:

$$m_A - m_B = -2,5 \log \frac{L_A/4\pi(r_A)^2}{L_B/4\pi(r_B)^2}$$

Adotando $L_A = 4L_B$ e $r_A = 2r_B$ e substituindo a expressão acima, obtemos o resultado esperado.

$$m_A - m_B = -2,5 \log 1 \Rightarrow m_A = m_B$$

Isso ocorreu porque a magnitude depende do brilho aparente que por sua vez depende do inverso do quadrado da distância r . Dessa forma, devemos buscar um meio de estabelecer uma medida de magnitude que independa da distância de observação. Isso pode ser feito para um grupo grande de estrelas

⁹Basta calcular a razão entre a área da cobertura pela lente do telescópio e a área da pupila.

ao se introduzir a *magnitude absoluta*.

3.4.2 Magnitude absoluta

Inicialmente, para melhor compreensão da definição da magnitude absoluta, será definido o *parsec* como a distância de uma objeto cuja *paralaxe anual* média vale um segundo de arco. Na figura abaixo, a distância entre o Sol e os pontos A e B da Terra em sua órbita são medidos em unidades astronômicas (**UA** - distância média entre o Sol a Terra; 1UA equivale a $1,49 \times 10^9$ metros).

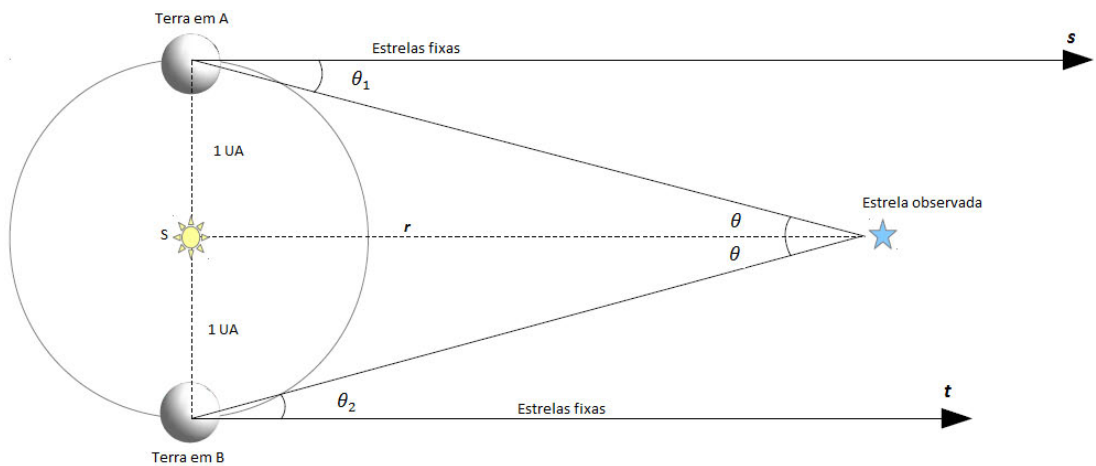


Figura 3.5: As semirretas s e t são paralelas e r é a distância entre a estrela observada e o Sol.

Com base na figura acima e adotando $\theta_1 \approx \theta_2$ e o arco $SA \approx \overline{SA}$ temos:

$$\theta = \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2}$$

$$\overline{SA} = \theta r \Rightarrow r = \frac{\overline{SA}}{\theta}$$

Como $\overline{SA} = 1 \text{ UA}$ e $\theta = \frac{\pi}{648.000}$. Então, $r = 1pc$ de modo que $1pc = 206.264,8 \text{ UA}$.

Cabe ressaltar que nem toda estrela pode ter sua distância medida em parsec. Isso ocorre devido ao limite em que o ângulo θ pode ser medido

com confiança¹⁰. Mesmo assim, o número de estrelas no qual essa unidade é aplicável é da ordem de 10^5 .

Tratando do assunto desta seção temos que a magnitude, como definida na seção anterior, depende da distância entre a estrela e o observador. Para contornar essa dependência devemos introduzir o conceito de magnitude absoluta M que representa o brilho aparente que uma estrela teria se a mesma estivesse a uma distância padrão de 10 parsecs. A magnitude absoluta é dada por:

$$M = -2,5 \log[L(10pc)] + C \quad (3.18)$$

Onde C é uma constante que define o zero da escala e $L(10pc)$ representa o brilho aparente a 10 parsec do observador.

Ao tomarmos a diferença entre a magnitude aparente e a magnitude absoluta estaremos posicionando uma estrela, localizada a uma distância arbitrária r da Terra, em uma posição hipotética predeterminada resultando em valores diferentes de magnitudes sempre que a intensidade dos brilhos forem diferentes. Procedendo com os cálculos, temos:

$$m - M = 2,5[\log L(10pc) - \log L(r)] = -2,5 \log \left\{ \frac{L(10pc)}{L(r)} \right\} \quad (3.19)$$

Ainda, o termo entre chaves acima pode ser substituído pelo resultado da expressão abaixo.

$$\frac{L(10pc)}{L(r)} = \frac{L(r)/4\pi r^2}{L(10pc)/4\pi(10pc)^2} = \frac{(10pc)^2}{r^2}.$$

Com isso, a equação 3.19 resulta em:

$$m - M = -2,5 \log \frac{L(r)}{L(10pc)} = -2,5 \log \frac{(100cp^2)}{r^2} \Rightarrow$$

$$M = m - 5 \log r + 5 \quad (3.20)$$

¹⁰Cerca de um centésimo de segundo.

Onde r é medido em parsec, m é a magnitude aparente da estrela.

3.4.3 Correção bolométrica da magnitude bolométrica absoluta

Finalmente, devemos considerar que algumas faixas de comprimento de onda sofrem atenuações na atmosfera terrestre ou mesmo no meio interestelar (como uma nuvem molecular por exemplo). Assim, a luminosidade está associada a energia emitida pela estrela por unidade de tempo dentro de uma faixa de comprimento de onda. Como é muito difícil medir a magnitude - dita bolométrica - que leva em conta todos os comprimentos de onda pelos motivos ditos acima, define-se uma magnitude bolométrica m_{bol} em função da magnitude visual m conforme a equação abaixo.

$$m_{bol} = m - CB \quad (3.21)$$

Onde m é a magnitude relacionada ao espectro visível e CB é a correção bolométrica que possui valor aproximadamente igual a zero para estrelas similares ao Sol.

A magnitude bolométrica absoluta M_{bol} é dada por:

$$M_{bol} = M_{bol}^{\odot} - 2,5 \log \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right) \quad (3.22)$$

onde M_{bol}^{\odot} é a magnitude bolométrica do Sol como posto por Oliveira Filho e Saraiva (2004).

3.5 Classificação espectral

Ao usarmos um prisma, como aqueles encontrados em binóculos por exemplo, para decompor a luz solar veríamos, após delicado procedimento de ajuste, um espectro contínuo onde as cores que o constituem estão difusas (veja figura abaixo). Porém, se possuíssemos uma maior resolução poderíamos perceber não somente o mesmo espectro com maior nitidez, mas também a existência

de linhas escuras em determinadas regiões desse espectro visível. A razão da existência de tais linhas escuras, como ilustrado na *figura 7*, está relacionada à absorção de certos comprimentos de onda da radiação emitida pelo gás das regiões internas e mais quentes da estrela pelo gás mais frio das regiões mais externas. E, embora a composição química da estrela apresente relação com as linhas de absorção, é a temperatura efetiva T_e da estrela que define o padrão e a intensidade dessas linhas de modo que podemos estabelecer que **a classe espectral da estrela é função da temperatura efetiva.**



Figura 3.6: (A) Espectro solar contínuo projetado em papel pardo obtido a partir de um prisma. (B) Concepção gráfica do espectro contínuo do Sol.

Para ilustrar, consideraremos duas estrelas com temperaturas efetivas de cerca de 10.000 K e 6.000 K . No caso da estrela com maior temperatura efetiva existirão linhas de absorção associadas ao hidrogênio, pois em temperaturas dessa ordem, muitos dos átomos de hidrogênio estão excitados ao segundo nível de forma que a radiação produzida nas regiões centrais da estrela tem possibilidade de gerar transições do segundo nível para o nível superior (naturalmente que o átomo voltará a sua configuração energética anterior liberando radiação com comprimentos de onda diferente - ou mesmo com comprimento de onda igual ao absorvido - espalhada em uma direção diferente da direção original da radiação absorvida). Esse efeito acaba por gerar lacunas nas regiões correspondentes aos comprimentos de onda absorvidos. No caso de estrelas mais frias (como o Sol por exemplo) os átomos de hidrogênio encontram-se, principalmente, em seu estado fundamental com poucas colisões energéticas o suficiente para excitar o hidrogênio. Porém, ainda será possível detectar linhas de absorção distintas daquelas geradas na estrela de maior temperatura. Assim, podemos concluir que a existência desse conjunto distinto de linhas se deve a presença de outro elemento químico que sofre o mesmo efeito de excitação a uma temperatura de 6000 K ; no caso do Sol esse elemento é o hélio.

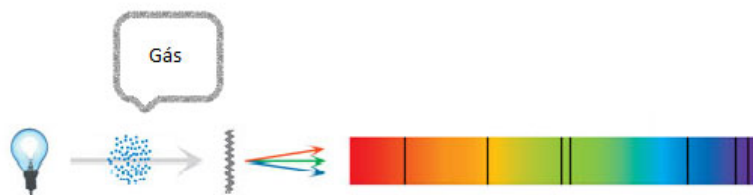


Figura 3.7: Efeito da passagem da radiação contínua através de um gás frio. Adaptado de: scienceinschool.org/repository/images/issue4spectrometer11-large.jpg. Acessado em 13 dez. 2011.

Em resumo, a radiação eletromagnética contínua ao atravessar um gás em determinada temperatura tem certos comprimentos de onda absorvidos gerando um padrão de lacunas no espectro que emerge desse gás conforme ilustrado pela figura 3.7.

Passando a tratar da classificação espectral propriamente dita, podemos dizer que esta, inicialmente, foi estabelecida de acordo com a intensidade das linhas de absorção do hidrogênio, com a letra "A" representando linhas de absorção mais fortes e decrescendo segundo a ordem alfabética. No entanto, os astrônomos perceberam que essa classificação não levava à ordenação em termos de temperatura efetiva, pois, como dito acima, as linhas de absorção dependem do nível de excitação do átomo de hidrogênio. Sendo assim, estrelas com temperaturas efetivas da ordem de 20.000 K não apresentam esse tipo de linhas de absorção porque a maior parte do hidrogênio da fotosfera está ionizado enquanto que em estrelas com temperaturas efetivas da ordem de 3.000 K simplesmente quase não apresentam átomos de hidrogênio excitados ao segundo nível. Dessa forma, a classificação em ordem alfabética cedeu lugar a uma classificação por ordem da temperatura efetiva que resultou em:

- O **estrelas azuis.** Temperaturas efetivas entre 20.000 K e 40.000 K .
- B **estrela branco azuladas.** Temperaturas efetivas da ordem de 15.000 K .
- A **estrelas brancas.** Temperaturas efetivas da ordem de 9.000 K .

- F** estrelas branco amareladas. Temperaturas efetivas da ordem de 7.000 K .
- G** estrelas amarelas. Temperaturas efetivas da ordem de 5.500 K (Como o Sol).
- K** estrelas alaranjadas. Temperaturas efetivas da ordem de 4.000 K .
- M** estrelas vermelhas. Temperaturas efetivas da ordem de 3.000 K .

onde, dependendo da classificação espectral, temos a presença de linhas de absorção relativas a presença de um ou mais elementos químicos. Como exemplo, podemos citar: hidrogênio, hélio, cálcio e até mesmo, para estrelas mais frias como as do tipo M , moléculas de óxido de titânio.

A seguir será proposta uma atividade com a finalidade de proporcionar ao aluno a visualização direta das linhas de absorção do Sol, com a finalidade de permitir a compreensão de um método de investigação das propriedades das estrelas.

3.5.1 Atividade: observação de linhas de absorção do Sol

A atividade proposta a seguir tem como base o trabalho apresentando no *Journal of Chemical Education*¹¹ dos autores Fumitaka Wakabayashi e Kiyohito Hamada. Porém, faremos algumas modificações com o objetivo de obter o melhor resultado possível para o nosso propósito específico: observar as raias de absorção do Sol.

Para obtermos o resultado é necessário usar um espectroscópio que, normalmente, só encontramos em laboratórios de física. Felizmente, podemos construir um espectroscópio razoável usando um DVD e papel cartão (a figura 3.8 mostra um já pronto).

Material usado

1. DVD (novo)

¹¹Veja mais detalhes nas referências bibliográficas.



Figura 3.8: Espectrocópio de DVD.

2. Papel cartão A4 (preto de preferência¹²)
3. Cola

O material para construir 10 espectroscópios não é superior a 25 reais e não exige grande habilidade manual, sendo facilmente construído dentro de dois períodos de aula (cerca de 1 hora e 40 minutos). É provável que os alunos possam construir os seus próprios espectroscópios sem grandes problemas.

3.5.2 Montagem do experimento

Após construir o espectroscópio como indicado no apêndice B basta observar o espectro desejado. Os resultados da observação podem ser fotografados (com um pouco de dificuldade dependendo da habilidade do fotógrafo) e, como exemplo, são dadas algumas fotos do espectro discreto de uma lâmpada fria (figura 3.9).

Resultados das observações

Pode ser que o registro dos resultados por meio de fotografia não seja muito bom devido à qualidade da máquina fotográfica usada ou da habilidade do fotógrafo. Entretanto, em observação direta, as linhas de absorção mais intensas são facilmente distinguíveis sendo recomendado que a experiência

¹²Caso o papel cartão preto não seja conseguido, a montagem da caixa pode ser feita com cartolina preta. Mais fácil de encontrar, porém mais frágil.

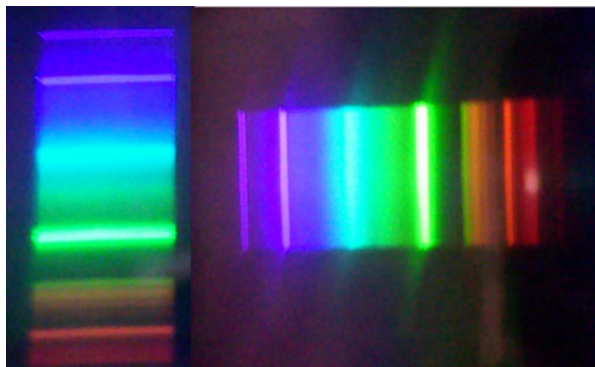


Figura 3.9: Espectro discreto de uma lâmpada fria.

seja reproduzida em sala para possibilitar aos alunos visualizarem por eles mesmos.

Na *figura 3.10*, **A** e **B** são fotos do espectro de absorção do Sol obtidos a partir do espectroscópio de DVD; **C** é o espectro de uma lâmpada de filamento de 80 watts (fotos feitas pelo autor). **D** é o espectro de absorção completo do Sol (concepção artística).

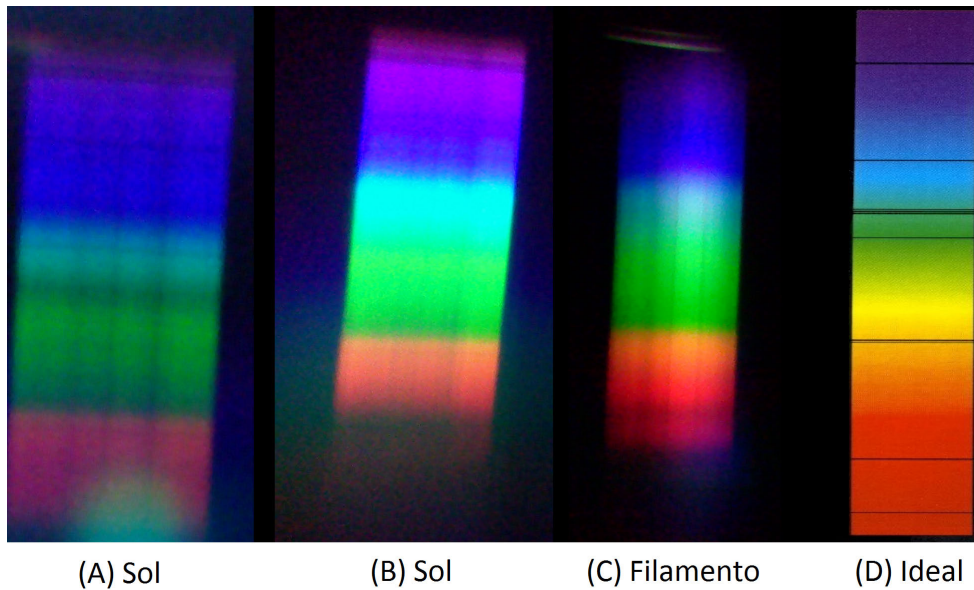


Figura 3.10: Resultado das observações feitas com o espectrocópio de DVD. D foi adaptado de <http://astropt.org/blog/>. Acessado em 25 jan. de 2012.

3.6 Diagrama Hertzsprung Russel - HR

O diagrama Hertzsprung - Russell¹³ relaciona a luminosidade L e a temperatura efetiva T_e de uma estrela, permitindo também representar a magnitude bolométrica absoluta e a classificação espectral pois estão, respectivamente, relacionadas às grandezas anteriormente mencionadas. Ao observar o diagrama notamos que uma grande variedade de estrelas se distribui ao longo da faixa diagonal, chamada **sequência principal**. Nesta região agrupam-se estrelas, chamadas estrelas anãs¹⁴, que partilham de duas características fundamentais: fusão de hidrogênio em seus núcleos e homogeneidade química. A posição que uma estrela ocupa sobre essa diagonal depende de sua massa e é aproximadamente fixa enquanto houver fusão de hidrogênio. Estrelas que usam substâncias mais pesadas como combustível ocupam a região acima da diagonal e são chamadas *gigantes ou supergigantes* enquanto que estrelas

¹³Desenvolvido de maneira independente por Ejnar Hertzsprung (1873-1967) e por Henry Norris Russell (1877-1957).

¹⁴Não confundir com anãs brancas que são estrelas que não possuem mais reações term nucleares, dependendo apenas do equilíbrio hidrostático para manter sua estabilidade.

que não mais possuem reações termonucleares ocupam a região abaixo da diagonal (anãs brancas e estrelas de nêutrons). Assim, o diagrama permite, com base nos parâmetros já mencionados, classificar a etapa evolutiva das estrelas.

