



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO**  
Instituto de Física  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física  
Mestrado Profissional em Ensino de Física

## REFRAÇÃO, AS VELOCIDADES DA LUZ E METAMATERIAIS

Walter da Silva Santos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientadores:

Antonio Carlos Fontes dos Santos

Carlos Eduardo Aguiar

Rio de Janeiro  
Janeiro de 2011

# REFRAÇÃO, AS VELOCIDADES DA LUZ E METAMATERIAIS

Walter da Silva Santos

Orientadores:

Antonio Carlos Fontes dos Santos

Carlos Eduardo Aguiar

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Aprovada por:

---

Presidente, Prof. Antonio Carlos Fontes dos Santos

---

Prof. Vitorvani Soares

---

Prof. Alexandre Lopes de Oliveira

Rio de Janeiro  
Janeiro de 2011

## FICHA CATALOGRÁFICA

S237r Santos, Walter da Silva  
Refração, as velocidades da luz e metamateriais / Walter da Silva Santos - Rio de Janeiro: UFRJ / IF, 2010.  
ix, 110f.: il.;30cm.  
Orientadores: Antonio Carlos Fontes dos Santos, Carlos Eduardo Aguiar  
Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Física / Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2011.  
Referências Bibliográficas: f. 108-110.  
1. Ensino de Física. 2. Ótica. 3. Refração. I. Santos, Antonio Carlos Fontes dos. II. Aguiar, Carlos Eduardo. III. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física. IV. Refração, as velocidades da luz e metamateriais.

*À minha esposa, filhos, noras,  
genro e neta, dedico este trabalho por me  
ajudarem a formar o alicerce necessário,  
onde pude erguer o meu maior patrimônio  
– a Família.*

## **Agradecimentos**

Primeiramente a Deus, que me permite viver em um ambiente de paz, amor e saúde, cercado daqueles que constituem o meu maior patrimônio, a Família, sendo capaz de tomar decisões sensatas e equilibradas, mesmo diante de situações adversas.

À minha esposa Neisinha, amiga, cúmplice e colaboradora de todas as horas que, com sua capacidade de bom senso e paciência, me confortou e estimulou, me orientando nos momentos nos quais pensei em desistir, me fazendo acreditar neste trabalho.

Aos nossos filhos Raphael, Guilherme e Nathalia, que compreenderam a minha ausência em muitos momentos e que hoje compartilham e comemoram comigo o êxito do trabalho.

À minha neta Maria Eduarda (“Dudinha”), a quem agradeço os momentos de descontração que me propiciou ao longo dos últimos três anos, permitindo resgatar forças e ânimo para continuar o trabalho, e a quem devo mais dedicação e tempo.

Às minhas noras e genro, Adriana, Manoella e Daniel, que como meus “novos” filhos desempenharam bem a missão de me confortar e estimular na minha caminhada, enriquecendo ainda mais a minha família.

Aos amigos e professores, Antônio Carlos (Toni) como orientador e Carlos Eduardo como co-orientador, que com seus conselhos, ensinamentos, paciência e trocas de experiência, me permitiram trabalhar com a certeza de que estava no caminho certo, oferecendo oportunidades para o meu engrandecimento.

Aos professores da Universidade, que através de suas aulas me abriram horizontes nunca antes por mim vislumbrados, me fazendo acreditar.

E aos colegas de “turma”, que me permitiram compartilhar de momentos de muita alegria e descontração dividindo comigo as ocasiões de tensão e expectativa.

## RESUMO

### REFRAÇÃO, AS VELOCIDADES DA LUZ E METAMATERIAIS

Walter da Silva Santos

Orientadores:

Antonio Carlos Fontes dos Santos

Carlos Eduardo Aguiar

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

O estudo da Ótica Geométrica tem perdido espaço e importância no ensino médio brasileiro. Um dos motivos para tal desvalorização nos ambientes escolares é a idéia – falsa, mas muito difundida – de que a Ótica Geométrica é uma área esgotada, onde nada interessante acontece há mais de um século. Existem, entretanto, desenvolvimentos recentes e importantes nesse campo que podem ser compreendidos com conceitos familiares aos estudantes de ensino médio. Neste trabalho é apresentado um estudo sobre a refração, as várias velocidades da luz e materiais de índice de refração negativo.

Discutimos as diferentes definições que podem ser dadas à velocidade da luz em um meio dispersivo, um tema que raramente é tratado nos cursos introdutórios de Ótica. Abordamos também o conceito de impedância característica de um meio, uma grandeza que em muitas situações é tão importante quanto o índice de refração, pois regula a transmissão de energia entre dois meios. Apresentamos arranjos experimentais para as medidas das velocidades de fase, de grupo e de sinal em linhas de transmissão. No caso da velocidade de fase, o método é muito simples e pode ser adotado em escolas de ensino médio. Discutimos também o alargamento de um pulso após atravessar um meio dispersivo e um procedimento simples para medir a impedância de um cabo coaxial.

Finalmente, abordamos os metamateriais com índice de refração negativo. Apresentamos suas principais características e mostramos como elas podem ser estudadas em um ambiente de geometria dinâmica. Com isso investigamos uma variedade de efeitos surpreendentes criados pela refração negativa, como superlentes planas e antimatéria ótica.

Palavras-chave: ensino de Física, Ótica, refração

Rio de Janeiro  
Janeiro de 2011

# ABSTRACT

## REFRACTION, THE SPEEDS OF LIGHT AND METAMATERIALS

Walter da Silva Santos

Supervisors:

Antonio Carlos Fontes dos Santos

Carlos Eduardo Aguiar

Abstract of master's thesis submitted to Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, in partial fulfillment of the requirements for the degree Mestre em Ensino de Física.

The study of geometrical optics has been losing importance in the Brazilian high-school system. One reason for this is the widespread – and false – idea that geometrical optics is an area which lacks novelty and where nothing interesting has happened for more than a century. Notwithstanding, there are new significant advances in this field that can be easily understood with the concepts usually taught in elementary courses. In this work, we present a systematic study on refraction, the various velocities of light and materials with negative refractive index.

We discuss the many different definitions for the speed of light in a dispersive medium, a topic rarely presented in introductory optics courses. The important concept of characteristic impedance of a medium, a physical quantity of fundamental importance in energy transport, is also discussed. We present an experimental set-up for measurements of the phase velocity, group velocity, and signal velocity in transmission lines. In the case of phase velocity, the method is very simple and could be adopted in high-schools. We also discuss the broadening of a pulse after crossing a dispersive medium and a simple way for measuring the coaxial cable impedance.

Finally, we examine metamaterials with negative refraction. We present their main characteristics and study them in a dynamic geometry environment. This allows us to investigate various surprising effects of negative refraction, such as flat superlenses and optical antimatter.