Para obter um melhor entendimento da relação de dependência entre a luminosidade L e a massa M vamos estabelecer uma expressão aproximada para estas duas grandezas para o caso específico do Sol. As relações obtidas a partir deste ponto mantêm-se para estrelas com massas similares, além de representar um comportamento médio razoavelmente bom para um entendimento qualitativo do assunto. Escrevendo:

$$L_{\odot} = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_e^4 \quad (3.23)$$

onde o símbolo \odot denota que a grandeza em questão diz respeito ao Sol e considerando que a temperatura do interior do Sol T_I geraria uma luminosidade L que a mesma teria se não houvesse a interação da radiação gerada com o meio interestelar temos, em analogia a equação 3.23, a relação aproximada:

$$L \approx 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_I^4 \quad (3.24)$$

A radiação não segue um caminho reto do núcleo do Sol até a Terra ou qualquer outro ponto do universo. Ao invés disso, a radiação segue um caminho tortuoso no qual interage com o meio interestelar, sendo seguidamente absorvida e reemitida com comprimentos de ondas cada vez menores. Assim, podemos pensar no tempo t_{RW} (o subscrito RW significa *random walk*¹⁵), que indica o tempo necessário para a radiação absorvida e reemitida atingir as regiões mais externas do Sol após N interações com o meio intraestelar, como sendo dado, aproximadamente, por:

$$t_{RW} = \frac{R_{\odot}^2}{cl} \quad (3.25)$$

¹⁵Feynman et al (2008) - em português, passeio aleatório.

onde l é o livre caminho médio¹⁶ da radiação no interior do Sol e c é a velocidade da luz. Por outro lado, se não houvesse qualquer interação, o tempo t necessário para a radiação deixar o Sol seria:

$$t = \frac{R_{\odot}}{c} \quad (3.26)$$

Comparando as equações 3.25 e 3.26 podemos notar que t é menor por um fator l/R_{\odot} que t_{RW} . Isso significa que a energia que escapa do Sol tem sua taxa reduzida de l/R_{\odot} . Portanto, podemos estabelecer que a relação entre L_{\odot} e L é dada por:

$$T_e \approx \left[\frac{l}{R_{\odot}} \right]^{1/4} T_I \quad (3.27)$$

Para obtermos a equação que relaciona a luminosidade e a massa devemos usar a pressão média $\langle P \rangle$ no interior do Sol dada, conforme Phillips (1994), por:

$$\langle P \rangle = \frac{\langle \rho \rangle}{\bar{m}} k T_I \quad (3.28)$$

onde \bar{m} é massa média das partículas que constituem o gás¹⁷, k é a constante de Boltzmann e $\langle \rho \rangle$ é a densidade média do Sol.

Ainda de acordo com Phillips (1994), o equilíbrio hidrostático do Sol implica que podemos usar o teorema do virial¹⁸ para obtermos uma expressão para a pressão média em seu interior conforme exposto a seguir:

$$\langle P \rangle = -\frac{1}{3} \frac{E_G}{V} \approx \frac{GM_{\odot}^2}{4\pi R_{\odot}^4} \quad (3.29)$$

onde E_G é a energia gravitacional e V é o volume da estrela.

Igualando a equação 3.28 com o resultado da equação 3.29 e explicitando

¹⁶Representa a distância média que a radiação pode viajar antes de interagir com a matéria, sendo da ordem de 10^2 metros.

¹⁷Suposto ideal.

¹⁸O teorema do virial relaciona a média temporal da energia cinética total de um sistema de N partículas com a energia potencial total.

T_I obtemos a expressão necessária para, em conjunto com a equação 3.27, determinar a relação desejada entre L_{\odot} e M_{\odot} . Assim:

$$T_I \approx \frac{GM_{\odot}\bar{m}}{3kR_{\odot}} \quad (3.30)$$

e

$$T_e \approx \left[\frac{l}{R_{\odot}} \right]^{1/4} \frac{GM_{\odot}\bar{m}}{3kR_{\odot}} \quad (3.31)$$

Usando a equação 3.31 podemos determinar a relação de proporcionalidade desejada substituindo a mesma na equação 3.23.

$$L_{\odot} \approx \frac{4\pi\sigma l G^4 \bar{m}^4}{3^4 k^4 R_{\odot}^3} M_{\odot}^4 \approx \frac{(4\pi)^2 \sigma G^4 \bar{m}^4 \langle \rho \rangle l}{3^5 k^4} M_{\odot}^3 \quad (3.32)$$

Conseqüentemente, podemos escrever:

$$L_{\odot} \propto M_{\odot}^3 \quad (3.33)$$

Porém, como dito inicialmente, a relação acima não se mantém para todos os valores de massas, sendo dada por $L \propto M$ para estrelas supermassivas e por $L \propto M^{5.5}/R^{0.5}$, para estrelas menos massivas que o Sol, como verifica Shu (1982).

Com base na relação entre a massa e a luminosidade de uma estrela podemos estabelecer o critério que determina a posição ocupada pelas estrelas ao longo da diagonal. Note que, ao longo de sua evolução, uma estrela não apresenta mudança apreciável da posição ocupada no diagrama, já que as variações em sua massa e luminosidade não são significativas em relação aos valores iniciais.

Finalmente, a massa define o destino da estrela após a mesma ter consumido seu combustível nuclear. Assim, para estrela simples¹⁹, podemos citar o caso de estrelas com massa entre $0,8M_{\odot}$ e $10M_{\odot}$ que terminam sua

¹⁹Não fazem parte de um sistema binário, por exemplo.

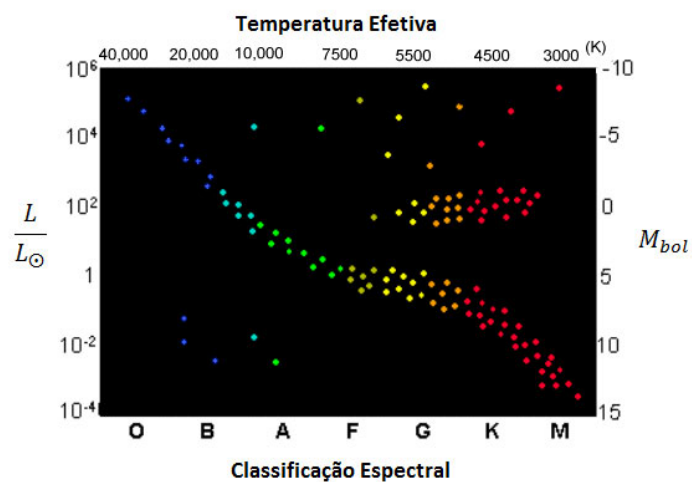


Figura 3.11: Diagrama HR. Adaptado de <http://cas.sdss.org/dr5/pt/>. Acessado em: 13 dezembro 2011.

existência como *anãs brancas* e estrelas com massa entre $10M_{\odot}$ e $25M_{\odot}$ que terminam sua existência como *estrelas neutrons* (ambas ocupam posições abaixo da diagonal principal). Anãs brancas e estrelas de nêutrons serão discutidas em mais detalhes como exemplos de estrelas fora da sequência principal.

Capítulo 4

Uma estrela típica da sequência principal: o Sol

4.1 Estrutura interna e atmosfera solar

Como o Sol é uma esfera de gás não há, no sentido literal da palavra, uma superfície para separar o interior e a sua atmosfera. No entanto, considera-se superfície a região a partir da qual o meio torna-se completamente opaco a emissão de radiação visível vinda de regiões mais internas. Assim, começaremos nosso breve estudo pelo interior solar que pode ser dividido, rudimentarmente, em: núcleo, região radiativa e região convectiva.

4.1.1 O núcleo

A região, a partir do centro, que compreende cerca de 25% do raio do Sol e concentra 10% de sua massa é o *núcleo*. É nesta região que ocorrem as reações responsáveis pela produção de energia que têm mantido o Sol brilhando ao longo de seus 4,5 bilhões de anos e ainda o manterão por igual período.

A fonte de energia do Sol foi motivo de debate entre os físicos durante muitos anos e, ao final do século 19, estes estavam dispostos a aceitar o modelo de *Kelvin-Helmholtz* que, baseado no teorema do virial, estabelecia a relação:

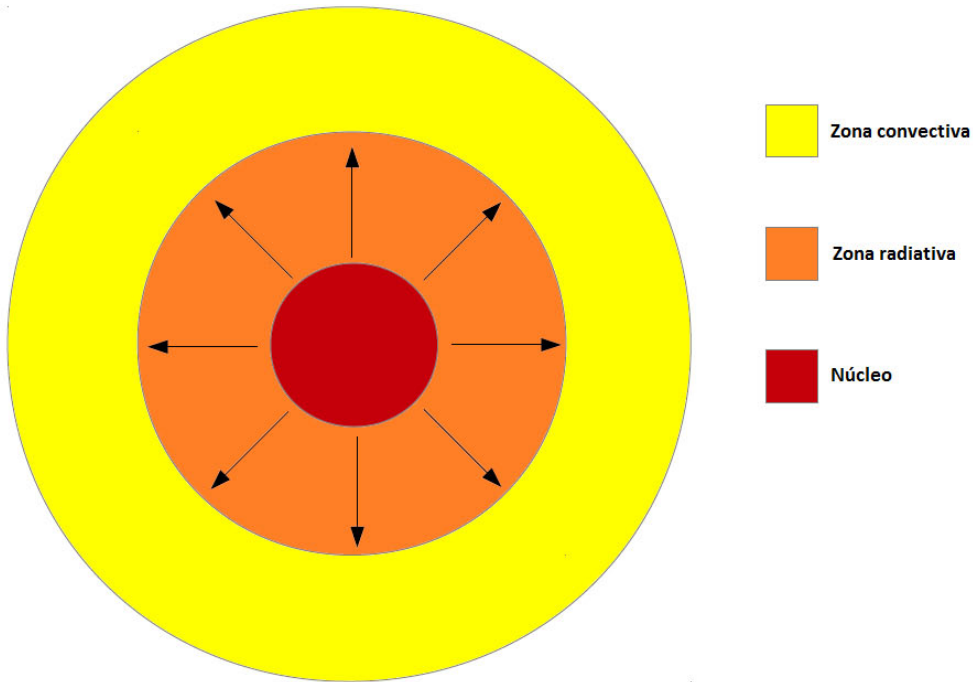


Figura 4.1: Interior do Sol.

$$E_{termica} + E_G = \frac{1}{2}E_G \Rightarrow E_{termica} = -\frac{1}{2}E_G \quad (4.1)$$

onde $E_G = -3GM^2/5R$ é a energia potencial gravitacional de uma esfera de gás autogravitante de massa M e raio R .

A equação acima indica que, ao irradiar energia térmica, a esfera de gás autogravitante se contrai. Esse resultado pode ser usado para estimar o tempo no qual o Sol poderá manter seu brilho. Para isso basta adotar a hipótese de que a energia térmica será, ao longo do tempo, irradiada a uma taxa igual à luminosidade L_\odot do Sol. Vejamos:

$$\frac{GM_\odot^2}{2R_\odot\tau} = L_\odot \Rightarrow \tau = \frac{GM_\odot^2}{2R_\odot L_\odot} \quad (4.2)$$

Numericamente, pela equação acima, o tempo τ no qual o Sol pode irradiar, antes de consumir toda a energia térmica supostamente disponível, é de cerca de 30 milhões anos. Porém, como alguns registros fósseis datam de até

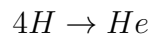
3 bilhões de anos atrás, podemos supor que a contração gravitacional não é a fonte relevante de energia do Sol - que, na realidade, é a fusão termonuclear.

Nas condições de pressão e temperatura do núcleo solar ocorrem as reações responsáveis pela manutenção do brilho e pela síntese de elementos mais pesados a partir dos núcleos de hidrogênio existentes. O processo pelo qual quatro núcleos de hidrogênio são transformados em um núcleo de hélio via interação nuclear fraca¹ será brevemente descrito a seguir.

Fusão termonuclear como fonte de energia definitiva

O processo de síntese de elementos mais pesados a partir de elementos mais leves é chamado de fusão nuclear. Graças a esse processo o brilho de estrelas como o Sol é mantido ao longo de bilhões de anos. Para ilustrarmos como esse efeito é relevante, podemos discutir o caso particular da síntese de um núcleo de hélio a partir de quatro núcleos de hidrogênio que ocorre nas regiões centrais do sol.

De maneira simplificada a reação pode ser descrita como:



Observe que do lado esquerdo da equação temos quatro prótons e do lado direito dois prótons e dois nêutrons de forma que existe uma diferença de massa equivalente a $0,03m_p$. Essa diferença entre as massas de cada lado da equação é convertida em energia segundo a equação:

$$E = mc^2$$

Podemos fazer uma estimativa do tempo de existência do Sol com base no exposto acima. Para isso consideraremos a composição de massa do Sol como sendo formada de aproximadamente 70% de hidrogênio. Porém, apenas 13% pode ser consumido antes que as características físicas do Sol mudem drasticamente. Com isso, para a equação do suprimento disponível, temos:

¹A interação nuclear fraca, com alcance da ordem de $10^{-17}m$, é importante na síntese de elementos pesados no interior de estrelas.

$$S = \frac{N_p E_p}{4}$$

Na equação acima, N_p representa o número de núcleos de hidrogênio disponíveis para serem usados como combustível e cuja expressão é dada por:

$$N_p = \frac{0,091M_{\odot}}{m_p}$$

Lembrando que o fator numérico desta equação refere-se ao valor da massa solar disponível às reações de fusão nuclear.

O termo E_p é a energia relacionada à diferença de massa entre os núcleos de hidrogênio e o núcleo de hélio e o fator quatro na equação está relacionado com a proporção hidrogênio-hélio. O suprimento de energia disponível é:

$$S = 6,825 \times 10^{-4} M_{\odot} c^2$$

O tempo de vida do Sol é obtido dividindo-se o suprimento de energia disponível pela taxa de consumo da mesma. O resultado, em anos, é dado por:

$$t = \frac{S}{3,156 \times 10^7 L_{\odot}}$$

Efetuando os cálculos encontramos, aproximadamente, $t = 10 \times 10^9$ anos, bem próximo dos $9,5 \times 10^9$ anos que cálculos mais precisos fornecem.

Cálculo aproximado da pressão e temperatura central do Sol

Para determinarmos o valor aproximado da pressão central P_c do Sol iremos considerar uma coluna de altura R_{\odot} sob ação de uma gravidade média $g \approx GM_{\odot}/R_{\odot}^2$. Veja o esquema na figura abaixo.

A equação da pressão central é dada por:

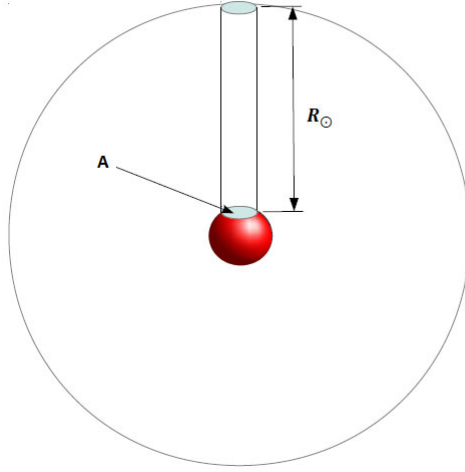


Figura 4.2: A coluna de matéria de área da base A exerce pressão sobre o núcleo.

$$P_c = \mu g \quad (4.3)$$

onde μ é aproximadamente a massa da coluna de material por unidade de área e cuja expressão é dada a seguir.

$$\mu \approx \frac{(M_\odot/R_\odot^3)AR_\odot}{A} = \frac{M_\odot}{R_\odot^2} \quad (4.4)$$

com G sendo a constante de gravitação universal.

Por fim, fazendo as substituições apropriadas na equação 4.3 obtemos:

$$P_c = \frac{GM_\odot^2}{R_\odot^4} \quad (4.5)$$

Para determinar a temperatura central T_c usaremos a *lei dos gases perfeitos*.

$$P_V = N_V kT \quad (4.6)$$

com P_V representando a pressão por unidade de volume do gás de íons, N_V sendo o número de íons por unidade de volume e k sendo a constante de Boltzmann ($k = 1,38 \times 10^{-23} J/K$).

A expressão para N_V é obtida dividindo-se a densidade central ρ_c pela massa média das partículas que constituem o gás nessa região.

$$N_V = \frac{\rho_c}{m_{media}} \quad (4.7)$$

Nas condições extremas do núcleo solar o hidrogênio apresenta-se completamente ionizado. Em outras palavras, temos um gás formado por prótons destituídos de suas eletrosferas e elétrons livres. Como a massa do próton é cerca de 2000 vezes maior que a massa do elétron pode-se usar, com boa aproximação, a massa do próton como valor médio. Além disso, dadas as dimensões de um próton (com raio da ordem de $10^{-15} m$) e do elétron (considerado sem estrutura interna) temos a justificativa para o uso da lei dos gases perfeitos.

Substituindo a equação 4.7 na equação 4.6 e explicitando a temperatura central T_c chegamos a expressão desejada.

$$T_c = \frac{P_c m_{proton}}{k \rho_c} \quad (4.8)$$

O valor da pressão central pode ser estimado usando a equação 4.5 e usando $\rho_c \approx 10^2 g/cm^3$, como apresentado por V. R. Silva (2006), podemos determinar a ordem de grandeza da temperatura central.

O resultado encontrado é da ordem de $10^6 K$ enquanto que cálculos mais exatos, e complicados, resultam em um valor da ordem de $10^7 K$. Dado o benefício da simplicidade dos cálculos efetuados, a diferença entre os resultados pode ser negligenciada em favor do entendimento qualitativo dos mecanismos envolvidos na determinação do valor da temperatura central do Sol.

Natureza do gás constituinte do interior solar

O interior solar é constituído de um gás quase que inteiramente com-

posto de elétrons livres e núcleos de hidrogênio chamado plasma. Assim, para determinarmos a natureza desse plasma em termos da teoria da termodinâmica devemos considerando que os núcleos de hidrogênio possuem raios da ordem de $10^{-15} m$ e os elétrons são, até onde se sabe, partículas pontuais. Mesmo nas altas temperaturas e pressões do núcleo solar essas partículas não apresentam interações mútuas e possuem volumes próprios desprezíveis em comparação com o volume ocupado pelos mesmos. Dessa forma, o plasma solar pode ser considerado um gás ideal.

4.1.2 Região radiativa

Se calculássemos o pico do comprimento de onda da radiação associada às temperaturas centrais do Sol, pela *lei de deslocamento de Wien*, obteríamos valores relacionados ao comprimento de raios-X. Esse tipo de radiação, se diretamente liberada, teria efeitos catastróficos para a vida na Terra devido aos altos valores de energia associados ao seu comprimento de onda. Graças a "degradação" sofrida pela radiação ao longo de seu tortuoso caminho até a superfície do Sol, a mesma, ao ser liberada de nossa estrela, possui seu pico em torno de $5 \cdot 10^{-7} m$, dentro do espectro visível. Esse aumento no comprimento de onda característica da radiação é decorrência da sua interação com a matéria ao longo do caminho do núcleo à superfície. Assim, a medida que a radiação se propaga, ela é espalhada, absorvida e reemitida isotropicamente sucessivas vezes permitindo que boa parte da energia produzida permaneça encerrada no Sol e que a radiação liberada sofra a referida "degradação" de raios-X para comprimentos dentro do espectro visível.

A equação abaixo representa a lei de deslocamento de Wien.

$$\lambda_{max}T = \frac{hc}{4,9651k}$$

Onde h é a constante de Planck, c é a velocidade da luz no vácuo e k é a constante de Boltzmann.

Na seção 3.6 foi discutida, como exemplo, a relação aproximada entre a temperatura interior T_I e efetiva T_e do Sol. Podemos agora explicar, com base na ideia das sucessivas interações da radiação com o meio intraestelar, a equação 3.25. Para isso, iniciaremos com o diagrama abaixo que explicita os N deslocamentos de comprimento² L ocorridos até a radiação ser emitida para o espaço.