Keywords: physics education, optics, refraction

Rio de Janeiro  
January, 2011

# Sumário

<b>CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação e Objetivos .....	1
1.2 Estrutura do Trabalho .....	2
1.2.1 História da refração.....	2
1.2.2 O índice de refração e as velocidades da luz.....	2
1.2.3 Impedância.....	3
1.2.4 Medidas de velocidade da luz em linhas de transmissão.....	3
1.2.5 Metamateriais e refração negativa .....	4
1.2.6 Refração negativa e geometria dinâmica.....	7
1.2.7 Material instrucional associado à dissertação .....	7
<b>CAPÍTULO 2 BREVE HISTÓRIA DA REFRAÇÃO.....</b>	<b>8</b>
2.1 Os Primeiros Registros – 600 A.C. até 0.....	8
2.2 Período de 0 até 800 D.C. ....	10
2.3 Período de 800 até 1600 .....	11
2.4 A Grande Evolução da Ótica – os Séculos XVII e XVIII.....	13
2.5 Século XIX e Início do Século XX .....	19
2.6 Os Séculos XX e XXI .....	24
<b>CAPÍTULO 3 O ÍNDICE DE REFRAÇÃO .....</b>	<b>25</b>
3.1 A Velocidade da Luz na Matéria.....	25
3.2 O Modelo de Lorentz .....	27
<b>CAPÍTULO 4 AS VELOCIDADES DA LUZ.....</b>	<b>34</b>
4.1 A Velocidade de Fase.....	34
4.2 A Velocidade de Grupo.....	36
4.3 A Velocidade de Frente.....	41
4.4 A Velocidade de Sinal.....	42
4.5 A Velocidade do Transporte de Energia .....	43
4.6 Mais Velocidades da Luz .....	44
<b>CAPÍTULO 5 IMPEDÂNCIA.....</b>	<b>45</b>
5.1 O que é Impedância? .....	45
5.2 O Cabo Coaxial .....	47
5.3 Reflexão de um Sinal .....	52
<b>CAPÍTULO 6 DA TEORIA À PRÁTICA .....</b>	<b>57</b>
6.1 Velocidade de Fase.....	57
6.2 Aparatos e Métodos.....	59
6.3 Velocidade de Grupo.....	61



6.4	Velocidade de Propagação do Sinal .....	64
6.5	Alargamento de um Pulso em um Meio Dispersivo .....	65
6.6	Casamento de Impedâncias .....	67
<b>CAPÍTULO 7 METAMATERIAIS E REFRAÇÃO NEGATIVA .....</b>		<b>70</b>
7.1	Classificando os Materiais Óticos .....	70
7.2	Metamateriais com Refração Negativa .....	73
7.3	Consequências da Refração Negativa .....	76
7.3.1	<i>Velocidade de fase negativa</i> .....	76
7.3.2	<i>Formação de imagens em um meio com índice de refração negativo</i> .....	77
7.3.3	<i>Lentes planas</i> .....	77
7.3.4	<i>Refração negativa na computação gráfica</i> .....	79
7.3.5	<i>Ampliação de objetos 'submersos'</i> .....	80
<b>CAPÍTULO 8 REFRAÇÃO NEGATIVA E GEOMETRIA DINÂMICA .....</b>		<b>85</b>
8.1	Perspectivas de Aplicação no Ensino Médio .....	85
8.2	Refração Negativa em uma Interface .....	86
8.3	A Superlente Plana .....	88
8.4	Refração Negativa por um Prisma .....	89
8.5	Antimatéria Ótica .....	90
<b>CAPÍTULO 9 CONCLUSÃO .....</b>		<b>93</b>
<b>ANEXO A - O ÍNDICE DE REFRAÇÃO COMPLEXO .....</b>		<b>95</b>
<b>ANEXO B - DISPERSÃO EM UM CABO COAXIAL .....</b>		<b>97</b>
<b>ANEXO C - AULA SOBRE METAMATERIAIS PARA O ENSINO MÉDIO.....</b>		<b>100</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>		<b>108</b>

# Capítulo 1 INTRODUÇÃO

---

## 1.1 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS

Ao longo dos anos, o estudo da Ótica Geométrica tem perdido espaço e importância no ensino médio brasileiro. Essa tendência é preocupante, pois, a nosso ver, a Ótica deveria ter posição de destaque nos cursos introdutórios de Física. Os princípios da Ótica tornam possível compreender uma grande variedade de fenômenos naturais e têm inúmeras aplicações práticas. Se os currículos escolares passarem a dar pouca ênfase à Ótica, o ensino de Física perderá um valioso ponto de contato com situações vividas cotidianamente pelos alunos. A Ótica Geométrica é, também, uma das áreas da Física onde os estudantes mais facilmente podem perceber como modelos matemáticos abstratos são aplicados à descrição de sistemas reais. A matemática é relativamente simples (um pouco de geometria), os conceitos e princípios básicos (raios, leis da reflexão e refração) são de fácil compreensão, e as aplicações são incontáveis.

Um dos motivos para a crescente “desvalorização” da Ótica nos ambientes escolares é a ideia – falsa, mas muito difundida – de que esta é uma área científica esgotada, onde nada interessante acontece há mais de um século. A Ótica teve enormes avanços no século XX – os lasers e a Ótica Quântica são apenas alguns exemplos – mas esses desenvolvimentos geralmente não chegam às salas de aula por utilizarem conceitos de difícil compreensão para a maioria dos estudantes.

Existem, entretanto, avanços recentes e importantes na Ótica que podem ser compreendidos com conceitos que já são familiares aos estudantes de ensino médio, como o de refração. Um exemplo é a criação de *metamateriais* com índice de refração negativo. Há também a *luz rápida* (“mais veloz” que a luz no vácuo) e a *luz lenta* (com velocidade de poucos metros por segundo), cuja produção em laboratório torna evidente que a velocidade da luz em um meio material pode ter muitos significados diferentes. Como veremos, esses desenvolvimentos podem ser facilmente incluídos nos cursos tradicionais de Ótica.

O objetivo desta dissertação é expor esses temas – refração negativa e as muitas velocidades da luz – de maneira acessível a professores de Física do ensino médio. Também discutimos uma grandeza pouco discutida em cursos introdutórios, a impedância ótica, e mostramos que em muitos casos ela é tão importante quanto o índice de refração. É nossa

intenção que o texto e o material instrucional que o acompanha tornem mais fácil a tarefa daqueles que desejam integrar esses tópicos atuais às suas aulas de Ótica.

## **1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO**

### **1.2.1 História da refração**

O capítulo 2 da dissertação é dedicado a uma breve história da refração e da velocidade da luz. Nele relacionamos os vários estudiosos que contribuíram para a evolução da Ótica e apresentamos suas ideias, hipóteses e conclusões. Através de “linhas do tempo” podemos perceber diversos períodos onde a Ótica progrediu de forma espantosa e, por outro lado, grandes intervalos de estagnação. Começamos com a enorme contribuição dos gregos e notamos como, após a queda do Império Romano, os avanços na Ótica (e outras ciências) transferiram-se para o mundo árabe. Com o Renascimento o ocidente volta a dominar a evolução da Ótica, e acompanhamos os grandes progressos realizados entre os séculos XVII e XIX. Vemos também que a história da Ótica, e da refração em particular, teve marcos importantes no século XX, como a criação de metamateriais com índice de refração negativo.