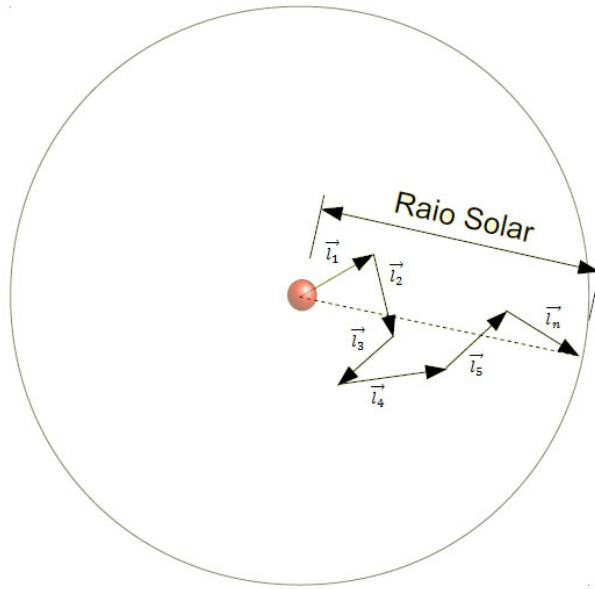


Figura 4.3: O *random walk* da radiação até a encontrar a superfície do Sol.

Considerando um caminho aleatório tomado pela radiação, podemos dizer que o vetor deslocamento \vec{D} da mesma é dada por:

$$\vec{D} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \dots + \vec{L}_{N-1} + \vec{L}_N \quad (4.9)$$

O quadrado da distância percorrida pela radiação vale:

$$D^2 = L_1^2 + L_2^2 + \dots + L_N^2 + 2(\vec{L}_1 \cdot \vec{L}_2 + \vec{L}_1 \cdot \vec{L}_3 + \dots) \quad (4.10)$$

Como a direção da radiação emitida é aleatória, os termos envolvendo produto escalar se cancelam. Além disso, Conforme o diagrama da figura

²Relacionado ao livre caminho médio da radiação no interior do Sol.

4.3, a distância percorrida D é aproximadamente igual ao raio R_{\odot} do Sol. Daí, podemos escrever:

$$R_{\odot}^2 = NL^2 \quad (4.11)$$

para N deslocamentos de comprimentos L iguais.

O tempo necessário para a radiação deixar o Sol é dado por $t = NL/c$ que, substituindo N pela equação 4.11, nos fornece a expressão desejada.

$$t_{RW} = 3 \frac{R_{\odot}^2}{cL} \quad (4.12)$$

Na equação 4.12 o fator 3 foi incluído para levar em conta as três dimensões em que a radiação pode se propagar.

Equação de transporte radiativo

Nesta seção será obtida a equação de transporte radiativo que possibilitará estabelecer uma conexão entre os processos termonucleares no interior da estrela e as perdas radiativas em sua superfície. Para isso, será considerado um cilindro de área da base dA , comprimento dl e vetor normal \hat{n} cuja direção é coincidente com a direção de propagação da radiação e faz um ângulo θ com a direção do raio vetor. Assim, seja a *intensidade de radiação* representada por $I(\theta, r)$ e definida como a energia por unidade de tempo por unidade de ângulo sólido e por unidade de área. Com isso, conforme indicado na figura abaixo, temos:

$$I(r, \theta) dA d\omega \quad (4.13)$$

$$-I(r + dr, \theta + d\theta) dA d\omega \quad (4.14)$$

As equações 4.13 e 4.14 correspondem à energia por unidade de tempo entrando e saindo de dA , respectivamente.

Além disso, parte da radiação é absorvida ao longo do comprimento dl devido a opacidade dos gases. A opacidade será representada pelo termo:

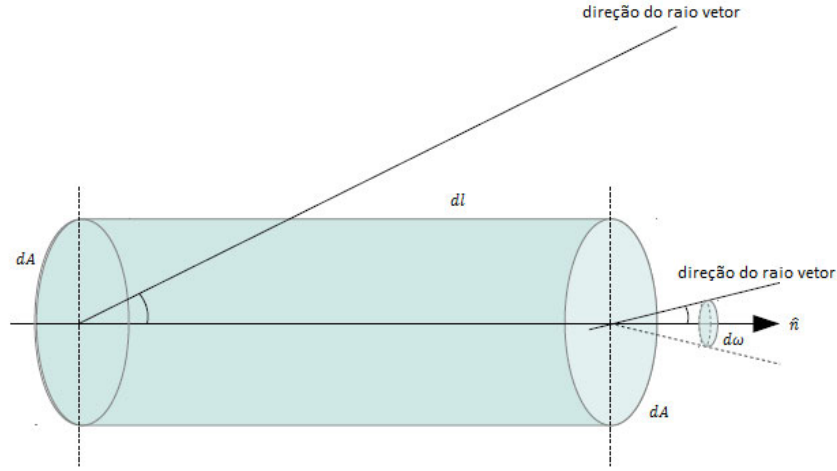


Figura 4.4: A intensidade I atravessando o ângulo sólido $d\omega$.

$$-IdAd\omega\kappa\rho dl \Rightarrow -\rho\kappa Id\omega dl dA \quad (4.15)$$

Na expressão acima, o termo $\kappa\rho dl$ representa a fração da energia absorvida por unidade de tempo ao longo de dl para a densidade ρ da estrela. Ainda, ao analisarmos esse termo, podemos verificar que o mesmo não possui dimensão e que, no sistema internacional, as unidades de κ são m^2kg^{-1} .

Finalmente, a emissão de radiação pelos gases no cilindro $dAdl$ deve ser levada em consideração. Assim, seja j a energia emitida isotropicamente em todas as direções por unidade de tempo por unidade de massa. A parcela da energia emitida no interior do cilindro é dada por:

$$j\rho dAdl \frac{d\omega}{4\pi} \quad (4.16)$$

sendo $\frac{d\omega}{4\pi}$ a fração do ângulo sólido compreendido pelo cilindro considerado.

Somando as equações de 4.13 até 4.16 e supondo que os ganhos e perdas de energia no cilindro sejam iguais, temos:

$$I(r, \theta)dAd\omega - I(r + dr, \theta + d\theta)dAd\omega - \rho\kappa Id\omega dl dA + j\rho dAdl \frac{d\omega}{4\pi} = 0 \quad (4.17)$$

Dividindo a equação 4.17 por $dAd\omega$, temos:

$$-[I(r + dr, \theta + d\theta) - I(r, \theta)] - \rho\kappa I dl + \frac{j\rho}{4\pi} dl = 0 \quad (4.18)$$

Sendo:

$$dI = I(r + dr, \theta + d\theta) - I(r, \theta) = \frac{\partial I}{\partial r} dr + \frac{\partial I}{\partial \theta} d\theta \quad (4.19)$$

Combinando as equações 4.18 e 4.19 e dividindo a expressão resultante por dl , temos:

$$-\left[\frac{\partial I}{\partial r} \frac{dr}{dl} + \frac{\partial I}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dl} \right] - \rho\kappa I + \frac{j\rho}{4\pi} = 0 \quad (4.20)$$

Finalmente, com base no gráfico abaixo Fig. ??, temos:

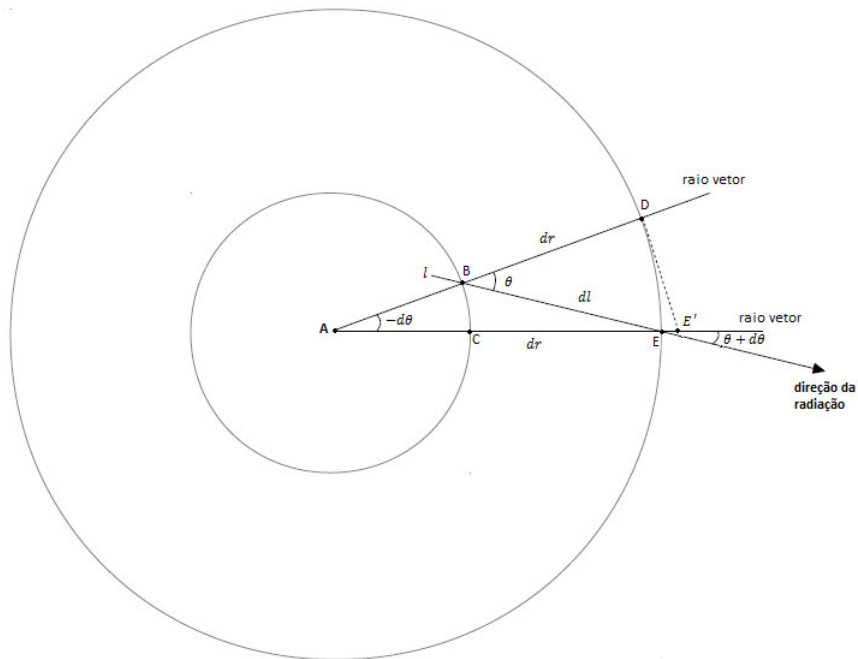


Figura 4.5: Simetria esférica usada para a obtenção da equação de transporte radiativo: a linha tracejada é tangente à circunferência em D.

$$\cos\theta = \frac{dr}{dl} \quad (4.21)$$

e

$$\frac{-\operatorname{sen}\theta}{r} = \frac{d\theta}{dl} \quad (4.22)$$

Substituindo as equações 4.21 e 4.22 na equação 4.20, chegamos a:

$$-\frac{\partial I}{\partial r}\cos\theta + \frac{\partial I}{\partial\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} - \rho\kappa I + \frac{j\rho}{4\pi} = 0 \quad (4.23)$$

que representa a equação de transporte radiativo.

4.1.3 Região convectiva

Acima da região radiativa, compreendendo cerca de 30% do raio solar, encontramos a região convectiva. Nessa região, com temperaturas da ordem de $10^4 K$ e densidade média 100 vezes menor que a do núcleo, "pacotes" com temperaturas maiores e densidades menores que os de suas vizinhanças flutuam em direção as regiões mais externas do sol. Estes, ao encontrarem regiões mais frias e menos densas, expandem-se rapidamente (adiabaticamente) até que sua pressão interna se iguale ao da região ao seu redor, com isso o pacote resfria-se e torna-se mais denso que a região onde se encontra, afundando para as regiões mais quentes novamente onde o processo se repete. No item seguinte será discutida brevemente a condição para que esse processo se inicie em uma estrela.

Condição crítica para convecção

Para determinarmos a condição crítica para a convecção consideraremos um pacote de gás ideal³ em uma posição r do centro do Sol no qual a temperatura, a pressão e a densidade são, respectivamente, T , P e ρ . O material no pacote de gás, representado na figura abaixo em r , possui os mesmos valores de temperatura, pressão e densidade que suas vizinhanças. Porém, o mesmo

³Veja o quadro sobre natureza do gás constituinte do interior solar nas páginas 36 e 37.

pacote, ao se deslocado para uma posição $r + dr$ não possuirá, no geral, os mesmos valores para as variáveis mencionadas.

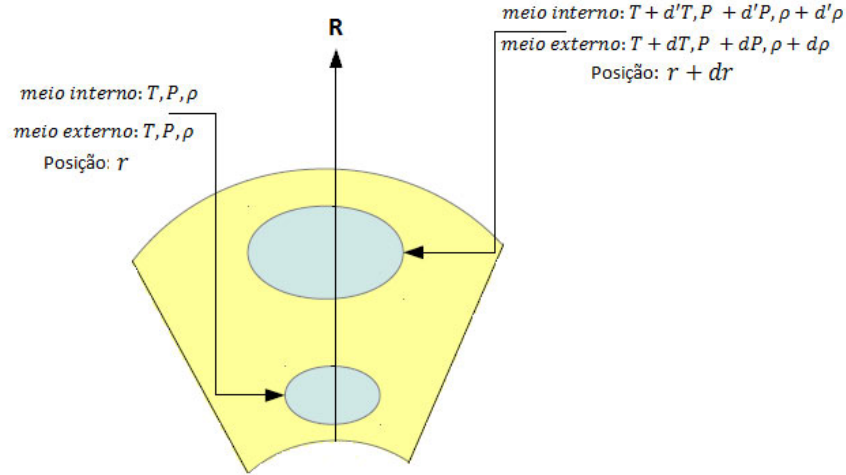


Figura 4.6: Representação do processo de convecção: os índices marcados com " ' " referem-se às condições do gás no interior do pacote.

Tomando a lei dos gases ideais⁴, segue:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{P} - \frac{dT}{T} \quad (4.24)$$

Com o deslocamento do pacote de gás de r para $r + dr$, o mesmo encontra regiões de menores pressões expandindo-se adiabaticamente de acordo com a equação 4.25 até que $d'P = dP$, onde os termos marcados com " ' " são relativos às variações ocorridas no pacote.

$$\frac{d'\rho}{\rho} = \frac{1}{\gamma} \frac{d'P}{P} \quad (4.25)$$

Ainda, para que haja flutuação do pacote de gás, devemos ter uma variação infinitesimal de densidade do meio maior que uma variação correspondente da densidade no pacote, ou seja:

⁴Veja apêndice C para detalhes sobre os cálculos.

$$\frac{d'\rho}{\rho} < \frac{d\rho}{\rho} \quad (4.26)$$

Combinando as equações 4.24 e 4.25 e impondo a condição para flutuação temos:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d'P}{P} < \frac{dP}{P} - \frac{dT}{T} \quad (4.27)$$

Substituindo $d'P$ por dP e rearranjando a equação, encontra-se:

$$\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} dP > dT \quad (4.28)$$

Ao se tomar o gradiente da pressão e da temperatura, obtem-se a condição de convecção dada abaixo.

$$\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} > \frac{dT}{dr} \quad (4.29)$$

O valor de γ em 4.29 depende do número de graus de liberdade das partículas constituintes do gás considerado que, para o gás ideal, corresponde a $\gamma = 5/3$.

O termo $\frac{dP}{dr}$ é dado pelo equilíbrio hidrostático para uma gravidade g pela expressão:

$$\frac{dP}{dr} = -g\rho(r) \quad (4.30)$$

Por fim, ao analisar-se a equação 4.29, verifica-se que a temperatura do gás deve diminuir, em função de r , mais rapidamente que a sua pressão, sendo esta a condição para convecção que desejava-se encontrar.

4.2 Atmosfera solar

Na seção 4.1 deste capítulo foi definido o critério que separa a atmosfera do Sol de sua superfície. Adicionalmente, podemos observar o quanto o gás desta região torna-se rarefeito⁵ e usar esta diferença para evidenciar o

⁵Cerca de 12 ordens de grandeza menor que a densidade média do interior solar.

início da atmosfera, permitindo criar um parâmetro simples para estudantes que estão iniciando seus estudos em física. Ainda, é importante notar que a atmosfera solar é subdividida em três partes com suas características distintas conforme será visto muito brevemente a seguir.

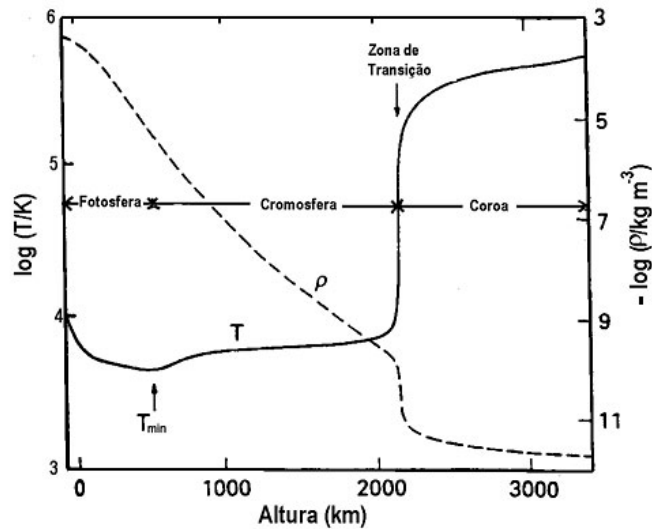


Figura 4.7: Comportamento da temperatura e densidade em função da altura da atmosfera solar. Fonte da imagem: [HTTP://astro.if.ufrgs.br/esol/esol.htm](http://astro.if.ufrgs.br/esol/esol.htm). Acesso em 05 de abril de 2012.

4.2.1 Fotosfera, cromosfera e coroa

A região mais interna da atmosfera solar é a fotosfera. Com uma espessura de cerca de 300km (que é levada em conta no diâmetro solar), a sua temperatura varia de 5780K em sua parte mais interna até 4200K . Ainda, a quase totalidade da radiação visível que chega à Terra é oriunda dessa região de forma que o espectro obtido com a atividade da seção 3.5.1, bem como as linhas de absorção, referem-se a mesma. A seguir, uma foto do satélite SOHO⁶ da NASA.

⁶The Solar and Heliospheric Observatory.

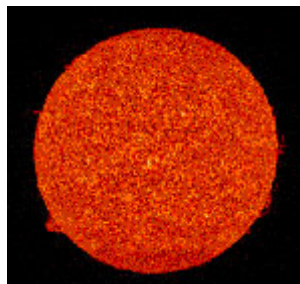


Figura 4.8: Fotosfera: os pequenos grânulos na foto são o topo dos pacotes de gás formados na região convectiva imediatamente abaixo da fotosfera. Fonte da imagem: [HTTP://astro.if.ufrgs.br/esol/esol.htm](http://astro.if.ufrgs.br/esol/esol.htm). Acesso em 05 de abril de 2012.

Acima da fotosfera, com cerca de 2000km de espessura, encontra-se a cromosfera que apresenta temperaturas da ordem de 10^4K . A faixa de radiação mais brilhante emitida pela cromosfera possui comprimento de onda característico da transição do Hidrogênio atômico do terceiro nível para o segundo nível excitado (H_α) correspondente à cor vermelha do espectro visível (a cromosfera é responsável por quase toda emissão de radiação neste comprimento de onda).

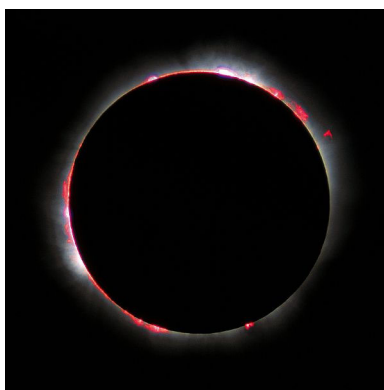


Figura 4.9: Cromosfera: foto do eclipse total do Sol em 11 de agosto de 1999 na França. Fonte da imagem: [HTTP://en.wikipedia.org/wiki/File:Solar-eclips-1999-5.jpg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Solar-eclips-1999-5.jpg). Acesso em 05 de abril de 2012.

Finalmente, a camada mais externa da atmosfera solar é chamada coroa (mostrada na *figura 21* em um eclipse total do Sol) que apresenta temperaturas da ordem de $10^6 K$ até $10^7 K$. Essa região da atmosfera solar possui faixas de emissão de raios X e se estende por todo o meio interplanetário formando o vento solar.



Figura 4.10: Coroa fotografada durante o eclipse de 1994, em Santa Catarina. Fonte da imagem: [HTTP://astro.if.ufrgs.br/esol/esol.htm](http://astro.if.ufrgs.br/esol/esol.htm). Acesso em 05 de abril de 2012.

Ao longo desta seção podem-se notar as temperaturas crescentes da atmosfera solar (da fotosfera para coroa). Embora esse comportamento, que aparentemente viola os princípios da termodinâmica, ainda constitua um problema em aberto para física, existem alguns modelos que o explicam como o resultado de efeitos conjuntos de mecanismos tais como ondas de choque provocadas pelos movimentos de convecção imediatamente abaixo da fotosfera e ondas magnéticas. No entanto, tais tópicos serão deixados para serem abordados em trabalhos futuros, pois fogem do intuito do presente.

Capítulo 5

Estrelas compactas

5.1 Introdução

Nesta seção trataremos da questão da estabilidade de estrelas que não possuem reações nucleares para contrabalancear a força da gravidade. Inicialmente, descreveremos a equação de estrutura para o equilíbrio hidrostático dessa classe de estrelas e, em seguida, aplicaremos o modelo obtido para dois casos: anãs brancas e estrelas de nêutrons. Ao longo deste capítulo serão obtidas equações que, integradas computacionalmente, fornecerão valores para a massa e para o raio em função de valores de pressões centrais estipuladas inicialmente, possibilitando a comparação com valores observados no artigo de Silbar e Reddy (2004), principal referência para este capítulo.

5.2 Breve comentário sobre evolução estelar

De maneira simplificada, podemos definir o destino de uma estrela com base em sua massa inicial. Dessa forma, quando todo seu combustível nuclear se esgota a estrela pode encerrar sua existência como uma anã branca (massa inicial de até $10M_{\odot}$), uma estrela de nêutrons (massa inicial no intervalo $10M_{\odot} < M < 25M_{\odot}$) ou um buraco negro (massa inicial tal que $M > 25M_{\odot}$). A figura 22 apresenta de forma sintetizada as etapas da evolução estelar.

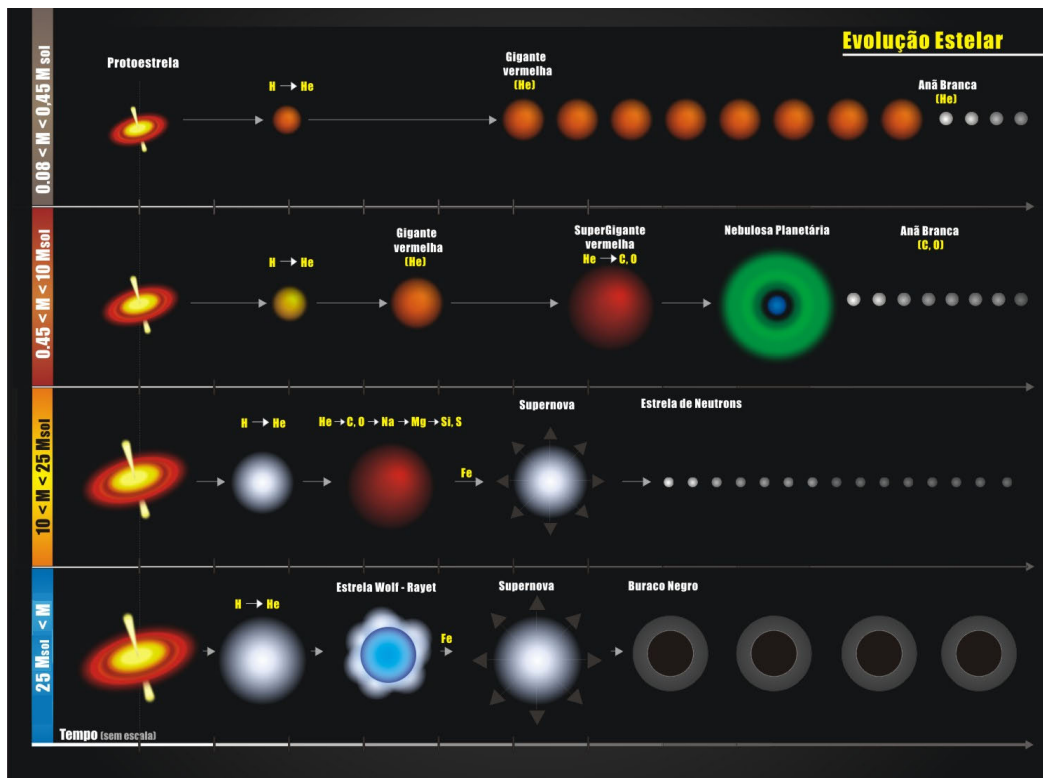


Figura 5.1: Representação do destino final de uma estrela em função de sua massa inicial. Adaptado de: <http://www.if.ufrgs.br/fis02001/aulas/aulaevolest.htm>. Acessado em 3 de ago. de 2012.

5.3 Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkov

Neste capítulo trataremos da equação de estrutura de estrelas compactas (anãs brancas e estrelas de nêutrons). Para isso iremos considerar as estrelas estudadas como simetricamente esféricas, eletricamente neutras e não girantes. Ainda, para que a condição de equilíbrio dentro das condições já citadas seja satisfeita, devemos ter as forças volumétricas (forças de longo alcance) e as forças superficiais (forças entre camadas adjacentes da estrela) cancelando-se mutuamente.

Sejam as força volumétrica devido a atração gravitacional e as forças superficiais dadas pelas equações 5.1 e 5.2, respectivamente.

$$f dr dS \quad (5.1)$$

$$[-P(r + dr)dS + P(r)dS] \quad (5.2)$$

Nestas equações, f é a densidade de força, $dr dS$ é o volume infinitesimal considerado com dS sendo a área da superfície infinitesimal.

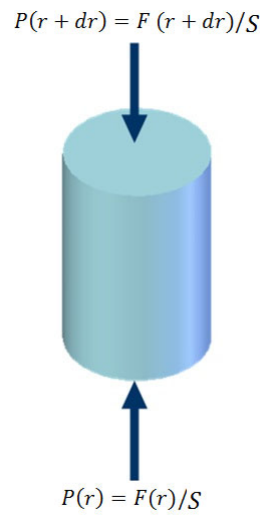


Figura 5.2: Equilíbrio hidrostático de um elemento de volume entre r e $r + dr$.

Então, somando as equações 5.1 e 5.2, tem-se:

$$f dr dS + [-P(r + dr) + P(r)]dS = 0 \Rightarrow f dr + [-P(r + dr) + P(r)] = 0 \quad (5.3)$$

Ainda,

$$dP = P(r + dr) - P(r) = \frac{\partial P}{\partial r} dr \quad (5.4)$$

Substituindo a equação 5.4 na equação 5.3, segue que:

$$f dr - \frac{\partial P}{\partial r} dr = 0 \Rightarrow f = \frac{\partial P}{\partial r} \quad (5.5)$$

A equação 5.5 representa o gradiente de pressão.

Ao considerar uma estrela eletricamente neutra e não girante temos, como única força volumétrica, a atração gravitacional da esfera de massa $M(r)$, onde r é o raio da esfera, exercendo atração sobre o elemento de massa Δm . Ou seja:

$$\vec{F} = -\frac{GM(r)}{r^2} \Delta m \hat{r} \quad (5.6)$$

Dividindo a equação 5.6 por ΔV , tem-se:

$$\frac{\vec{F}}{\Delta V} = -\frac{GM(r)}{r^2} \frac{\Delta m}{\Delta V} \hat{r} \quad (5.7)$$

Ainda, tomando $\vec{f} = \frac{\vec{F}}{\Delta V}$ como a densidade de força e substituindo esta na equação 5.7, conforme a equação 5.5, tem-se:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{GM(r)}{r^2} \frac{\Delta m}{\Delta V} \hat{r} \quad (5.8)$$

No limite em que $\Delta V \rightarrow 0$ temos $\frac{\Delta m}{\Delta V} \rightarrow \rho(r)$ com ρ sendo a densidade da estrela a uma distância r de seu centro. Dessa forma, podemos escrever a equação 5.8 como:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho(r) \quad (5.9)$$

A relação 5.9 encontrada representa a primeira de três equações diferenciais acopladas que constituirá o nosso modelo para o interior estelar.

A partir deste ponto iremos determinar a relação entre a massa M da estrela e a distância r medida a partir de seu centro. Para isso, iremos resolver a integral tripla em coordenadas esféricas sobre a função densidade $\rho(r')$ ¹.

Conforme indica a figura, temos:

¹ r' é a variável enquanto que r é o limite superior de integração.

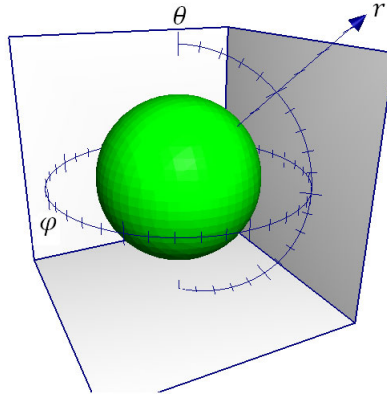


Figura 5.3: Coordenadas esféricas.

$$\begin{aligned}
 M(r) &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho(r') r'^2 \sin(\varphi) dr' d\varphi d\theta \\
 &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \sin(\varphi) d\varphi \int_0^r r'^2 \rho(r') dr' \\
 &= 4\pi \int_0^r r'^2 \rho(r') dr' \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$M(r) = 4\pi \int_0^r r'^2 \rho(r') dr \quad (5.10)$$

Derivando a equação 5.10 em função de r segundo a expressão $\frac{dM}{dr'}|_{r'=r}$, obtemos:

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (5.11)$$

A equação 5.11 representa a segunda das equações diferenciais acopladas necessárias para resolver o problema da estrutura interna de uma estrela que não apresenta reações de fusão nuclear. Ao se observar as equações 5.9 e

5.11 nota-se que estas não são suficientes para resolver o problema sendo necessário determinar uma terceira equação. Antes, sairemos do tratamento estritamente newtoniano introduzindo um resultado da relatividade restrita por meio da relação:

$$\varepsilon(\vec{r}) = \rho(\vec{r})c^2 \Rightarrow \rho(\vec{r}) = \frac{\varepsilon(\vec{r})}{c^2} \quad (5.12)$$

onde ε representa a densidade de energia e c a velocidade da luz no vácuo. Fazendo a substituição da equação 5.12 nas equações 5.9 e 5.11, temos:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)}{c^2 r^2} \varepsilon(r) \quad (5.13)$$

$$\frac{dM(r)}{dr} = \frac{4\pi r^2}{c^2} \varepsilon(r) \quad (5.14)$$

A justificativa para o uso da equação 5.12 está em permitir levar em consideração as contribuições da energia de interação das partículas que constituem a estrela.

5.3.1 Correção da relatividade geral

Em nosso tratamento para estrelas compactas suporemos sempre simetria esférica, neutralidade elétrica e que as mesmas são não girantes. Isso simplificará o tratamento da equação de estrutura caso seja necessário aplicar as correções da relatividade geral. O critério usado para essa decisão dependerá da razão entre a energia relacionada à gravidade da estrela e a sua energia total, dada por:

$$\frac{GM}{Rc^2} \quad (5.15)$$

Onde G é a constante de gravitação universal, M é a massa da estrela, R seu raio e c a velocidade da luz no vácuo.

Se $\frac{GM}{Rc^2} \ll 1$ podemos desprezar a correção que deve ser feita na equação 5.13 pela teoria da relatividade geral. Caso contrário a equação 5.13 toma a forma:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\varepsilon(r)}{c^2 r^2} \left[1 + \frac{P(r)}{\varepsilon(r)} \right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{M(r)c^2} \right] \left[1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} \right]^{-1} \quad (5.16)$$

Para os casos tratados neste trabalho temos:

Anã branca: $\frac{GM}{Rc^2} \approx 10^{-4}$; estrela de nêutrons: $\frac{GM}{Rc^2} \approx 1$

Por tanto, podemos desprezar as correções da relatividade geral para o caso da estrela anã branca enquanto que para a estrela de nêutrons as mesmas devem ser aplicadas.

5.4 Anã branca

Em 1844 Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) estimou que a estrela Sírius deveria constituir um sistema binário (Sírius A e Sírius B) devido às perturbações no movimento próprio² dessa estrela. Essa hipótese foi confirmada apenas em 1862 quando Sírius B foi avistado pela primeira vez através de um telescópio refrator. Estimativas feitas anos mais tarde indicaram que esse objeto astronômico teria um raio de cerca de 12.000 *km* e uma massa aproximadamente igual à massa solar. Esses valores nos permitem estimar a sua densidade média segundo a equação:

$$d = \frac{3M}{4\pi R^3} \quad (5.17)$$

Efetuando-se os cálculos da equação acima para os valores estimados encontra-se uma densidade da ordem de 10^9 kg/m^3 para este objeto, que passou a caracterizar uma nova classe de estrela chamada anã branca. Comparando-se o valor obtido com a densidade média do Sol (10^3 kg/m^3) nota-se que uma anã branca é cerca de 1.000.000 vezes mais densa. Nessas condições, os elétrons, provenientes dos átomos completamente ionizados, são forçados a manter distâncias entre si que, pelo princípio da incerteza de Heisenberg,

²Movimento próprio é o movimento aparente das estrelas no céu, perpendicular à linha de visada, usualmente medido em segundos de arco por ano.

apresentam estados de enorme velocidade - sendo em determinados casos necessário levar em conta efeitos da relatividade restrita - e, com isso, a estados de maior energia. Esse fato, associado ao princípio de exclusão de Pauli, gera o efeito, chamado pressão de degenerescência, que é responsável por garantir a estabilidade hidrostática da estrela. A pressão térmica dos elétrons (e dos íons) pode ser negligenciada, pois é desprezível em comparação à pressão de degenerescência gerada pelas condições do interior desse tipo de estrela. Por isso, esta será a única contribuição considerada para contrabalancear a sua atração gravitacional.

Comparação entre a pressão de degenerescência e a pressão térmica dos elétrons.

Para termos uma ideia do valor de cada contribuição na composição da pressão da estrela usaremos a equação aproximada para a pressão de degenerescência dada por:

$$P_{ded} = 3\rho^{5/3} \Rightarrow P = 3.10^{21} N/m^2$$

enquanto que para pressão térmica dos elétrons a equação é dada por:

$$P_{term} = \frac{Z\rho}{Am_p} kT \Rightarrow 4.10^{19} N/m^2$$

Usando $\rho = 10^9 \text{ kg/m}^3$, $Z/A = 2$ e $T = 10^7 \text{ K}$ para a temperatura interna média conforme Shu (1982), encontramos $P_d = 3 \times 10^{21} \text{ N/m}^2$ e $P_T = 4 \times 10^{19} \text{ N/m}^2$. Ao compararmos os resultados, percebemos claramente que a pressão de degenerescência de elétrons é cerca de 100 vezes maior que sua pressão térmica, justificando as suposições adotadas. Ainda, um cálculo similar pode ser feito para a pressão de degenerescência e para a pressão térmica dos íons, levando a resultados igualmente desprezíveis em comparação à pressão de degenerescência de elétrons (isso ocorre porque sendo a massa dos íons cerca de 1000 vezes maior que a massa dos elétrons, a pressão gerada pelos primeiros será proporcionalmente menor). Por isso, em cálculos futuros, a única fonte de pressão

considerada será a pressão de degenerescência de elétrons.

Esse resultado será muito importante para as aproximações usadas na obtenção no polítropo da anã branca.

5.4.1 O polítropo para a anã branca

Conforme visto no início desta seção, o nosso modelo considera que o interior das estrelas do tipo anã branca são compostos de átomos ionizados e elétrons que estão separados por distâncias menores que o raio atômico gerando um efeito quântico chamado *pressão de degenerescência*. Para calcularmos essa pressão, que nos levará à equação de estado do gás de elétrons, devemos partir da distribuição de Fermi-Dirac tomando $T = 0$. Isso pode ser feito porque, como visto no quadro no início da seção 5.3, a pressão dessa classe de estrelas depende fracamente da sua temperatura absoluta.

A suposição $T = 0$ torna o cálculo da densidade do números de elétrons $n(p)$ em função de seu momento mais simples, pois implica na ocupação de todos os estados de energia entre 0 e ε_F (chamada energia de Fermi e representando o estado de máxima energia) e, conseqüentemente, resultando em um fator de ocupação para todos os estados neste intervalo igual a **um** (segundo a estatística de Fermi-Dirac), conforme será visto a seguir.

5.4.2 Momentum de Fermi

Neste ponto do trabalho usaremos a expressão para a densidade do número de elétrons para determinar o momentum de Fermi, necessário para obtenção do polítropo. Para isso, tomaremos a estatística de Fermi-Dirac para a densidade do número de elétrons com momentum entre p e $p + dp$ conforme exposto abaixo.

$$n(p)dp = \frac{1}{\exp((E - \varepsilon_F)/kT) + 1} g(p)dp \quad (5.18)$$

Na expressão acima, $g(p)$ é o número de estados possíveis no momento

considerado, E a energia da partícula e ε_F é a energia de Fermi. A solução para o caso $T = 0$ vale:

$$n(p)dp = g(p)dp \quad (5.19)$$

O termo do lado direito da equação 5.19 pode ser determinado a partir do princípio de incerteza de Heisenberg em termos de volume conforme apresentado abaixo.

$$4\pi p^2 dp 4\pi r^2 dr \geq (2\pi\hbar)^3 \quad (5.20)$$

O resultado obtido para a densidade de estados possíveis é dado por:

$$g(p)dp = 2 \frac{4\pi p^2}{(2\pi\hbar)^3} dp \quad (5.21)$$

O fator "2" no lado esquerdo da equação está associado aos dois estados de spin possíveis para o elétron.

Com os resultados obtidos até este ponto e a expressão para a densidade do número de elétrons n_e com momento variando de zero a infinito dada abaixo, podemos determinar o momentum de Fermi.

$$n_e = \int_0^\infty n(p)dp \quad (5.22)$$

Substituindo as equações 5.19 e 5.21 na equações 5.22, tem-se, para $T = 0$:

$$n_e = \int_0^{p_F} \frac{8\pi p^2}{(2\pi\hbar)^3} dp \quad (5.23)$$

se $E < \varepsilon_F$; e

$$n_e = 0 \quad (5.24)$$

se $E > \varepsilon_F$.

Onde ε_F é a energia de Fermi (máxima energia das partículas constituintes do gás) e p_F é o momentum associado à energia de Fermi ε_F . O gráfico a seguir evidencia que para valores de energia menores que a energia de Fermi

todos os estados estão ocupados. Isso simplifica em muito os cálculos tanto para o valor da energia de Fermi quanto para a pressão do gás e de sua densidade de energia.

A *figura 5.4* mostra a distribuição de Fermi-Dirac para alguns valores de temperatura absoluta T .

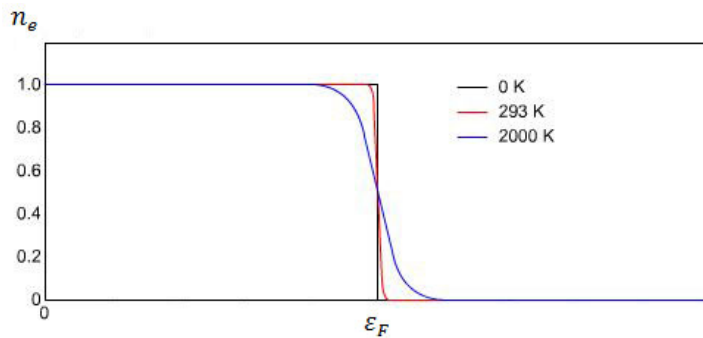


Figura 5.4: Probabilidade de ocupação em função da energia dos elétrons para algumas temperaturas absolutas. Fonte: <http://whitedwarf.org/index.html>. Acessado em 12 de julho de 2012.

Resolvendo a integral 5.23 tem-se:

$$n_e(p_F) = \frac{p_F^3}{3\pi^2\hbar^3} \quad (5.25)$$

Explicitando p_F temos $p_F = (3\pi^2\hbar^3 n_e)^{1/3}$.

5.4.3 Densidade da estrela em função da densidade do número de elétrons

Agora devemos determinar a densidade da estrela em função da densidade do número de elétrons n_e para, por fim, escrevermos a equação da pressão em função da densidade de energia.