### **1.2.2 O índice de refração e as velocidades da luz**

O tema do capítulo 3 é o índice de refração. Mostramos como, na teoria de Maxwell, o índice de refração de um meio é determinado pela sua permissividade elétrica e permeabilidade magnética. Apresentamos o modelo de Lorentz para a permissividade elétrica, com o qual obtemos expressões simples para o índice de refração e sua dependência na frequência. Com esse modelo discutimos os efeitos de dispersão (normal e anômala) e absorção.

A dependência do índice de refração na frequência da luz tem algumas consequências surpreendentes, como velocidades de propagação superiores à velocidade da luz no vácuo, o que aparentemente contradiz a teoria da relatividade. No capítulo 4 abordamos a solução dessa dificuldade, apresentando algumas das muitas definições que podem ser dadas à velocidade da luz em um meio dispersivo. Discutimos em detalhe a velocidade de fase, de grupo, de frente, de sinal, e de transporte de energia. Mostramos que apenas uma delas, a

velocidade de frente, não pode ser superior a  $c$  – todas as outras podem ultrapassar esse limite sem entrar em conflito com a teoria da relatividade.

As muitas velocidades que podem caracterizar a propagação da luz em um meio material raramente são discutidas nos cursos introdutórios de Ótica. Quase sempre é estudada apenas a velocidade de fase. Isso costuma criar uma série de dificuldades e erros. Por exemplo, muitos livros texto afirmam que o índice de refração não pode ser inferior a 1, pois isso levaria a velocidades de propagação superiores à da luz no vácuo, em contradição com a relatividade. Os autores desses textos parecem não perceber que índices de refração menores que 1 são corriqueiros na natureza, e que outras velocidades de propagação além da velocidade de fase devem ser consideradas quando se discute possíveis conflitos com a teoria da relatividade.

### **1.2.3 Impedância**

O capítulo 5 aborda um conceito que não é comentado no ensino médio, a impedância. Nada impede que seja comentado neste nível de ensino, desde que o tratamento conceitual seja feito de forma gradual. Procurando uma linguagem acessível, vários exemplos são citados para ilustrar as ideias de impedância e de casamento de impedâncias. Aproveitamos o capítulo para discutir uma linha de transmissão de sinais eletromagnéticos, o cabo coaxial. Calculamos a impedância desses cabos e a velocidade com que as ondas eletromagnéticas se propagam através deles.

### **1.2.4 Medidas de velocidade da luz em linhas de transmissão**

No capítulo 6 é apresentado um procedimento para a medida da velocidade de fase de ondas eletromagnéticas em cabos coaxiais. O método é muito simples e pode ser adotado mesmo em escolas de ensino médio. Entretanto, ele envolve detalhes experimentais que devem ser tratados com cuidado, como o casamento de impedâncias e a escolha do comprimento do cabo coaxial e da faixa de frequências a ser utilizada. O experimento ilustra claramente o conceito de velocidade de fase e permite sua mensuração com boa precisão.

Também são descritos procedimentos experimentais para as medidas das velocidades de grupo e de sinal das ondas eletromagnéticas em um cabo coaxial. Discute-se e mede-se o

alargamento de um pulso eletromagnético após atravessar um meio dispersivo. Finalmente, um método simples para a medida da impedância em uma linha de transmissão é apresentado.

### **1.2.5 Metamateriais e refração negativa**

Metamateriais com índice de refração negativo são tratados no capítulo 7. Esses materiais artificiais abriram uma nova fronteira na Ótica e são objeto de intensa pesquisa atual, com aplicações que podem revolucionar diversas áreas tecnológicas. Não há na natureza materiais com índice de refração negativo, embora nenhuma lei física impeça sua existência [Veselago 1968]. Essa limitação foi superada com os metamateriais. Como o nome indica, metamateriais não são substâncias comuns – são obras de microengenharia, estruturas periódicas formadas pelo arranjo regular de minúsculos componentes. Radiação eletromagnética de grande comprimento de onda (muito maior que o tamanho dos componentes) propaga-se por um metamaterial como se ele fosse um meio homogêneo, dotado de índice de refração. Escolhendo apropriadamente as propriedades eletromagnéticas dos componentes elementares é possível obter os mais diferentes índices de refração, inclusive valores negativos. Metamateriais com índice de refração negativo foram produzidos pela primeira vez em 2000 [Smith 2000, Shelby 2001] e deram origem a uma grande atividade experimental e teórica. É possível, por exemplo, usar esses materiais para desenvolver “superlentes” muito superiores às lentes tradicionais [Pendry 2006]. Uma aplicação ainda mais intrigante são os “mantos de invisibilidade”, metamateriais com geometria e índice de refração projetados para tornar invisíveis certas regiões do espaço [Pinheiro 2009].

As extraordinárias propriedades óticas de meios com índice de refração negativo podem ser exploradas mesmo em cursos introdutórios de Ótica Geométrica. Não é necessário introduzir conceitos radicalmente novos, apenas estender o que já é normalmente abordado: refração e a lei de Snell. Talvez por isso a refração negativa já tenha sido tema de exames vestibulares e do próprio Exame Nacional de Ensino Médio, como podemos ver nas figuras 1.1 e 1.2.

### Questão 81

Um grupo de cientistas liderado por pesquisadores do Instituto de Tecnologia da Califórnia (Caltech), nos Estados Unidos, construiu o primeiro metamaterial que apresenta valor negativo do índice de refração relativo para a luz visível. Denomina-se metamaterial um material óptico artificial, tridimensional, formado por pequenas estruturas menores do que o comprimento de onda da luz, o que lhe dá propriedades e comportamentos que não são encontrados em materiais naturais. Esse material tem sido chamado de "canhoto".

Disponível em: <http://www.inovacaotecnologica.com.br>. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

Considerando o comportamento atípico desse metamaterial, qual é a figura que representa a refração da luz ao passar do ar para esse meio?

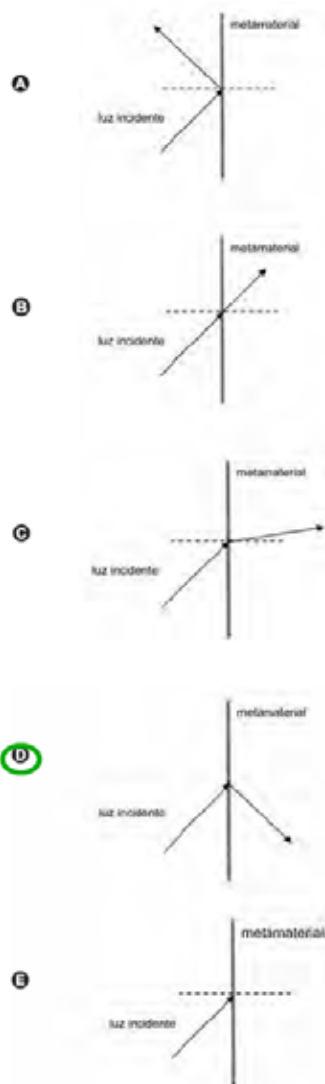


Figura 1.1: Questão do ENEM-2010 sobre refração negativa.