Seja:

$$\rho = n_e m_e + A m_p n_+ \quad (5.26)$$

onde $A m_p$ a massa por íon e n_+ a densidade do número de íons.

Como $n_e m_e \ll A m_p n_+$ podemos aproximar a equação anterior como:

$$\rho \approx A m_p n_+ \quad (5.27)$$

Para que a condição de neutralidade da estrela anã branca seja respeitada é necessário que o número de elétrons seja igual ao número de íons, ou seja:

$$n_e = Z n_+ \Rightarrow n_+ = \frac{n_e}{Z} \quad (5.28)$$

Substituindo essa última equação em 5.26, segue:

$$\rho \approx \frac{A}{Z} m_p n_e \quad (5.29)$$

Fazendo, $\rho = \varepsilon/c^2$ e explicitando n_e obtemos:

$$n_e = \frac{Z}{A m_p c^2} \varepsilon \quad (5.30)$$

que representa a equação para a densidade de números de elétrons desejada.

5.4.4 Cálculo da pressão de elétrons degenerados de uma anã branca

Pode ser demonstrado, conforme apêndice D, que a pressão do gás de elétrons é dada pela expressão:

$$P = \frac{1}{3} \int_0^{p_F} p v n(p) dp \quad (5.31)$$

onde $n(p)dp$ depende da estatística de Fermi-Dirac (no qual adotamos, por simplicidade, o caso em que $T = 0$), v é a velocidade da partícula e p o seu momentum.

Gás de elétrons não-relativístico

Resolvendo a equação 5.31 para o caso em que a velocidade do elétron é dada por $v_e = p/m_e$, temos:

$$\begin{aligned}
 P(p_F) &= \frac{1}{3} \int_0^{p_F} p_e \frac{p_e}{m_e} \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} p_e^2 dp \\
 &= \frac{8\pi}{3(2\pi\hbar)^3 m_e} \int_0^{p_F} p^4 dp \Rightarrow \\
 P(p_F) &= \frac{p_F^5}{15\pi^2 \hbar^3 m_e} \tag{5.32}
 \end{aligned}$$

Substituindo o valor conhecido para o momentum de Fermi obtido a partir da equação 5.25 e o valor para a densidade do número de elétrons dada pela equação 5.30 na equação 5.32, temos o polítropo³ para o gás de elétrons não-relativístico.

$$P(\varepsilon) = \frac{3^{\frac{2}{3}} \hbar^2}{5\pi^2 m_e} \left(\frac{Z \pi^2}{A m_p c^2} \right)^{\frac{5}{3}} \varepsilon^{\frac{5}{3}} \tag{5.33}$$

Nesta equação o termo Z/A depende da composição química da estrela e, para este trabalho, será adotado o valor de 0,5.

Ainda, podemos escrever a equação 5.33 na forma $P(\varepsilon) = K_{NR} \varepsilon^\gamma$ (que representa a forma geral do polítropo), onde $K_{NR} = \frac{3^{\frac{2}{3}} \hbar^2}{5\pi^2 m_e} \left(\frac{Z \pi^2}{A m_p c^2} \right)^{\frac{5}{3}}$ e $\gamma = 5/3$. Com isso, temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{dP(\vec{r})}{dr} &= -\frac{GM(\vec{r})}{c^2 r^2} \varepsilon(\vec{r}) \\
 \frac{dM(\vec{r})}{dr} &= \frac{4\pi r^2}{c^2} \varepsilon(\vec{r})
 \end{aligned}$$

³Para mais detalhes sobre polítropos ver o apêndice F.

$$P(\varepsilon) = K_{NR}\varepsilon^{5/3} \quad (5.34)$$

O polítropo dado por 5.34 representa a terceira equação necessária para compor as equações de estrutura da anã branca.

Gás de elétrons relativístico

Se o regime em que os elétrons se encontram é tal que $pc \gg m_0c^2$ então a equação 5.34 já não representa corretamente o polítropo para anã branca e devemos retomar a equação 5.31 fazendo v dado por:

$$v = \frac{\partial E}{\partial p} \quad (5.35)$$

onde $E = (p^2c^2 + m^2c^4)^{1/2}$ é a energia do elétrons.

Resolvendo a equação e considerando a energia de repouso dos elétrons desprezível (segundo Gazzinelli (2005) o erro gerado por essa aproximação é inferior a 1% para partículas muito energéticas), segue:

$$P(p_F) = \frac{1}{3} \int_0^{p_F} pv \frac{8\pi p^2}{(2\pi\hbar)^3} dp$$

Então, para $v \approx c$, temos:

$$P(p_F) = \frac{2\pi c}{3(2\pi\hbar)^3} p_F^4 \quad (5.36)$$

Substituindo o resultado da equação 5.25 e a equação 5.30 na equação 5.36 resulta, após algumas manipulações algébricas, em:

$$P(p_F) = \frac{c\hbar}{12\pi^2} \left(\frac{3\pi^2 Z}{Am_p c^2} \right)^{4/3} \varepsilon^{4/3} \quad (5.37)$$

De forma alánoga ao realizado na seção anterior, escreveremos a equação 5.37 na forma $P(\varepsilon) = K_R\varepsilon^\gamma$, com $K_R = \frac{c\hbar}{12\pi^2} \left(\frac{3\pi^2 Z}{Am_p c^2} \right)^{4/3}$ e $\gamma = 4/3$. Logo:

$$\frac{dP(\vec{r})}{dr} = -\frac{GM(\vec{r})}{c^2 r^2} \varepsilon(\vec{r})$$

$$\frac{dM(\vec{r})}{dr} = \frac{4\pi r^2}{c^2} \varepsilon(\vec{r})$$

$$P(\varepsilon) = K_R \varepsilon^{4/3} \quad (5.38)$$

Nesse caso, o polítropo necessário para a resolução das equações de estrutura é dado por 5.38.

5.4.5 Atividade: determinação do raio e da massa de uma anã branca

O objetivo dessa atividade é simular, por meio da integração numérica da equação TOV⁴, valores de massa e raio para as anãs brancas dentro dos regimes relativísticos e não-relativísticos do modelo do gás de Fermi. A integração é feita por meio de programação em C usando-se o método de Runge-Kutta⁵. Para facilitar a manipulação das equações é aconselhável a introdução de um fator de escala ε_0 conforme posto por Silbar e Reddy (2004) atentando apenas para as unidades escolhidas no presente trabalho.

Fazendo:

$$P = \varepsilon_0 \bar{P} \quad (5.39)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \bar{\varepsilon} \quad (5.40)$$

Para a forma geral polítropo, temos:

$$\bar{P} = \bar{K} \bar{\varepsilon}^\gamma \quad (5.41)$$

Explicitando, $\bar{\varepsilon}$ na equação acima, obtemos:

$$\bar{\varepsilon} = \left(\frac{\bar{P}}{\bar{K}} \right)^{1/\gamma} \quad (5.42)$$

⁴Tolman-Oppenheimer-Volkov

⁵Press et al (1992).

onde $\bar{K} = K\varepsilon_0^{\gamma-1}$. O valor de γ depende do regime do gás de Fermi, $\gamma = 5/3$ para o regime não-relativístico ($p_F \ll m_e c$) e $\gamma = 4/3$ para o regime relativístico ($p_F \gg m_e c$).

Ainda segundo Silbar e Reddy (2004), tomando as equações 5.13 e 5.14 e fazendo $\bar{M} = M(r)/M_\odot$ e $R_0 = GM_\odot/c^2$, têm-se, respectivamente:

$$\frac{d\bar{P}}{dr} = -\frac{\alpha\bar{P}(r)^{1/\gamma}\bar{M}(r)}{r^2} \quad (5.43)$$

$$\frac{d\bar{M}(r)}{dr} = \beta r^2 \bar{P}(r)^{1/\gamma} \quad (5.44)$$

Onde $\alpha = R_0/(K\varepsilon_0^{\gamma-1})^{1/\gamma}$ e $\beta = 4\pi\varepsilon_0/M_\odot c^2 (K\varepsilon_0^{\gamma-1})^{1/\gamma}$. Escolhendo um valor para α temos definidos os valores para β e para o fator de escala ε_0 .

Os códigos em C usados nas simulações para estrela anã branca são apresentados no apêndice G, para alfa, em cada caso, foi usado o valor sugerido por Silbar e Reddy (2004), onde:

Caso 1: $\alpha = 0,05 km$, $\beta = 0,005924 km^{-3}$ e $\varepsilon_0 = 2,488 \times 10^{36} j/m^3$ para o regime não-relativístico do gás de fermi ($p_F \ll m_e c$).

Caso 2: $\alpha = 1,473 km$, $\beta = 52,46 km^{-3}$ e $\varepsilon_0 = 7,463 \times 10^{38} j/m^3$ para o regime não-relativístico do gás de fermi ($p_F \gg m_e c$).

Resultados da integração numérica para a equação de estrutura da anã branca ($p_F \ll m_e c$)

caso 1: $\bar{P}(0) = 10^{-14}$ - Resultando em $M = 0,78662M_\odot$ e $r = 8.340km$

caso 2: $\bar{P}(0) = 10^{-15}$ - Resultando em $M = 0,39425M_\odot$ e $r = 10.613km$

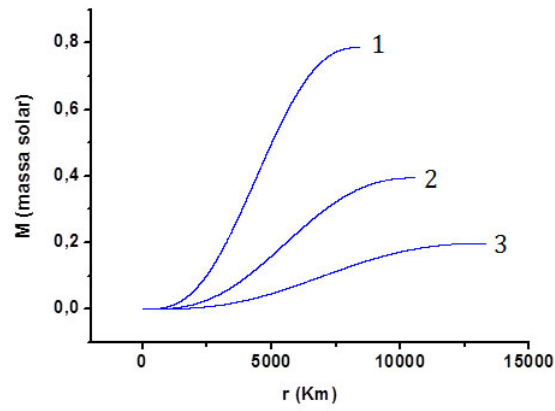


Figura 5.5: Massa em função do raio da anã branca em que $p_F \ll m_e c$.

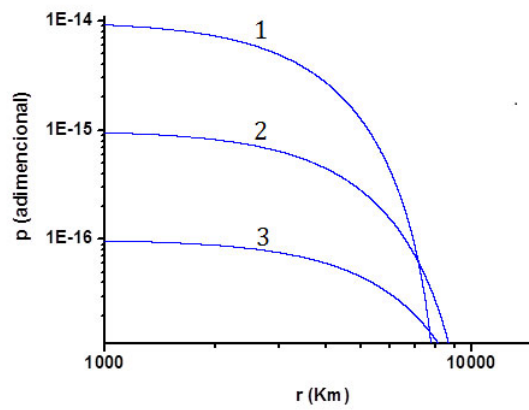


Figura 5.6: Raio em função da pressão central - note o uso da escala logarítmica.

caso 3: $\bar{P}(0) = 10^{-16}$ - Resultando em $M = 0,19759 M_{\odot}$ e $r = 13.362 km$

Resultados da integração numérica para a equação de estrutura da anã branca ($p_F \gg m_e c$)

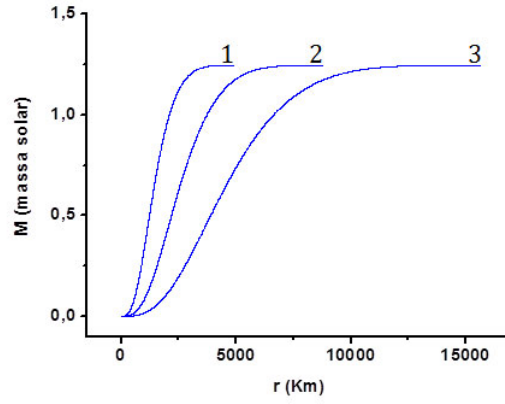


Figura 5.7: Massa em função do raio da anã branca em que $p_F \gg m_e c$.

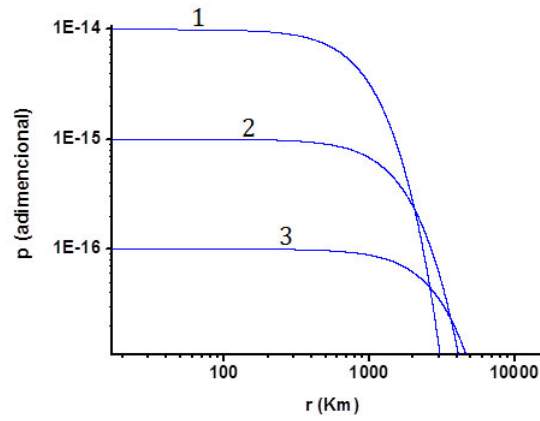


Figura 5.8: Raio em função da pressão central em escala logaritmica.

caso 1: $\bar{P}(0) = 10^{-14}$ - Resultando em $M = 1,24694M_{\odot}$ e $r = 4.959km$

caso 2: $\bar{P}(0) = 10^{-15}$ - Resultando em $M = 1,24694M_{\odot}$ e $r = 8.821km$

caso 3: $\bar{P}(0) = 10^{-16}$ - Resultando em $M = 1,24694M_{\odot}$ e $r = 15.689km$

Comentários sobre os resultados obtidos para a anã branca

Os resultados obtidos para o regime não-relativístico evidenciam um comportamento interessante para relação massa-raio: Quanto maior a massa menor o raio. Embora, à primeira vista, isso possa parecer estranho, devemos observar que existem forças de longo alcance (devido à atração gravitacional e que se propagam à velocidade da luz) e forças de curto alcance (devido ao contato entre as sucessivas camadas da estrela e que se propagam a velocidade do som) "lutando" no interior da estrela. Assim, como a primeira responde mais rapidamente ao acréscimo de massa que a segunda, a estrela tende a se contrair.

Outro ponto que vale ressaltar é a independência da massa em relação à pressão central para o regime $p_F \gg m_e c$ que pode ser entendido ao se observar o resultado analítico para a massa fornecida pela equação de estrutura⁶ (ver apêndice F para mais detalhes).

$$M = 4\pi\rho_c^{(3\gamma-4)/2} \left(\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)} \right)^{3/2} \xi_1^2 |(d\theta/d\xi)|_{\xi=\xi_1} \quad (5.45)$$

onde γ é o índice do polítropo e $K = K_R$. Fazendo $\gamma = 4/3$ o valor de M será constante.

Note que neste caso a alteração no raio é devido a variação na pressão central. Um raio menor significa uma pressão central maior, pois esta depende da densidade da estrela conforme indica as equação 5.38 (em conjunto com a equação 5.12).

5.4.6 Equação para um regime qualquer do gás de Fermi para anã branca

Um modelo mais realista para equação de estado pode ser obtido, conforme proposto por Silbar e Reddy (2004), combinando os polítropos usados anteriormente em uma única expressão do tipo:

⁶Chamada de equação de Lane-Emden.

$$\varepsilon(P) = A_1 P^{3/5} + A_2 P^{3/4} \quad (5.46)$$

onde as constantes A_1 e A_2 referem-se aos regimes não-relativístico e relativístico, respectivamente.

Com isso, espera-se que não seja mais necessário separar a resolução da equação de acordo com o regime do gás de Fermi, ou seja, dependendo da escolha da pressão central haverá um termo dominante na equação que fornecerá resultados dentro do esperado para a estrela considerada. Assim, na equação 5.46 quando $p_F \ll m_e c$ o primeiro termo do lado esquerdo possui maior influência sobre o resultado e quando $p_F \gg m_e c$ temos o segundo termo prevalecendo. A equação de estrutura neste caso toma a forma:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)}{c^2 r^2} (A_1 P^{3/5} + A_2 P^{3/4}) \quad (5.47)$$

$$\frac{dM(r)}{dr} = \frac{4\pi r^2}{c^2} (A_1 P^{3/5} + A_2 P^{3/4}) \quad (5.48)$$

Para resolver o conjunto de equações acima é necessário determinar os valores de A_1 e A_2 . Isso é feito construindo um gráfico da densidade de energia do gás de elétrons em função de sua pressão e ajustando-se à curva obtida a equação 5.44.

A construção da curva é feita obtendo vários valores de ε e de P em função do momentum de Fermi p_F . Tomando a densidade de energia da anã branca (levando em consideração a contribuição dos elétrons) dada pela equação:

$$\varepsilon(p_F) = \frac{A}{Z} x^3 \frac{m_n m_e^3 c^5}{3\pi^2 \hbar^3} + \frac{m^4 c^5}{8\pi^2 \hbar^3} [(2x^3 + x)(1 + x^2)^{1/2} - \operatorname{arcsenh}(x)] \quad (5.49)$$

onde $x = p_F/m_e c$, o momentum de Fermi varia no intervalo $0 \leq p_F \leq 2m_e c$. O segundo termo⁷ da soma está desenvolvido no apêndice E, enquanto que o primeiro termo é obtido a partir da equação 5.30.

Para a pressão de degenerescência de elétrons é usada a equação desen-

⁷É possível verificar que o primeiro termo possui peso muito maior que o segundo.

volvida no apêndice *D* dentro do mesmo intervalo.

$$P(p_F) = \frac{m_e^4 c^5}{24\pi^2 \hbar^3} [(2x^3 - 3x)(1 + x^2)^{1/2} + \operatorname{arcsenh}(x)] \quad (5.50)$$

onde $x = p_F/m_e c$.

O resultado pode ser visualizado através do gráfico abaixo.

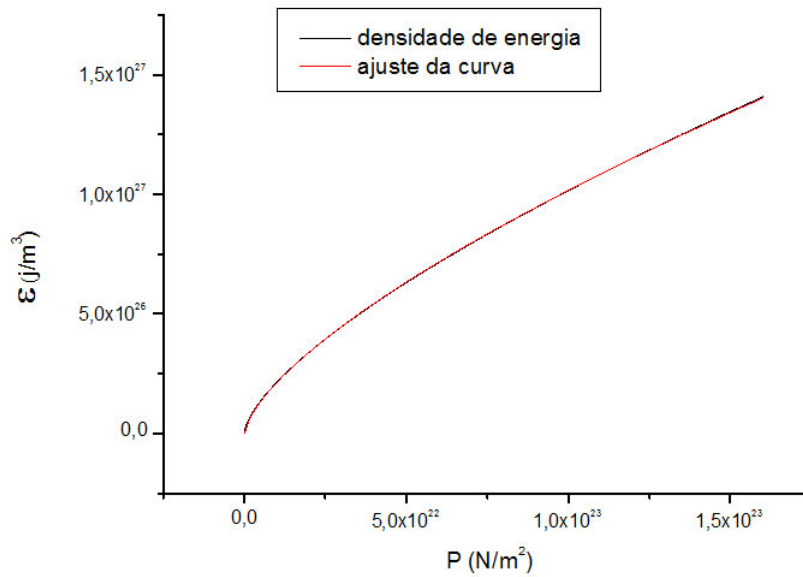


Figura 5.9: Ao ajustar a equação 5.46 encontramos os valores desejados para A_1 e A_2 .

A equação resultante para densidade de energia em função da pressão, após o ajuste, toma a forma:

$$\epsilon(P) = 7,02152 \times 10^{12} P^{3/5} + 3,22222 \times 10^9 P^{3/4} \quad (5.51)$$

Para a integração numérica em C, neste caso, não foi usado nenhum fator de escala, pois isso introduziria maior complexidade aos cálculos. Além disso, devemos lembrar que as unidades adotadas são do Sistema Internacional de Unidades.