12. Há atualmente um grande interesse no desenvolvimento de materiais artificiais, conhecidos como metamateriais, que têm propriedades físicas não convencionais. Este é o caso de metamateriais que apresentam índice de refração negativo, em contraste com materiais convencionais que têm índice de refração positivo. Essa propriedade não usual pode ser aplicada na camuflagem de objetos e no desenvolvimento de lentes especiais.

a) Na figura no espaço de resposta é representado um raio de luz  $A$  que se propaga em um material convencional (Meio 1) com índice de refração  $n_1 = 1,8$  e incide no Meio 2 formando um ângulo  $\theta_1 = 30^\circ$  com a normal. Um dos raios  $B$ ,  $C$ ,  $D$  ou  $E$  apresenta uma trajetória que não seria possível em um material convencional e que ocorre quando o Meio 2 é um metamaterial com índice de refração negativo. Identifique este raio e calcule o módulo do índice de refração do Meio 2,  $n_2$ , neste caso, utilizando a lei de Snell na forma:  $|n_1| \sin \theta_1 = |n_2| \sin \theta_2$ . Se necessário use  $\sqrt{2} = 1,4$  e  $\sqrt{3} = 1,7$ .

b) O índice de refração de um meio material,  $n$ , é definido pela razão entre as velocidades da luz no vácuo e no meio. A velocidade da luz em um material é dada por  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ , em que  $\epsilon$  é a permissividade elétrica e  $\mu$  é a permeabilidade magnética do material. Calcule o índice de refração de um material que tenha  $\epsilon = 2,0 \times 10^{-11} \frac{C^2}{Nm^2}$  e  $\mu = 1,25 \times 10^{-6} \frac{Ns^2}{C^2}$ . A velocidade da luz no vácuo é  $c = 3,0 \times 10^8$  m/s.

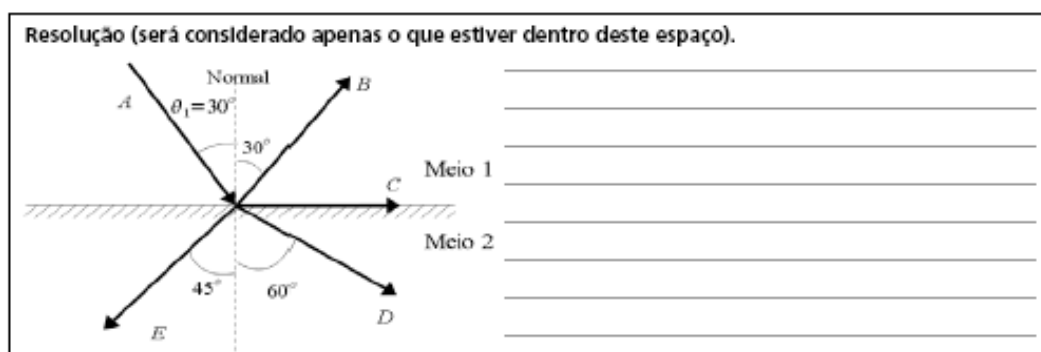


Figura 1.2: Questão sobre refração negativa no vestibular de 2010 da Unicamp.

Apenas para registro, o enunciado da questão do ENEM-2010 menciona a construção no Caltech (EUA) do “primeiro metamaterial que apresenta valor negativo do índice de refração relativo para a luz visível”. Na verdade, o que foi “produzido” no Caltech foi um cálculo matemático mostrando a viabilidade de se obter refração negativa em certo tipo de metamaterial [Burgos 2010].

De qualquer forma, com ou sem questões em exames nacionais e vestibulares prestigiosos, a refração negativa pode representar um acréscimo enriquecedor aos cursos tradicionais de Ótica.

## 1.2.6 Refração negativa e geometria dinâmica

No capítulo 8 mostramos como a refração negativa pode ser estudada em um ambiente de geometria dinâmica. Os programas de geometria dinâmica são muito utilizados pelos professores de matemática no ensino de geometria plana. Eles permitem criar modelos de sistemas óticos – com índice de refração positivo ou negativo – produzindo construções de grande apelo intuitivo que podem ser exploradas e modificadas com simples movimentos do mouse do computador. Utilizando a geometria dinâmica investigamos uma variedade de efeitos surpreendentes criados pela refração negativa, como a ‘altura aparente’, a lente plana e a ‘antimatéria ótica’.

## 1.2.7 Material instrucional associado à dissertação

Durante a elaboração desta dissertação foram produzidos vários materiais de apoio instrucional sobre refração negativa e as várias velocidades da luz:

- Um roteiro para uma aula de ensino médio sobre metamateriais e refração negativa, disponível no Anexo C.
- Animações sobre velocidade de fase e velocidade de grupo, incluindo efeitos de velocidade de grupo negativa, disponíveis em [http://www.if.ufrj.br/~pef/producao\\_academica/producao\\_academica.html](http://www.if.ufrj.br/~pef/producao_academica/producao_academica.html)
- Um ‘ensaio ativo’ (texto com figuras interativas) sobre sistemas óticos com refração negativa. As figuras interativas são *applets* Java construídos com um programa de geometria dinâmica, o *Tabulae*. O texto pode ser encontrado em [http://www.if.ufrj.br/~pef/producao\\_academica/producao\\_academica.html](http://www.if.ufrj.br/~pef/producao_academica/producao_academica.html)



## Capítulo 2 BREVE HISTÓRIA DA REFRAÇÃO

---

### 2.1 OS PRIMEIROS REGISTROS – 600 A.C. ATÉ 0

Não há registro escrito do uso de lentes ou instrumentos óticos na antiga Grécia. Existem, no entanto, imagens com pessoas usando o que aparenta ser uma luneta. No Peru, foram encontradas peças antigas que continham imagens do que parece ser um homem observando um cometa com um telescópio (figura 2.1).



Figura 2.1: Peça encontrada no Peru, mostrando um cometa sendo observado com um telescópio.

No intervalo de 570 a.C. a 322 a.C., filósofos como Pitágoras, Empédocles, Demócrito, Platão (que já mencionava no escrito “República” o quebrar aparente de objetos parcialmente imersos na água), Aristóteles e outros mostraram interesse em desvendar a natureza da luz. Na sua peça cômica “As Nuvens”, em 424 a.C., Aristófanes (447 a.C.–385 a.C.) se referiu ao “vidro ardente”, ou seja, à lente convergente. Um pequeno trecho da peça é:

“Strepsiades – Você já viu uma bela pedra transparente nos farmacêuticos, com a qual se pode acender o fogo?”

Sócrates – Você quer dizer uma lente de cristal?

Strepsiades – Isto! Bem, se eu me colocar com a pedra ao sol... eu poderia fazer toda a cera derreter.”

No seu livro “Catóptrica”, Euclides (360 a.C.–295 a.C.) enunciava a “propagação retilínea” assim como a “Lei da Reflexão”. No seu estudo sobre Ótica, Euclides elabora um conjunto de axiomas, alguns dos quais são destacados a seguir:

- Linhas (ou raios visuais) podem ser desenhadas como uma reta ao objeto;
- Os objetos nos quais as linhas caem são vistos;
- Os objetos vistos sob um ângulo maior parecem maiores;

- Objetos vistos por vários ângulos parecem mais claros.

Nota-se que Euclides discutiu os efeitos de perspectiva dos objetos usando princípios geométricos, sem definir a natureza física destes raios visuais.

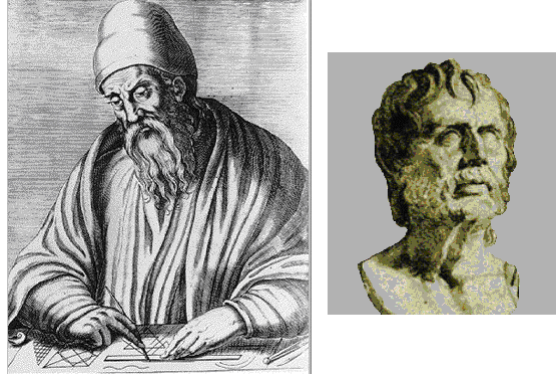


Figura 2.2: Euclides e Lucrécio.

Uma visão corpuscular da natureza da luz é encontrada em Lucrécio (99 a.C.–55 a.C.), um romano que, em “De Rerum Natura”, apresenta a teoria de que a luz visível é composta de pequenas partículas. Em suas palavras:

“...a luz e o calor do Sol, são compostos de pequenos átomos os quais, quando emanados, não perdem tempo em atravessar o espaço interno de ar na direção imposta pelo emanador.”

Uma “linha do tempo” acompanhando a vida dos pensadores antigos que estudaram a Ótica ou referiram-se a ela em suas obras está mostrada na figura 2.3.

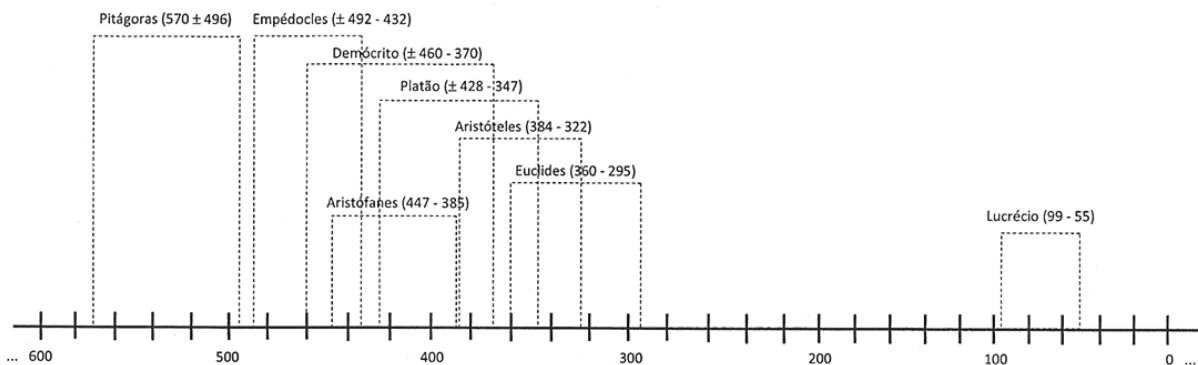


Figura 2.3: Pensadores que estudaram ou referiram-se a fenômenos óticos entre 600 a.C. e o ano 0.

## 2.2 PERÍODO DE 0 ATÉ 800 D.C.

Tentando explicar a propagação retilínea da luz e a Lei da Reflexão, Hierão (ou Heron ou Hero) de Alexandria (10 d.C.–75 d.C.) afirmou que a luz percorria sempre o caminho mais curto possível entre dois pontos. Com isso demonstrou que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. Considerava que a luz *emanava dos olhos* e se refletia com grande velocidade. A abordagem dos gregos era mais focada na discussão geométrica dos fenômenos óticos, e não em seus aspectos físicos. A idéia de Lucrécio, apesar de muito mais realista, deixou de ser aceita depois da proposta de Hierão.



Figura 2.4: Hierão de Alexandria.

Encontradas em ruínas romanas e relatadas pelo historiador Plínio (23 d.C.–79 d.C.), esferas de vidro de cristal eram, provavelmente, utilizadas para acender fogo. Segundo o filósofo romano Sêneca (3 d.C.–65 d.C.), globos de vidro repletos de água eram utilizados como instrumentos de ampliação, certamente por artesãos, para facilitar trabalhos minuciosos.



Figura 2.5: Sêneca e Ptolomeu.

Cerca de 1 século depois de Hierão e Sêneca, em Alexandria, Cláudio Ptolomeu (90 d.C.–168 d.C.) realizou os primeiros estudos sistemáticos da refração, dando seqüência ao

trabalho iniciado por Cleomedes em torno de 50 d.C. Ptolomeu construiu tabelas com ângulos de incidência e refração, e seus registros são, provavelmente, os dados experimentais mais antigos de que se tem conhecimento.

Após Ptolomeu, o estudo da Ótica permaneceu estagnado por mais de seis séculos, como mostra a linha do tempo na figura 2.6.

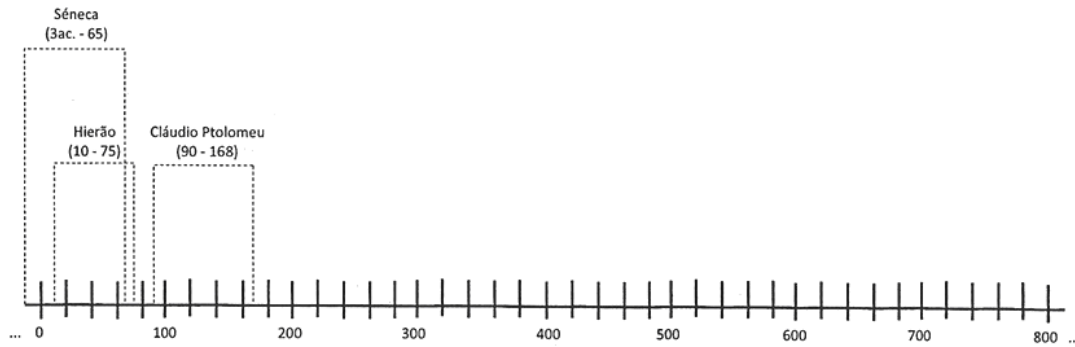


Figura 2.6: Estudiosos da Ótica de 0 até 800 d. C.