5.4.7 Resultados para integração numérica no regime qualquer do gás de Fermi

Foram feitas simulações para o raio e a massa em função de várias pressões centrais arbitradas. Graficamente os resultados são os seguintes:

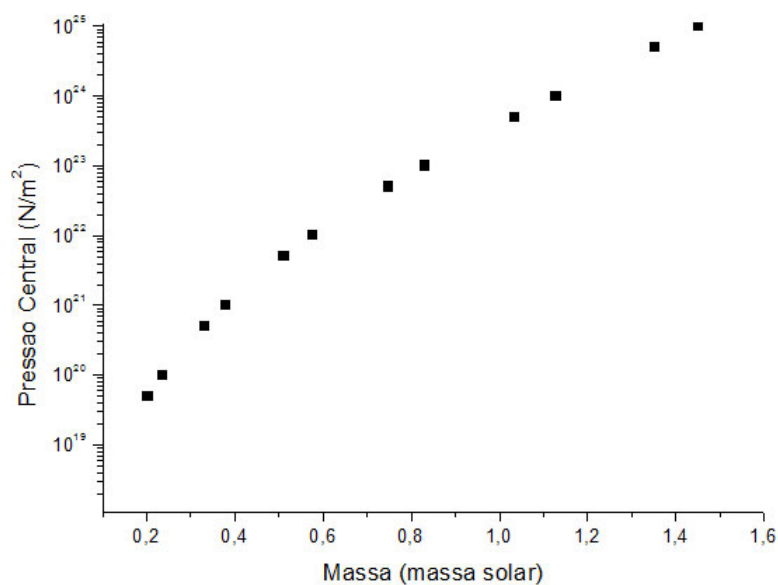


Figura 5.10: Massa de uma anã branca em função da pressão central.

Para a relação entre o raio R e a massa M o gráfico segue abaixo.

Abaixo segue um quadro com alguns valores gerados para massa e raio para uma comparação com os resultados obtidos anteriormente.

Pressão (N/m^2)	Massa (M_{\odot})	Raio (km)
$1 \cdot 10^{21}$	0,3793	14,657
$5 \cdot 10^{22}$	0,7493	8,163
$1 \cdot 10^{24}$	1,1291	5,009

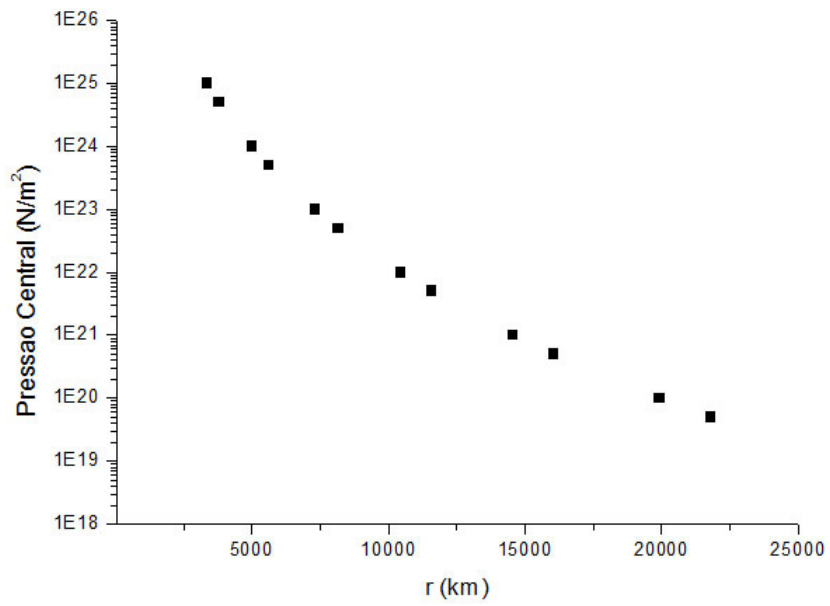


Figura 5.11: Raio de uma anã branca em função da pressão central.

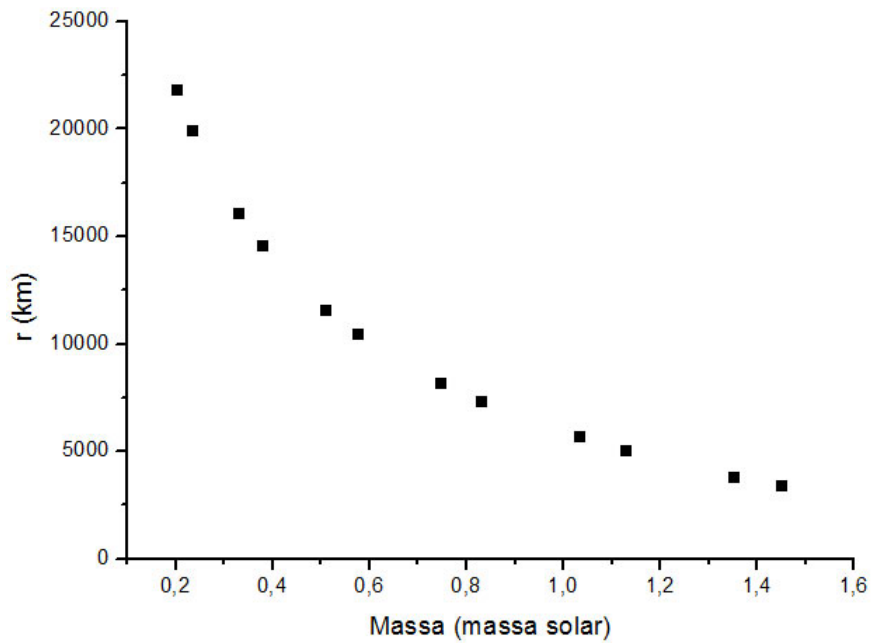


Figura 5.12: Raio em função da massa para anã branca descrita pela equação de estado mais geral.

Comentário sobre os resultados

Os resultados obtidos podem ser comparados com o gráfico do modelo padrão dos polítropos para os regimes considerados e, ao fazê-lo, observa-se boa concordância com o benefício adicional de funcionar para um regime arbitrário do gás de Fermi.

Na *figura 5.14* temos o raio em função da massa para os polítropos. Além disso, temos indicado o limite de massa para uma anã branca.

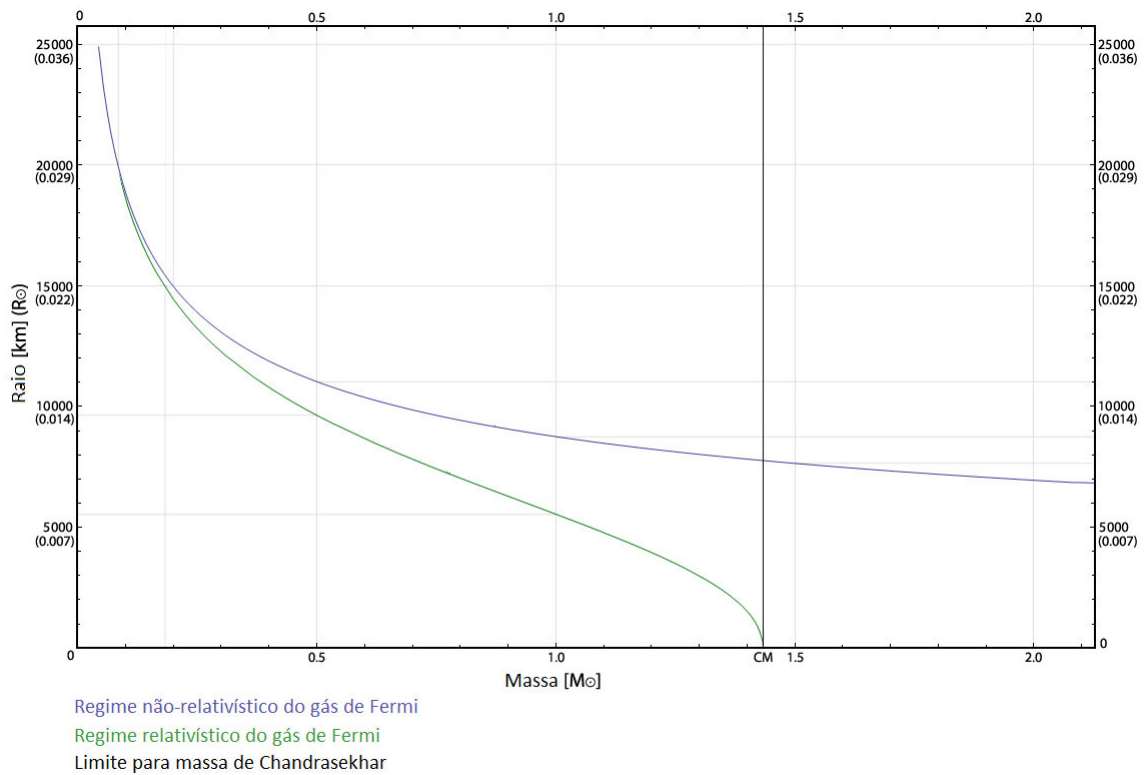


Figura 5.13: Relação entre massa e raio para cada regime do gás de Fermi. Adaptado de <http://whitedwarf.org/index.html>. Acessado em 23 de jul. de 2012.

5.5 Estrelas de nêutrons

Estrelas de nêutron foram propostas por Wilhelm Heinrich Walter Baade (1893 - 1960) e Fritz Zwicky (1898 - 1974) e descoberta por James Chadwick (1891 - 1974) na busca de uma explicação para as supernovas. Assim, como as anãs brancas, as estrelas de nêutrons são as remanescentes de estrelas que atingiram o final do seu ciclo de consumo de combustível nuclear. Tendo raio médio de apenas 10 km e massa aproximadamente igual a massa solar essas estrelas contam com uma densidade média da ordem de 10^{17} kg/m^3 . A estrutura de uma estrela de nêutrons pode ser imaginada supondo que, nos níveis compressão que geram suas incríveis densidades, os elétrons são forçados contra os prótons formando a massa de um nêutron. Embora um modelo mais realista para essa classe de estrela imponha a existência de uma pequena fração de prótons e elétrons para evitar o decaimento da mesma, iremos tratar o caso mais simples onde usaremos as suposições indicadas na seção 5.2.1, deixando um tratamento mais completo para um próximo trabalho.

5.6 Atividade: determinação do raio e massa de uma estrela de neutrons

Seguindo a linha de raciocínio usada para anã branca, buscaremos uma equação de estrutura que independa do regime do gás de Fermi que fornece a pressão necessária para equilibrar a força gravitacional. Ainda, vale lembrar que devido ao seu pequeno raio e massa da ordem de $1M_{\odot}$ o fator GM/Rc^2 indica, como já visto, que as correções da relatividade geral não podem ser negligenciadas para este caso. No entanto, é instrutivo resolver a equação de estrutura sem as referidas correções para entendermos o impacto das mesmas sobre os resultados.

As equações de estrutura, com a correção da relatividade geral, nos fornecem:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\varepsilon(r)}{c^2 r^2} \left[1 + \frac{P(r)}{\varepsilon(r)} \right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{M(r)c^2} \right] \left[1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} \right]^{-1}$$

$$\frac{dM(r)}{dr} = \frac{4\pi r^2}{c^2} \varepsilon(\vec{r})$$

$$\varepsilon(P) = B_1 P^{3/5} + B_2 P \quad (5.52)$$

onde B_1 e B_2 são coeficientes obtidos ajustando-se as equações *D.5* e *E.4*.

Em analogia ao caso abordado para as anãs brancas, espera-se que $B_1 P^{3/5}$ seja o termo dominante quando $p_F \ll m_n c$ e $B_1 P$ torne-se mais relevante quando $p_F \gg m_n c$. O expoente do segundo termo do lado esquerdo da equação de estado está relacionado com o regime relativístico do gás conforme Silbar e Reddy (2004).

A figura 3.14 fornece a curva construída para ajustar a equação 5.52. O resultado é dado a seguir:

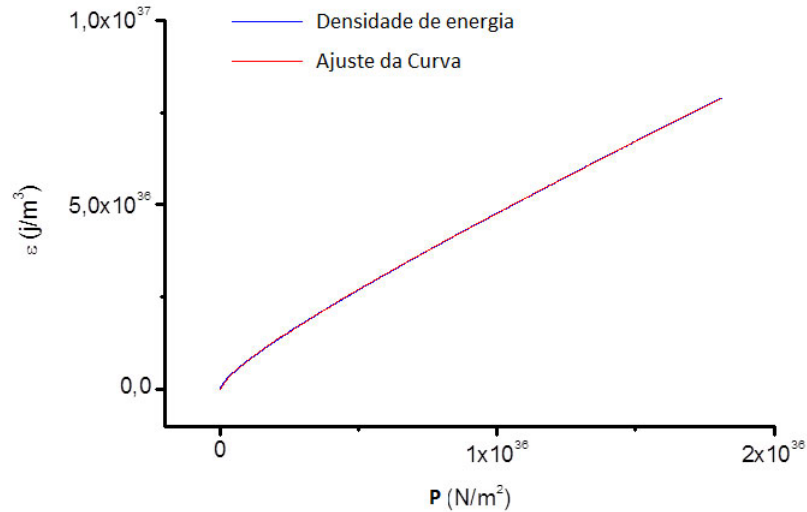


Figura 5.14: Determinação dos valores de B_1 e B_2 .

$$\varepsilon(P) = 4,99302 \times 10^{14} P^{3/5} + 2,78948P \quad (5.53)$$

Para a integração numérica foram usadas as unidades do Sistema Internacional sem o uso de qualquer fator de escala.

5.6.1 Resultados da integração numérica para estrela de neutrons

Para entendermos o impacto das correções da relatividade geral foram geradas três curvas para massa e raio para as pressões centrais que seguem:

Relatividade Geral:

caso 1: $P(0) = 10^{31} N/m^2$ - Resultando em $M = 0,31729M_{\odot}$ e $r = 21,6km$

caso 2: $P(0) = 10^{32} N/m^2$ - Resultando em $M = 0,53174M_{\odot}$ e $r = 16,6km$

caso 3: $P(0) = 10^{33} N/m^2$ - Resultando em $M = 0,73243M_{\odot}$ e $r = 11,6km$

Newtoniana:

caso 4: $P(0) = 10^{31} N/m^2$ - Resultando em $M = 0,34312M_{\odot}$ e $r = 26,3km$

caso 5: $P(0) = 10^{32} N/m^2$ - Resultando em $M = 0,63832M_{\odot}$ e $r = 20,9km$

caso 6: $P(0) = 10^{33} N/m^2$ - Resultando em $M = 1,08284M_{\odot}$ e $r = 16,6km$

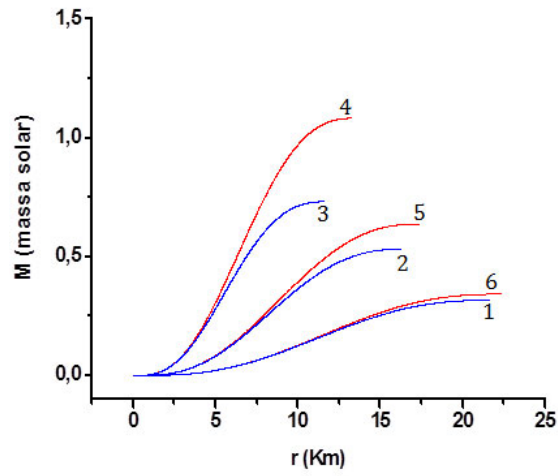


Figura 5.15: Raio contra massa para comparação do efeito da correção da relatividade geral na equação de estrutura de estrelas de nêutrons.

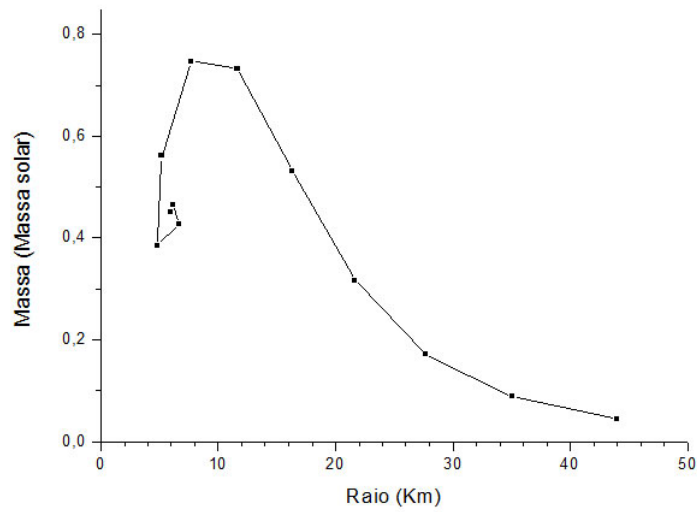


Figura 5.16: Raio contra massa para vários valores de pressão central.

Comentários sobre os resultados

A figura 5.16 sugere que o efeito da correção da relatividade geral na equação TOV tende a intensificar o efeito da gravidade sobre a estrela. Já o resultado exposto da figura 37 indica o limite para massa de uma estrela de nêutros

em torno de $0,8M_{\odot}$. Esse limite pode ser entendido se considerarmos que um aumento na massa implica em um aumento na intensidade da atração gravitacional do objeto que, para manter a estabilidade hidrostática, deve ser compensada com o aumento da pressão. Entretanto, devemos reconhecer que as forças de curta distância (entre as camadas adjacentes) tem sua velocidade propagação limitada à velocidade do som que, naturalmente, é menor que a velocidade de propagação das forças de longo alcance (relacionadas à atração gravitacional) não importa o quanto se imagine que a estrela seja "rígida". Assim, em determinado ponto as forças superficiais não respondem suficientemente rápido para contrabalancear a atração gravitacional e a estrela colapsa sobre o seu próprio peso.

5.7 Atividade: determinação da massa do buraco negro no centro da Via Láctea

Um buraco negro é um objeto remanescente de uma estrela supermassiva cuja atração gravitacional não permite que a luz escape de sua superfície. Um objeto dessa natureza foi proposto pela primeira vez em 1783 por John Michell (1724 - 1793) ao combinar a teoria corpuscular da luz com a teoria da gravidade e imaginando que a velocidade de escape de tais objetos seria igual à velocidade da luz (Gazzinelli 2005). Essa ideia também foi proposta por Pierre-Simon Laplace (1749 - 1827) em 1796. Mais tarde, Karl Schwarzschild, usando a recém publicada teoria da relatividade geral, determinou a existência de um raio crítico para um objeto simetricamente esférico, dependente de sua massa, abaixo do qual nem mesmo a luz poderia escapar de sua superfície. Esse resultado é denominado *raio de Schwarzschild* e indicado por R_{Sch} .

Nesta seção iremos usar um artifício simples para determinar o raio de Schwarzschild e estimar, usando a terceira lei de Kepler, a massa de um suposto buraco negro existente no centro da Via Láctea com base nos dados da órbita da estrela *S02* apresentada por Ghez et al apud Ruiz (2008).

5.7.1 Determinação newtoniana do Raio de Schwarzschild

Considerando a velocidade de escape dada por:

$$v_{escape} = \left[\frac{2GM}{R} \right]^{1/2} \quad (5.54)$$

onde M é a massa e R é o raio do astro e fazendo $v_{escape} = c$, temos:

$$R_{Shc} = \frac{2GM}{c^2} \quad (5.55)$$

que, embora represente a solução correta para o raio de Schwarzschild, não apresenta o rigor da dedução obtida através da relatividade geral.

Determinação da massa do Buraco Negro no centro da Via Láctea

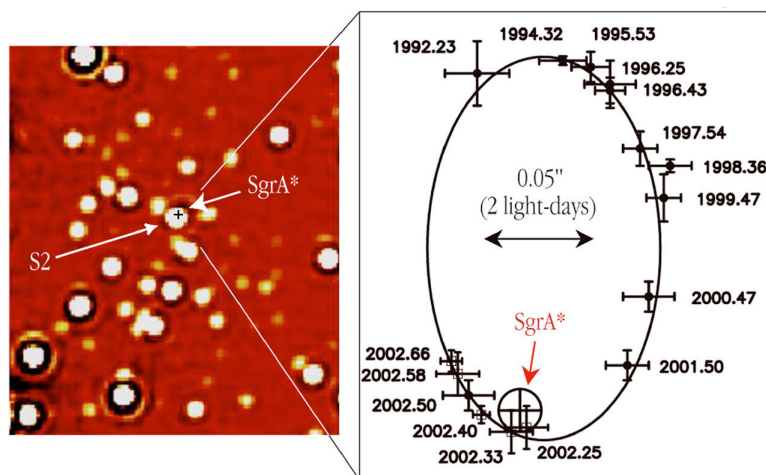


Figura 5.17: Órbita da estrela S0-2 em torno da SgrA* em escala. Note que a escala está em polegadas e dias-luz. Adaptado de: <http://www.eso.org/public/>. Acessado em 25 de jul. de 2012.

Tomando-se período e o semieixo maior da órbita da estrela $S02$ em torno da SgrA*⁸, onde acredita-se existir um buraco negro supermassivo, e aplicando-se a terceira lei de Kepler, temos:

$$\frac{T_{S02}^2}{a_{S02}^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_{S02} + M_{BH})} \quad (5.56)$$

onde M_{BH} é a massa do buraco negro. Supondo $m_{S02} \ll M$, temos:

$$\frac{T_{S02}^2}{a_{S02}^3 M_{BH}} = \frac{4\pi^2}{G} \quad (5.57)$$

Para calcular o valor de M_{BH} em função da massa do Sol, deve-se escrever:

$$\frac{T_{Terra}^2}{a_{Terra}^3 M_{\odot}} = \frac{4\pi^2}{G} \quad (5.58)$$

Combinando as equações 5.57 e 5.58, chega-se ao resultado desejado dado a seguir.

$$M_{BH} = \left(\frac{a_{S02}}{a_{Terra}} \right)^3 \left(\frac{T_{Terra}}{T_{S02}} \right)^2 M_{\odot} \quad (5.59)$$

Adotando $a_{Sol} = 1 UA$ ⁹, $T_{Terra} = 1 ano$, $M_{Sol} = M_{\odot}$ e, segundo Ghez et al apud Ruiz (2008), $a_{S02} \simeq 919 UA$ e $T_{S02} \simeq 15 anos$. Temos:

$M_{BH} = 4 \times 10^6 M_{\odot}$ e, pela equação 5.55, $R_{Sch} = 0,08 UA$.

Estimativas mais precisas¹⁰ indicam que o buraco negro no centro da nossa galáxia possui massa de $4,1 \times 10^6 M_{\odot}$.

⁸Sagittarius A-star

⁹ $UA = 1,49598 \times 10^{11} m$

¹⁰Ghez et al (2005).

Capítulo 6

Conclusões

Ao se trabalhar com temas ligados à astrofísica, imediatamente deparou-se com a enorme quantidade de áreas da física necessárias para gerar explicações e modelos, mesmo que simples, da estrutura de objetos celestes. Além disso, para o professor de física do ensino médio sem domínio da língua inglesa a tarefa de buscar o conhecimento necessário para construir o conhecido desejado torna-se ainda mais difícil. Com isso, buscou-se neste trabalho fornecer aos docentes oriundos dos cursos de licenciatura em física a possibilidade de um primeiro contato com os temas tratados neste trabalho. Para a implementação de atividades relacionadas aos tópicos tratados não serão necessários grandes esforços, pois usam materiais de fácil aquisição no mercado e as ferramentas computacionais (como um compilador da linguagem *C*) podem ser obtidas gratuitamente na rede.

Com relação aos próximos trabalhos, pretende-se revisitar o tema relativo às *estrelas de nêutrons* onde serão levados em conta a presença de elétrons e prótons em um modelo mais realista. Além disso, serão estudados alguns elementos conceituais bem como uma primeira abordagem matemática da teoria da relatividade geral. Por fim, é importante ressaltar o quanto este trabalho foi enriquecedor em termos de conhecimento acumulado. Tendo estudado assuntos diversos para construir deduções detalhadas e modelos explicativos para resultados obtidos, sem dúvida, houve a possibilidade de vivenciar a frase de Albert Einstein: "A mente que se abre a uma nova ideia

jamais voltará ao seu tamanho original”.

Apêndice A

Correções para a constante solar

A.1 Transmissão atmosférica em função do ângulo zenital

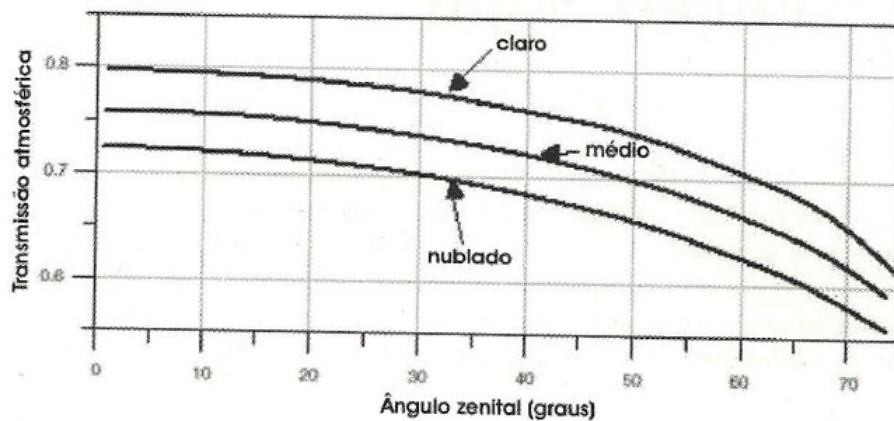


Figura A.1: Correções para a constante solar em função do ângulo zenital e das condições atmosféricas. Fonte: V. R. SILVA, 2006.

O ângulo zenital é o ângulo de incidência da radiação medido em relação à vertical.

Apêndice B

Esquema de montagem o espectroscópio de DVD

Para construir o espectroscópio é necessário cortar um pedaço de DVD com 80mm de comprimento e apoiá-lo nos pontos A e B indicados na figura. O uso de cola para a fixação do pedaço de DVD é desnecessário, pois o mesmo, se bem posicionado onde especificado, ficará suficientemente preso.

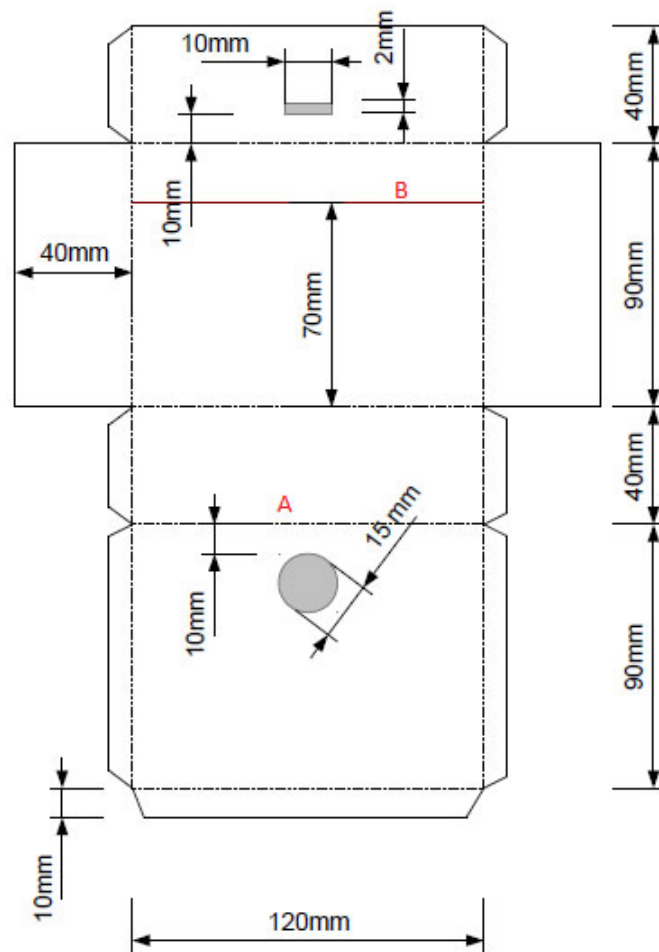


Figura B.1: Esquema para a montagem do espectroscópio de DVD.



Figura B.2: 1. Recorte do papel cartão; 2. Dobradura das regiões pontilhadas; 3. Abertura dos orifícios e da fenda para encaixe do DVD; 4. Encaixe do DVD na fenda; 5. Ajuste do DVD.



Figura B.3: Resultado da montagem do espectrscópio de DVD.

Apêndice C

Equações da condição crítica para a convecção

Para o gás ideal:

$$P \propto \rho T \quad (\text{C.1})$$

Determinando o diferencial dP , segue:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial P}{\partial T} dT \quad (\text{C.2})$$

Onde:

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = T \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \rho \quad (\text{C.4})$$

Substituindo as equações *C.3* e *C.4* em *C.2*, obtemos:

$$dP = T d\rho + \rho dT \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{P} - \frac{dT}{T} \quad (\text{C.5})$$

Adotando a equação do processo adiabático para o gás ideal:

$$PV^\gamma = \text{Constante} \Rightarrow \frac{1}{V^\gamma} = \text{constante} \rho^\gamma \quad (\text{C.6})$$

Sendo $P \propto \rho^\gamma$, podemos escrever para o processo adiabático a equação:

$$\frac{1}{P^\gamma} \propto \rho \quad (\text{C.7})$$

Tomando o diferencial dP , tem-se:

$$dP = \gamma \rho^{(\gamma-1)} d\rho \quad (\text{C.8})$$

$$\frac{dP}{\gamma} = \left[P \left(\frac{1}{\gamma} \right) \right]^{(\gamma-1)} d\rho \Rightarrow \frac{dP}{\gamma} = \left[P \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \right] d\rho \quad (\text{C.9})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\gamma} \frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} \quad (\text{C.10})$$

O resultado de *C.5* e *C.10* são usados na seção *4.1.3.1*.

Apêndice D

Pressão gerada por um gás de férmions - pressão de degenerescência

A fonte de pressão de um gás é devido ao bombardeamento de uma superfície (real ou hipotética) pelas partículas constituintes do mesmo. Com isso em mente e tomando como base a figura 42 podemos chegar a uma expressão para a pressão de um gás isotrópico que será fundamental em diversas seções deste trabalho.

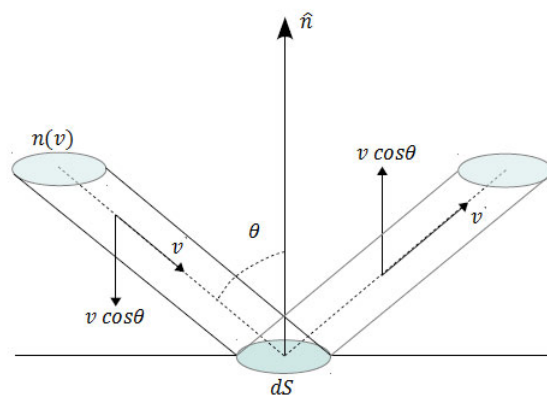


Figura D.1: Cilindro de base dS sobre uma superfície S

Considere o momentum transferido à superfície S pelas colisões das partículas

com a mesma dado por:

$$\Delta p = 2p \cos \theta \quad (D.1)$$

Além disso, a densidade de partículas com momento entre p e $p + dp$ incidindo sobre a superfície infinitesimal dS com um ângulo em relação à normal entre θ e $\theta + d\theta$ vale:

$$n(\theta, p)d\theta dp \quad (D.2)$$

onde $n(\theta, p)$ é a densidade de partículas no intervalo angular considerado.

Como a distribuição de partículas é isotrópicas, o número de partículas compreendidas em um ângulo sólido $d\omega$ é proporcional ao mesmo. Logo:

$$\frac{n(\theta, p)d\theta dp}{n(p)dp} = \frac{d\omega}{4\pi} = \frac{2\pi \sin \theta d\theta}{4\pi} = \frac{\sin \theta d\theta}{2} \quad (D.3)$$

O número de partículas que atingem a superfície dS num intervalo de tempo δt é dado pelo produto entre a densidade de partículas e o volume do cilindro, como indicado pela figura 42. Logo:

$$n(\theta, p)v \cos \theta \delta t dS \quad (D.4)$$

Quanto ao momento transferido à superfície dS no intervalo de tempo δt , temos:

$$\delta p = \frac{1}{2}n(p) \sin \theta v \cos \theta \delta t dS 2p \cos \theta \quad (D.5)$$

onde $2p \cos \theta$ é a variação de momento e $\frac{1}{2}n(p) \sin \theta = n(\theta, p)d\theta$ conforme *D.3*.

A contribuição para a pressão é dada por:

$$dP = \frac{\delta p}{\delta t dS} \quad (D.6)$$

e substituindo a equação *D.5* em *D.6*, obtem-se:

$$dP = n(p) v p \sin \theta \cos^2 \theta d\theta dp \quad (D.7)$$

Escrevendo *D.7* sob a forma integral, tem-se:

$$P = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta d\theta \int_0^\infty v p n(p) dp \quad (D.8)$$

Finalmente, ao se resolver a primeira integral do lado esquerdo, chega-se à expressão desejada a seguir:

$$P(p) = \frac{1}{3} \int_0^\infty p \cdot v \cdot n(p) dp \quad (D.9)$$

Na equação *D.9*, $n(p)dp$ depende da estatística de Fermi-Dirac (para o qual adotamos $T = 0$). Além disso, para o caso mais geral usaremos a expressão relativística para a velocidade em função do momentum.

$$v = \frac{p/m}{[1 - (p/mc)^2]^{1/2}} \quad (D.10)$$

Dessa forma a equação *D.1* é reescrita como:

$$P(p_F) = \frac{1}{3m\pi^2\hbar^3} \int_0^{p_F} \frac{p^4}{[1 - (p/mc)^2]^{1/2}} dp \quad (D.11)$$

Substituindo-se $u = p/mc$ em *D.11*, segue:

$$P(p) = \frac{m^4 c^4}{24\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_F/mc} (u^2 + 1)^{1/2} u^4 du \quad (D.12)$$

Finalmente, resolvendo a integral anterior, encontramos:

$$P(p_F) = \frac{m^4 c^5}{24\pi^2 \hbar^3} [(2x^3 - 3x)(1 + x^2)^{1/2} + \operatorname{arcsenh}(x)] \quad (D.13)$$

Onde $x = p_F/mc$.

Apêndice E

Densidade de energia de um gás de férmions

O cálculo da densidade de energia de férmions em função do momentum será útil para determinarmos uma equação de estado mais geral para estrelas de nêutrons e anãs brancas. Assim:

$$\varepsilon(p) = \int_0^\infty E(p)n(p)dp \quad (\text{E.1})$$

onde $E(p) = (p^2c^2 + m^2c^4)^{1/2}$, sendo m a massa do férmion considerado; o termo $n(p)dp$ depende da estatística de Fermi-Dirac (para o qual adotamos $T = 0$).

Como os estados estão ocupados até ε_F , podemos calcular a integral E.1 da seguinte forma:

$$\varepsilon(p) = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} E(p) = (p^2c^2 + m^2c^4)^{1/2} p^2 dp \quad (\text{E.2})$$

Fazendo $u = \frac{p}{mc}$, a integral toma a forma:

$$\varepsilon(p) = \frac{8\pi m^4 c^5}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F/mc} (u^2 + 1)u^2 du \quad (\text{E.3})$$

A solução dessa integral pode ser facilmente determinada com o auxílio de um handbook de integrais e o resultado é:

$$\varepsilon(p_F) = \frac{m^4 c^5}{8\pi^2 \hbar^3} [(2x^3 + x)(1 + x^2)^{1/2} - \text{arcsenh}(x)] \quad (\text{E.4})$$

Onde $x = \frac{p_F}{mc}$.

Apêndice F

A equação de Lane-Emden

Para compreensão de alguns resultados é importante ter um conhecimento mais amplo da equação de estrutura usada para as estrelas compactas estudadas neste trabalho. Para isso, iremos admitir que a equação de estrutura de uma estrela compacta, simetricamente esférica e em equilíbrio hidrostático é fornecida pela combinação das equações 5.9, 5.11 e pela relação entre a pressão e a densidade, chamada polítropo, dada pela equação F.1.

$$P(\rho) = K\rho^\gamma \quad (\text{F.1})$$

onde γ , índice do polítropo, e K sendo constantes reais positivas.

Para obter a equação desejada, devemos combinar as equações 5.9 e 5.11.

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G\rho \quad (\text{F.2})$$

Realizando-se as trocas de variáveis a seguir:

$$\rho = \rho_c \theta^{1/(1-\gamma)} \quad (\text{F.3})$$

$$P = P_c \theta^{\gamma/\gamma-1} \quad (\text{F.4})$$

$$r = \alpha \xi \quad (\text{F.5})$$

Onde, θ e ξ são adimensionais; ρ_c e P_c são a densidade central e a pressão central, respectivamente; e α é uma constante de comprimento definida por:

$$\alpha = \left(\frac{K \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \rho_c^{\gamma-2}}{4\pi G} \right)^{1/2} \quad (\text{F.6})$$

Combinamos as equações de *F.2* até *F.6*, obtemos a equação de Lane-Emden.

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^{1/(\gamma-1)} \quad (\text{F.7})$$

As condições de contorno são: $\theta(\xi = 0) = 1$ e $(d\theta/d\xi) |_{\xi=0} = 0$. Para entender as condições de contorno deve-se observar as equações de *F.3* até *F.5*.

A solução da equação de Lane-Emden depende do valor do índice do polítropo γ .

A solução para o raio e a massa será dada a seguir sem demonstração segundo Glendenning (2000).

$$R = \left[\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma - 1)} \right]^{1/2} \rho_c^{(\gamma-2)/2} \xi_1 \quad (\text{F.8})$$

$$M = 4\pi \rho_c^{(3\gamma-4)/2} \left(\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma - 1)} \right)^{3/2} \xi_1^2 |(d\theta/d\xi) |_{\xi=\xi_1} | \quad (\text{F.9})$$

onde $\theta(\xi = \xi_1) = 0$. Note que ξ_1 representa a "borda" da estrela onde a pressão tende à zero.

A equação *F.9* é importante para entender o resultado do item *5.4.5.3*.

Apêndice G

Integração numérica

Para melhor compreensão do código usado faz-se necessário algumas definições. Assim, a pressão é representada por " p ", " k " é o momento, o índice subscrito " F " indica *Fermi*, " m_e " é massa do elétron, " m_n " é a massa do neutron e " c " é a velocidade da luz.