### 2.3 PERÍODO DE 800 ATÉ 1600

Com a desintegração do Império Romano em 475 d.C., e o início das conquistas árabes em 622 d.C., houve uma desaceleração no progresso científico na Europa. Os tesouros científicos e filosóficos da antiguidade foram preservados no mundo árabe, para onde o centro cultural se deslocou. Especificamente a Ótica ficou estagnada por quase sete séculos, do Séc. II ao Séc. IX, quando surge Al-Kindi (801-873). Este influenciou futuros autores, como Robert Grosseteste (1175-1253) e Roger Bacon (1215-1294), com seu trabalho “De Radiis Stellarum”, onde afirmava que “... tudo no mundo...emite raios em todas as direções, que preenchem o mundo.”



Figura 2.7: Al-Kindi e Alhazen.

Mas foi Alhazen (965-1040) quem aperfeiçoou a Lei da Reflexão, concluindo que as direções da incidência e da reflexão pertencem ao mesmo plano normal à superfície. Alhazen estudou ainda os espelhos esféricos e parabólicos e é considerado o “pai da Ótica Geométrica”. Entre os achados de Alhazen, destaca-se sua insistência em afirmar que a visão é devida aos raios luminosos entrarem no olho, e não por emanções do olho, contrariando as ideias de Hierão. Ele descreveu a natureza física dos raios como formas de luz e cor e desenvolveu a câmara escura, onde os raios passavam por um pequeno orifício com trajetórias retilíneas.

Dois adeptos das ideias de Alhazen foram Ibn Sina (Avicena) (980-1037) e Abu Rayhan al-Biruni (973-1048). O primeiro observou que: “...se a percepção da luz é devido à emissão de algum tipo de partícula por uma fonte luminosa, a *velocidade da luz deve ser finita*”. Abu Rayhan também concordava com a velocidade finita da luz e foi o primeiro a descobrir que sua velocidade era superior à do som.



Figura 2.8: Ibn Sina ( Avicena ) e Abu Rayhan al-Biruni

Após um intervalo de cerca de 150 anos, o bispo inglês Robert Grossteste retomou o estudo da Ótica. Alhazen exerceu grande influência nos trabalhos de Grossteste e, posteriormente, nos de Roger Bacon, considerado o primeiro cientista no sentido moderno. Bacon sugeriu que a composição de lentes poderia ser usada para a construção de um telescópio, além da sua utilização na correção dos defeitos de visão. Ele também conseguiu traçar geometricamente a trajetória de raios ao atravessarem uma lente.



Figura 2.9: Robert Grossteste e Roger Bacon.

A explicação do arco-íris data dessa época, final do século XIII e início do século XIV, com Qutb al-Din Shirazi (1236-1311) e seu aluno Kamal al-Din al-Farisi (1260–1320). Com a morte de Roger Bacon no final do século XIII, houve uma nova estagnação na Ótica por quase 250 anos, quando questões envolvendo múltiplos espelhos e combinações de lentes convergentes e divergentes foram abordadas na obra “Magia Naturalis” de Giovanni Della Porta. Taqi al-Din (1526–1585) finalizou a contribuição árabe para a Ótica com o trabalho “Livro da Luz do Estudante de Visão e Luz da Verdade da Visão” (*Kitab Nūr hadaqqat al-ibsār wa-nūr haqīqat al-anzār*), distribuído em três volumes contendo estudos experimentais sobre a visão, reflexão e refração da luz.

A cronologia do período de 800 a 1600 está mostrada na figura 2.10.

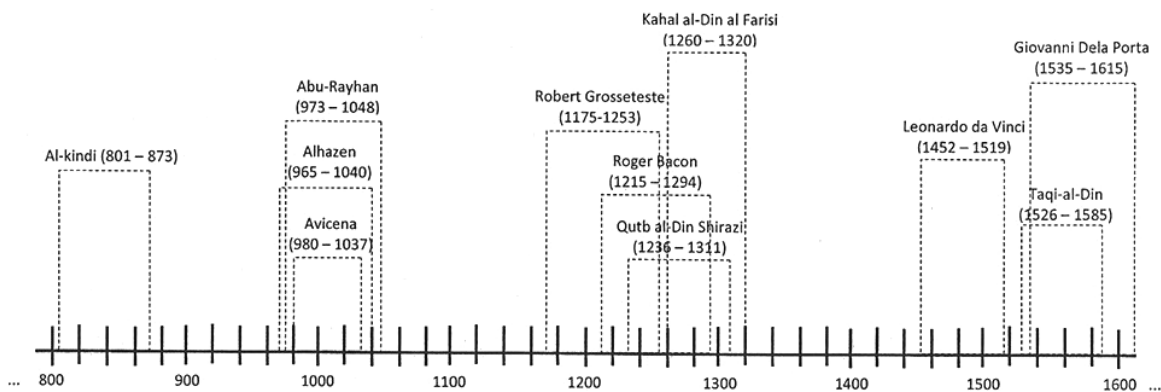


Figura 2.10: Estudiosos da Ótica de 800 até 1600.

## 2.4 A GRANDE EVOLUÇÃO DA ÓTICA – OS SÉCULOS XVII E XVIII

O período compreendido entre o início do século XVII e o final do século XVIII foi muito rico para a Ótica. Datam dessa época a invenção do telescópio, o melhor entendimento da refração, as primeiras observações da difração e os passos iniciais em direção à teoria ondulatória da luz.

Não há um marco bem definido para a invenção do telescópio, no entanto existe um registro de pedido de patente feito em 2 de outubro de 1608 na cidade de Haia por Hans Lippershey (1587–1619), oculista holandês. Mesmo sem um inventor bem definido para o telescópio, a origem da palavra é conhecida e se deve à Federico Cesi, fundador da *Accademia dei Lincei*, que pediu ao estudioso grego Demiscianus um nome para o instrumento: o resultado foi a união das palavras *tele* (longe) e *skopeuein* (ver). Em Pádua,

tendo escutado falar da invenção, Galileu Galilei (1564-1642) construiu seu próprio telescópio, polindo ele mesmo as lentes.



*Figura 2.11: Hans Lippershey e Galileu Galilei.*

Na mesma época, surge o microscópio composto, inventado pelo holandês Zacharias Janssen (1588–1632). Coube a Francisco Fontana (1580–1656) propor a substituição da lente objetiva côncava desses instrumentos por uma convexa. Na mesma linha, Johannes Kepler (1571–1630) descreve detalhadamente em seu livro “Dioptrice”, lançado em 1611, o funcionamento dos telescópios kepleriano, de ocular positiva, e galileano, de ocular negativa. Kepler descobriu também a reflexão total, além da relação de proporcionalidade entre pequenos ângulos de incidência e refração.



*Figura 2.12: Johannes Kepler e o Telescópio.*

Após séculos de investigações, observações e especulações, o comportamento dos raios luminosos ao atravessarem a superfície de separação de dois meios foi finalmente descrito com exatidão por Willebrord Snell (1591–1626), professor em Leyden, que descobriu experimentalmente em 1621 a Lei da Refração (Lei de Snell). Foi um enorme passo que abriu caminho para inúmeros desenvolvimentos e aplicações da Ótica.