G.1 Anã branca para $p_F \ll m_e c$

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>

// raio estimado de 10.000 Km

double funcaom (double*x) // funcao de M
{
    double f, beta = 0.005924, gama = 3./5.;
    f = beta*pow(x[2],2)*pow(x[1],gama);
    return f;
}

double funcaop (double*x) // funcao de p
{
    double f, alfa = 0.05, gama = 3./5.;
    f = -((alfa*pow(x[1],gama)*x[0])/(pow(x[2],2)));
}
```

```

        return f;
    }

main()
{
    double delta = 0.1, F[2], f[2], E[3], x[3], o;
    FILE *saida1,*saida2;

    x[0] = 0.; // massa inicial
    x[1] = pow(10,-16); // pressao inicial
    x[2] = 0.0000000001; // dintancia inicial

    printf (" Resultado da integracao da equacao de estrutura\n");
    saida1 = fopen("resultado_N_GnR_M.dat", "w");
    saida2 = fopen("resultado_N_GnR_p.dat", "w");

    while( x[1]>0) // pressao
    {
        printf (".11e .11e\n", x[2] , x[0]);
        fprintf( saida1, ".11e .11e\n", x[2] , x[0]); // r x M
        fprintf( saida2, ".11e .11e\n", x[2] , x[1]); // r x p
        f[0] = funcaom (x); // entra r(i) e p(i)
        F[0] = funcaop (x); // entra r(i), M(i) e p(i)
        E[0] = x[0] + f[0]*delta; // estimativa de euler para M(i+1)
        E[1] = x[1] + F[0]*delta; // estimativa de euler para p(i+1)
        E[2] = x[2] + delta;
        f[1] = funcaom (E);
        F[1] = funcaop (E);
        x[0] = x[0] + 0.5*(f[0] + f[1])*delta; // M(i+1) final
        x[1] = x[1] + 0.5*(F[0] + F[1])*delta; // p(i+1) final
        x[2] = x[2] + delta; // incremento de 100 metros
    }

    printf("para sair digite um caracter e tecle enter\n");
    scanf("%1f", &o);
}

```

G.2 Anã branca para $p_F \gg m_e c$

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>

// raio estimado de 10.000 Km

double funcaom (double*x) // funcao de M
{
    double f, beta = 52.46, gama = 3./4.;
    f = beta*pow(x[2],2)*pow(x[1],gama);
    return f;
}

double funcaop (double*x) // funcao de p
{
    double f, alfa = 1.473, gama = 3./4.;
    f = -(((alfa*pow(x[1],gama)*x[0])/(pow(x[2],2)))));
    return f;
}

main()
{
    double delta = 0.1, F[2], f[2], E[3], x[3], o;
    FILE *saida1,*saida2;

    x[0] = 0.; // massa inicial
    x[1] = pow(10,-14); // pressao inicial
    x[2] = 0.0000000001; // dintancia inicial

    printf (" Resultado da integracao da equacao de estrutura\n");
    saida1 = fopen("resultado_N_GR_M.dat", "w");
    saida2 = fopen("resultado_N_GR_p.dat", "w");

    while( x[1]>0) // pressao
    {
        printf (".11e .11e\n", x[2] , x[1]);
        fprintf( saida1, ".11e .11e\n", x[2] , x[0]); // r x M
        fprintf( saida2, ".11e .11e\n", x[2] , x[1]); // r x p
        f[0] = funcaom (x); // entra r(i) e p(i)
    }
}
```

```

        F[0] = funcaop (x); // entra r(i), M(i) e p(i)
        E[0] = x[0] + f[0]*delta; // estimativa de euler para M(i+1)
        E[1] = x[1] + F[0]*delta; // estimativa de euler para p(i+1)
        E[2] = x[2] + delta;
        f[1] = funcaom (E);
        F[1] = funcaop (E);
        x[0] = x[0] + 0.5*(f[0] + f[1])*delta; // M(i+1) final
        x[1] = x[1] + 0.5*(F[0] + F[1])*delta; // p(i+1) final
        x[2] = x[2] + delta; // incremento de 100 metros
    }
    printf("para sair digite um caracter e tecle enter\n");
    scanf("%1f", &o);
}

```

G.3 Equação de estado para um regime qualquer do gás de Fermi para anã branca

G.3.1 Pressão para um gás de elétrons segundo a equação

D.5

```

#include<stdio.h>
#include<math.h>

// pkf é a pressão em função da energia de fermi.
// Kf é a energia de fermi.
// os dados estão ajustados para a estrela de neutros.

main()
{
    double h = 1.05459*pow (10,-34), me = 9.11*pow(10,-31),c =2.998*pow(10,8),
    mn = 1.67*pow(10,-27),s[8],Pi,pkf,Kf,C,x,P,delta,o;
    FILE *saida;

    Pi = 4*atan(1.);

```

```

C = ((me*me*me*me*c*c*c*c*c)/(24.*Pi*Pi*h*h*h));
Kf = 0.;
P = 2.*me*c;
delta = pow(10,-25);
saida = fopen("p_a_wd.dat","w");

while ( Kf <= P )

{
    x = Kf/(me*c);
    s[0] = 2*pow(x,3);
    s[1] = 3*x;
    s[2] = 1+pow(x,2);
    s[3] = 3*asinh(x);
    s[4] = s[0]-s[1];
    s[5] = sqrt(s[2]);
    s[6] = s[4]*s[5];
    s[7] = s[6]+s[3];
    pkf = C*s[7];
    fprintf( saida,"%11e\n", pkf);
    printf ("%11e\n",pkf);
    Kf = Kf + delta;
}

printf("para sair digite um caracter e tecle enter\n");
scanf("%1f",&o);
}

```

G.3.2 Densidade de energia para um gás de elétrons segundo a equação 5.49

```

#include<stdio.h>
#include<math.h>

// pkf é a pressão em função da energia de fermi.
// Kf é a energia de fermi.
// os dados estão ajustados para a estrela de neutros.

```

```

main()
{
    double h = 1.05459*pow (10,-34), me = 9.11*pow(10,-31),c =2.998*pow(10,8),
    mn = 1.67*pow(10,-27),Pi,s[9],Kf,E,P,y,C,delta,o,D;
    FILE *saida;

    Pi = 4*atan(1.);
    C = ((me*me*me*me*c*c*c*c*c*c)/(8.*Pi*Pi*h*h*h));
    D = ((2.*mn*me*me*me*c*c*c*c*c*c)/(3.*Pi*Pi*h*h*h));
    delta = pow(10,-25); // incremento no Kf
    Kf = 0.; //valor inicial estipulado para a energia de fermi.
    P = 2.*me*c;
    saida = fopen("E_a_wd.dat","w");

    while ( Kf <= P )

    {
        y = Kf/(me*c);
        s[0] = 2*pow(y,3);
        s[1] = y;
        s[2] = 1+pow(y,2);
        s[3] = asinh(y);
        s[4] = s[0]+s[1];
        s[5] = sqrt(s[2]);
        s[6] = s[4]*s[5];
        s[7] = s[6]-s[3];
        s[8] = D*pow(y,3);
        E = s[8]+(C*s[7]);
        fprintf( saida,"%0.11e\n",E);
        printf ("%0.11e %0.11e\n",s[8],E);
        Kf = Kf + delta;
    }

    printf("para sair digite um caracter e tecle enter\n");
    scanf("%1f",&o);
}

```

G.3.3 Equação para um regime qualquer do gás de Fermi

As equações usadas na integração numérica são a 5.47 e 5.48, onde os valores das constantes A_1 e A_2 já estão presentes, conforme a reequação 5.51.

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>

double funcao (double*x)
{
    double e,f,gama = 3./5.,gama2 = 3./4.,G = 6.673*pow(10,-11) ,c = 2.998*pow(10,8);

    e = ((7.02153*pow(10,12))*pow(x[1],gama)) + ((3.22222*pow(10,9))*pow(x[1],gama2));
    f = -(G*e*x[0])/(pow(x[2],2)*c*c);
    return f;
}

double funcaom (double*x)
{
    double e,f,C,gama = 3./5.,gama2 = 3./4.,Pi = 4*atan(1.),c = 2.998*pow(10,8);

    C = (4*Pi)/(c*c);
    e = ((7.02153*pow(10,12))*pow(x[1],gama)) + ((3.22222*pow(10,9))*pow(x[1],gama2));
    f = C*e*pow(x[2],2);
    return f;
}

main()
{
    double delta = 500., F[2], f[2], E[3], x[3], o;
    FILE *saida1,*saida2;

    x[0] = pow(10,10); // massa inicial
    x[1] = pow(10,25); // pressao inicial
    x[2] = 1.; // dintancia inicial

    printf (" Resultado da integracao da equacao de estrutura\n");
    saida1 = fopen("resultado_M_NR.dat", "w");
    saida2 = fopen("resultado_p_NR.dat", "w");
```

```

while( x[1] > 0. )
{
    printf (".11e .11e\n", x[0] , x[1]);
    fprintf( saida1, ".11e .11e\n", x[2] , x[0]); // r x M
    fprintf( saida2, ".11e .11e\n", x[2] , x[1]); // r x p
    f[0] = funcaom (x); // entra r(i) e p(i)
    F[0] = funcaop (x); // entra r(i), M(i) e p(i)
    E[0] = x[0] + f[0]*delta; // estimativa de euler para M(i+1)
    E[1] = x[1] + F[0]*delta; // estimativa de euler para p(i+1)
    E[2] = x[2] + delta;
    f[1] = funcaom (E);
    F[1] = funcaop (E);
    x[0] = x[0] + 0.5*(f[0] + f[1])*delta; // M(i+1) final
    x[1] = x[1] + 0.5*(F[0] + F[1])*delta; // p(i+1) final
    x[2] = x[2] + delta; // incremento de 500 m
}
printf("para sair digite um caracter e tecle enter\n");
scanf("%1f", &o);
}

```

G.4 Equação de estado para um regime qualquer do gás de Fermi para estrelas de nêutrons

G.4.1 Pressão para um gás de nêutrons segundo a equação

D.5

```

#include<stdio.h>
#include<math.h>

// pkf é a pressão em função da energia de fermi.
// Kf é a energia de fermi.

```



```

// os dados estão ajustados para a estrela de neutros.

main()
{
    double h = 1.05459*pow (10,-34), me = 9.11*pow(10,-31),c =2.998*pow(10,8),
    mn = 1.67*pow(10,-27),s[8],pkf,Pi,Kf,C,x,P,delta,o;
    FILE *saida;

    Pi = 4*atan(1.);
    C = ((mn*mn*mn*mn*c*c*c*c*c)/(24.*Pi*Pi*h*h*h));
    Kf = 0.;
    P = 2*mn*c;
    delta = pow(10,-21);
    saida = fopen("p_a_ns.dat","w");

    while ( Kf <= P )

    {
        x = Kf/(mn*c);
        s[0] = 2*pow(x,3);
        s[1] = 3*x;
        s[2] = 1+pow(x,2);
        s[3] = 3*asinh(x);
        s[4] = s[0]-s[1];
        s[5] = sqrt(s[2]);
        s[6] = s[4]*s[5];
        s[7] = s[6]+s[3];
        pkf = C*s[7];
        fprintf( saida,"%0.11e\n", pkf);
        printf ("%0.11e\n",pkf);
        Kf = Kf + delta;
    }

    printf("para sair digite um caracter e tecle enter\n");
    scanf("%1f",&o);
}

```

G.4.2 Densidade de energia para um gás de nêutrons segundo a equação *E.4*

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>

// pkf é a pressão em função da energia de fermi.
// Kf é a energia de fermi.
// os dados estão ajustados para a estrela de neutros.

main()
{
    double h = 1.05459*pow (10,-34), me = 9.11*pow(10,-31),c =2.998*pow(10,8),
    mn = 1.67*pow(10,-27),Pi,Kf,E,s[8],P,y,C,delta,o;
    FILE *saida;

    Pi = 4*atan(1.);
    C = ((mn*mn*mn*mn*c*c*c*c*c)/(8.*Pi*Pi*h*h*h));
    delta = pow(10,-21); // incremento no Kf
    Kf = 0.; //valor inicial estipulado para a energia de fermi.
    P = 2.*mn*c;
    saida = fopen("E_a_ns.dat","w");

    while ( Kf <= P )

    {
        y = Kf/(mn*c);
        s[0] = 2*pow(y,3);
        s[1] = y;
        s[2] = 1+pow(y,2);
        s[3] = asinh(y);
        s[4] = s[0]+s[1];
        s[5] = sqrt(s[2]);
        s[6] = s[4]*s[5];
        s[7] = s[6]-s[3];
        E = C*s[7];
        fprintf( saida,"%0.11e\n",E);
        printf ("%0.11e\n",E);
        Kf = Kf + delta;
    }
}
```

```

    }

    printf("para sair digite um caracter e tecle enter\n");
    scanf("%1f",&o);
}

```

G.5 Equação de estrutura newtoniana para um regime qualquer do gás de Fermi

```

#include<stdio.h>
#include<math.h>

double funcaop (double*x)
{
    double e,f,gama = 3./5.,G = 6.673*pow(10,-11) ,c = 2.998*pow(10,8);

    e = ((4.9931*pow(10,14))*pow(x[1],gama)) + (2.78945*x[1]);
    f = -(G*e*x[0])/(pow(x[2],2)*c*c);
    return f;
}

double funcaom (double*x)
{
    double e,f,C,gama = 3./5.,Pi = 4*atan(1.),c = 2.998*pow(10,8);

    C = (4*Pi)/(c*c);
    e = ((4.9931*pow(10,14))*pow(x[1],gama)) + (2.78945*x[1]);
    f = C*e*pow(x[2],2);
    return f;
}

main()
{
    double delta = 10., F[2], f[2], E[3], x[3], o;
    FILE *saida1,*saida2;

    x[0] = 0.; // massa inicial
    x[1] = pow(10,33); // pressao inicial
    x[2] = 1.; // dintancia inicial

```

```

printf (" Resultado da integracao da equacao de estrutura\n");
saida1 = fopen("resultado_M_NR.dat", "w");
saida2 = fopen("resultado_p_NR.dat", "w");

while( x[1] > 0. )
    {
        printf (".11e .11e\n", x[0] , x[1]);
        fprintf( saida1, ".11e .11e\n", x[2] , x[0]); // r x M
        fprintf( saida2, ".11e .11e\n", x[2] , x[1]); // r x p
        f[0] = funcaom (x); // entra r(i) e p(i)
        F[0] = funcaop (x); // entra r(i), M(i) e p(i)
        E[0] = x[0] + f[0]*delta; // estimativa de euler para M(i+1)
        E[1] = x[1] + F[0]*delta; // estimativa de euler para p(i+1)
        E[2] = x[2] + delta;
        f[1] = funcaom (E);
        F[1] = funcaop (E);
        x[0] = x[0] + 0.5*(f[0] + f[1])*delta; // M(i+1) final
        x[1] = x[1] + 0.5*(F[0] + F[1])*delta; // p(i+1) final
        x[2] = x[2] + delta; // incremento de 10 metros
    }
printf("para sair digite um caracter e tecle enter\n");
scanf("%1f", &o);
}

```

G.6 Equação de estrutura com as correções da relatividade geral

```

double funcaop (double*x)
{
    double e,f,gama = 3./5.,G = 6.673*pow(10,-11) ,c = 2.998*pow(10,8),C1,
    C2,C3,Pi = 4*atan(1.);

    e = ((4.9931*pow(10,14))*pow(x[1],gama)) + (2.78945*x[1]);
    C1 = 1+(x[0]/e);
    C2 = 1+((4*Pi*x[2]*x[2]*x[2]*x[1])/(x[0]*c*c));
    C3 = 1./(1-((2*G*x[0])/(c*c*x[2])));
}

```

```

        f = -(G*e*x[0])/(pow(x[2],2)*c*c)*C1*C2*C3;
        return f;
    }
double funcaom (double*x)
{
    double e,f,C,gama = 3./5.,Pi = 4*atan(1.),c = 2.998*pow(10,8);

    C = (4*Pi)/(c*c);
    e = ((4.9931*pow(10,14))*pow(x[1],gama)) + (2.78945*x[1]);
    f = C*e*pow(x[2],2);
    return f;
}

main()
{
    double delta = 10., F[2], f[2], E[3], x[3], o;
    FILE *saida1,*saida2;

    x[0] = pow(10,18); // massa inic. obtida da relação e = rδ(c^2), dado ezero.
    x[1] = pow(10,33); // pressao inicial
    x[2] = 1.; // dintancia inicial

    printf (" Resultado da integracao da equacao de estrutura\n");
    saida1 = fopen("resultado_M_R.dat", "w");
    saida2 = fopen("resultado_p_R.dat", "w");

    while( x[1] > 0. )
        {
            printf ("% .11e % .11e\n", x[0] ,x[1]);
            fprintf( saida1,"% .11e % .11e\n", x[2] , x[0]); // r x M
            fprintf( saida2,"% .11e % .11e\n", x[2] , x[1]); // r x p
            f[0] = funcaom (x); // entra r(i) e p(i)
            F[0] = funcaop (x); // entra r(i), M(i) e p(i)
            E[0] = x[0] + f[0]*delta; // estimativa de euler para M(i+1)
            E[1] = x[1] + F[0]*delta; // estimativa de euler para p(i+1)
            E[2] = x[2] + delta;
            f[1] = funcaom (E);
            F[1] = funcaop (E);
        }
}

```

```
        x[0] = x[0] + 0.5*(f[0] + f[1])*delta; // M(i+1) final
        x[1] = x[1] + 0.5*(F[0] + F[1])*delta; // p(i+1) final
        x[2] = x[2] + delta; // incremento de 100 metros
    }
    printf("para sair digite um caracter e tecle enter\n");
    scanf("%1f", &o);
}
```

Referências Bibliográficas

- [1] A. C. Phillips, The Physics of Star. *John Wiley and Sons*.
- [2] A. M. Ghez et al, Stellar orbits around the Galactic Center Black Hole. *Astrophysics Journal*, 620 (2), p.744 - 757, 2005.
- [3] A. V. R. Silva, Nossa Estrela: o Sol. *Editora Livraria da Física*, 2006.
- [4] Brasil. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Nossa Estrela: Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio. *Brasília, MEC/SEMT*, 1998.
- [5] F. H. Shu, The Physical Universe: An Introduction to Astronomy. *University Science Books*, 1982.
- [6] F. Wakabayashi et al, A DVD Spectroscope: A simple, High-Resolution Classroom Spectroscope. *Journal of Chemical Education*, 83 (2), P.56 - 58, 2004.
- [7] K. S. Oliveira Filho et al, Astronomia e Astrofísica. *Editora Livraria da Física*, 2004.
- [8] M. J. Ruiz, A Black Hole in Our Galactic Center. *The Physics Teacher*, 46 (10), p.10 - 11 2006.
- [9] N. K. Glendenning, Compact Stars. *Springer*, 2000.
- [10] P. H. Bodenheimer, Principles of Star Formation. *Springer*, 2001.
- [11] R. Eisberg et al, Física Quântica. *Editora Campus*, 1979.
- [12] R. Gazzinelli, Teoria da Relatividade Especial. *Editora Edgard Blücher*, 2005.
- [13] R. P. Feynman et al, The Feynman Lectures on Physics, Vol. 1. *bookman*, 2008.

- [14] W. H. Press et al, Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing. *Cambridge University Press*, 1992.
- [15] R. Eisberg et al, Física Quântica. *Editora Campus*, 1979.
- [16] <http://pt.wikipedia.org/wiki/AnC35A3branca>. Acessado em 1 de maio de 2011.
- [17] <http://en.wikipedia.org/wiki/Neutronstar>. Acessado em 23 de maio de 2011.
- [18] <http://en.wikipedia.org/wiki/Blackhole>. Acessado em em 25 de novembro de 2011.
- [19] <http://astro.if.ufrgs.br/evol/node8.htm>. Acessado em 8 de julho de 2012.
- [20] http://en.wikipedia.org/wiki/SagittariusA*. Acessado em 25 de julho de 2012.