Figura 2.13: Willebrord Snell.

No entanto, a formulação da Lei de Snell hoje conhecida, em função dos senos dos ângulos de incidência e refração, deve-se a René Descartes (1596–1650). Este considerava a luz como uma transmissão de pressão através de um meio elástico, que descreve em 1637 na sua obra “La Dioptrique”: “...a luz ... não é mais do que um certo movimento ou ação, no seio de uma matéria muito sutil que preenche os poros de todos os corpos...”.



Figura 2.14: René Descartes e o esquema de olho humano proposto por ele.

Paralelamente, Pierre de Fermat (1601–1665), partindo do princípio de Hierão, que afirmava que a luz percorria sempre o menor caminho possível entre dois pontos, deduziu em 1657 a lei da refração, baseado no seu *princípio do tempo mínimo*. Fermat afirmou que a luz escolhe o caminho entre dois pontos de tal forma que o percurso é feito no menor tempo possível, mesmo que para tal tenha que se desviar do caminho mais curto.

A difração, propriedade que a luz tem de “contornar” obstáculos, foi observada pela primeira vez no Colégio dos Jesuítas, em Bolonha, por Francesco Maria Grimaldi (1618–1663), que notou que a luz conseguia penetrar na região de sombra de uma haste colocada diante de uma fonte de luz.





Figura 2.15: Pierre de Fermat e Robert Hooke.

Na mesma época, Robert Hooke (1635–1703), em Londres, também observava o fenômeno da difração. Hooke foi o pioneiro no estudo dos padrões coloridos de interferência através de películas delgadas (1665), concluindo corretamente que sua origem era a interação da luz refletida nas superfícies frontal e posterior da película, e propôs que a luz fosse associada a rápidos movimentos oscilatórios do meio. Grimaldi e Hooke estabeleceram a base para a teoria ondulatória da luz.

Um dos maiores físicos a investigar a Ótica, Isaac Newton (1642–1727) evitava hipóteses especulativas, baseando-se em resultados que eram frutos de observações diretas dos eventos. Como consequência, na Ótica, assumia uma posição ambígua quanto à natureza da luz. Newton rejeitou a hipótese ondulatória que, segundo sua própria afirmação, conflitava com a propagação retilínea da luz já que uma onda se propagaria em todas as direções. Por outro lado, Newton dizia que os corpúsculos luminosos “pulsavam” com vibrações características, que seriam mais longas na luz vermelha e mais curtas na luz violeta



Figura 2.16: Isaac Newton e o espectro da luz.

Em torno de 1665, aos 23 anos, Newton iniciou o estudo de dispersão da luz branca. Conforme seu relato: “Consegui um prisma triangular de vidro para, com ele, aceder aos célebres fenômenos cromáticos.” Newton concluiu que a luz branca devia ser composta de várias cores independentes.

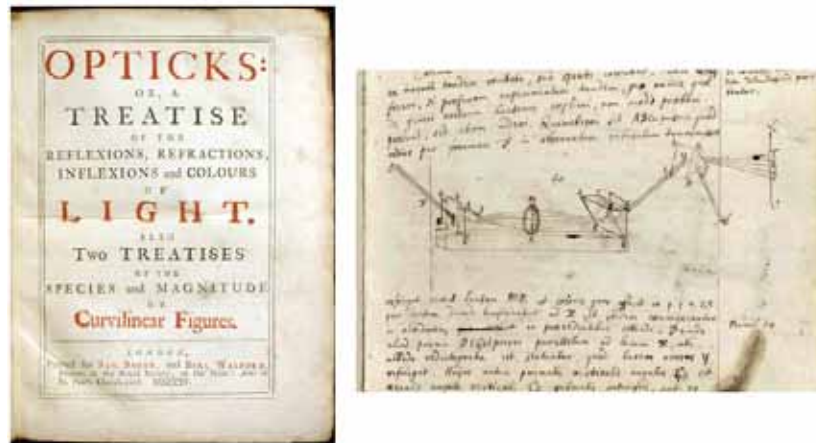


Figura 2.17: Capa do livro *Opticks* e um manuscrito de Newton.

Em 1704 Newton publicou o livro “Opticks” que, em três volumes, discutia diversos fenômenos, entre eles a decomposição da luz branca por prismas e os anéis coloridos em filmes finos, os “anéis de Newton”, um efeito de interferência ondulatória. Apesar de seu trabalho tender para a simultaneidade das teorias ondulatória e corpuscular da luz, Newton não aceitava qualquer tipo de concepção ondulatória afirmando que, dependendo da espessura do filme e do estado em que se encontrassem os raios de luz, eles seriam transmitidos ou refletidos, ocasionando os vários anéis coloridos.

Enquanto Newton defendia a teoria corpuscular da luz, Christiaan Huygens (1629-1695) difundia a sua “natureza ondulatória”. Baseado na teoria ondulatória, Huygens explicou a reflexão, a refração e descobriu o fenômeno da polarização observando a birrefringência da luz em cristais de calcita. Nas suas palavras: “Assim como há duas refrações distintas, parece-me que devem também existir duas emanações das ondas de luz”. Huygens concluiu que a luz diminuía a sua velocidade ao passar para meios mais densos, mas independentemente da sua natureza corpuscular ou ondulatória, essa velocidade de propagação sempre seria muito elevada, propagando-se quase instantaneamente.



Figura 2.18: Christiaan Huygens.

A velocidade da luz foi medida pela primeira vez pelo dinamarquês Ole Christensen Römer (1644–1710). Observando Io, a lua mais próxima de Júpiter, Römer foi capaz de determinar que a luz leva cerca de 22 minutos para atravessar o diâmetro da órbita da Terra em torno do Sol. Com isso ele encontrou para a velocidade da luz um valor de cerca de  $2 \times 10^8$  m/s.



Figura 2.19: Ole Christensen Römer.

Apesar da aprovação de Newton e Huygens, o resultado de Römer demorou a ser completamente aceito. Isso só ocorreu quando, em Oxford, o astrônomo James Bradley (1693–1762) descobriu a “aberração estelar”. Bradley observou que as estrelas fixas possuem um movimento sistemático aparente que é função do movimento da Terra. Esse efeito, a aberração estelar, é análogo ao que ocorre com uma gota de chuva que cai verticalmente para um observador fixo ao solo, mas que um observador em movimento vê cair com um ângulo diferente de  $90^\circ$  em relação ao chão.

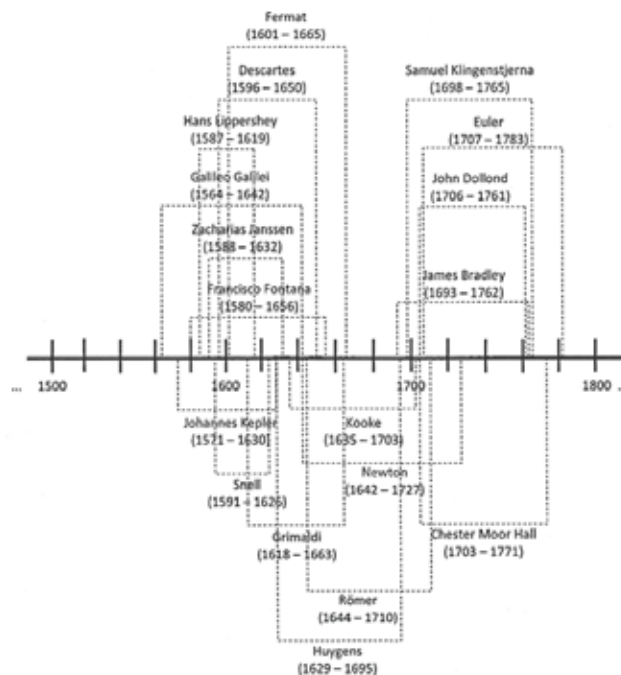


Figura 2.20: Estudiosos da Ótica nos séculos XVII e XVIII.

Os períodos em que viveram os principais personagens mencionados nesta seção estão mostrados na linha do tempo da figura 2.20.

## 2.5 SÉCULO XIX E INÍCIO DO SÉCULO XX

O início do século XIX foi marcado pela consolidação da teoria ondulatória da luz com os trabalhos de Thomas Young (1773–1829). Este tornou-se uma das grandes figuras do século quando, por três anos consecutivos, de 1801 à 1803, apresentou à Royal Society sua defesa ao chamado “princípio de interferência”:

“Quando duas ondulações, com origens diferentes, se propagam exata ou muito aproximadamente ao longo da mesma direção, o seu efeito conjunto é uma combinação dos movimentos de cada uma”.



Figura 2.21: Thomas Young e Augustin Jean Fresnel.

Augustin Jean Fresnel (1788–1827), nascido em Broglie, unificou os conceitos de Huygens ao princípio de interferência, afirmando que sucessivas ondas esféricas secundárias podem moldar uma onda primária. Ao tomar conhecimento que seu trabalho já tinha sido desenvolvido 13 anos antes por Young, Fresnel lhe escreveu se dizendo desapontado, porém “...consolado por se encontrar em tão boa companhia.”. Na época, Fresnel supunha que as ondas luminosas eram longitudinais, assim como as ondas sonoras no ar e, nas suas palavras:

“As vibrações de uma onda luminosa em qualquer ponto podem ser consideradas como a soma dos movimentos elementares que lhe são transmitidos no mesmo instante, em virtude da ação independente de todas as partes da onda não obstruída, em qualquer uma das suas posições anteriores.”

A polarização da luz, que já tinha sido notada por Huygens e Newton (que escreveu “*cada raio de luz tem, assim, dois lados opostos*”), recebeu atenção renovada quando o engenheiro francês Etienne Louis Malus (1775–1812), em 1808, observou, através de um cristal de calcita, a luz do Sol refletida nas janelas do Palácio de Luxemburgo, em Paris. Ele percebeu que a dupla lateralidade (polarização) era também aparente nos fenômenos de reflexão. Coube ao escocês David Brewster (1781–1868), inventor do caleidoscópio, a formulação quantitativa do efeito observado por Malus. Na lei que leva seu nome, Brewster dizia que: “*Ao incidir um raio de luz sobre a superfície de separação de dois meios óticos, os raios refletido e refratado sofrem polarização máxima quando o ângulo de incidência é tal que as direções de propagação desses raios são perpendiculares*”.



Figura 2.22: Etienne Louis Malus e David Brewster.

Para determinar os efeitos da polarização na interferência da luz, Dominique François Arago (1786–1853) e Fresnel realizaram uma série de experimentos que, interpretados por Young, levaram à conclusão que a luz é uma vibração *transversal* e não longitudinal como se acreditava. Ou seja, a dupla lateralidade era fruto de duas vibrações ortogonais entre si e perpendiculares à direção de propagação. Fresnel estudou a mecânica dessas vibrações, o que o levou às famosas equações para as amplitudes refletida e refratada.

Várias tentativas para se determinar a velocidade da luz foram realizadas ao longo do século XIX. Em 1849, Armand Hippolyte Louis Fizeau (1819–1896) conseguiu, pela primeira vez, medir a velocidade da luz na Terra. Seu dispositivo consistia de uma roda dentada e um espelho localizado a 8633 metros de distância. Passando por uma abertura da roda, um impulso luminoso atingia o espelho e retornava. Com a velocidade da roda ajustada, o impulso refletido podia passar através de uma das fendas possibilitando a medida da velocidade da luz. O valor encontrado por Fizeau foi de 315.300 km/s.

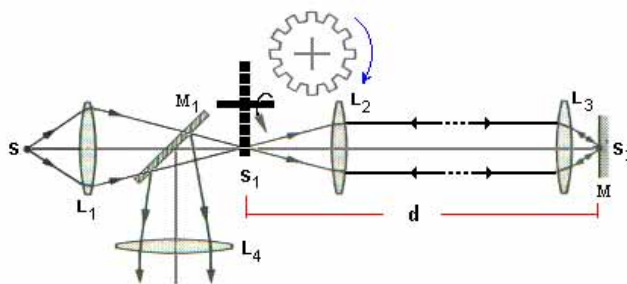


Figura 2.23: Armand Fizeau e sua experiência para determinar a velocidade da luz.

Outro cientista comprometido com a determinação da velocidade da luz foi Jean Bernard Leon Foucault (1819–1868), que em 6 de maio de 1850 anunciou na Academia de Ciências que a velocidade da luz na água era menor do que no ar. Este trabalho constituiu mais tarde sua tese de doutorado e foi um golpe direto na formulação newtoniana da teoria corpuscular, que na época já tinha poucos seguidores.



Figura 2.24: Jean Bernard Foucault.

Michael Faraday (1791–1867), em 1845, estabeleceu uma relação entre o Magnetismo e a Ótica ao descobrir que um forte campo magnético alterava a direção de polarização de um feixe luminoso.

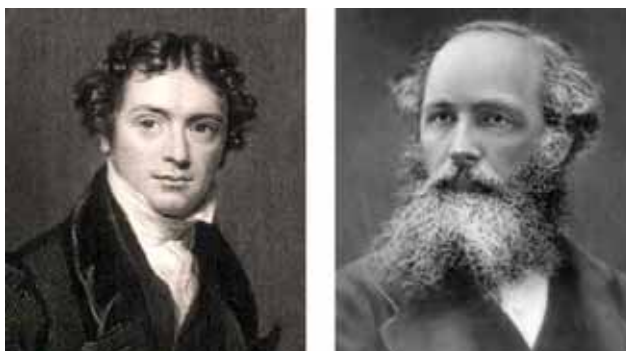


Figura 2.25: Michael Faraday e James Clerk Maxwell.

Em 1865, James Clerk Maxwell (1831–1879) criou um conjunto de equações unificando os fenômenos elétricos e magnéticos, com as quais demonstrou teoricamente que um campo eletromagnético consegue propagar-se como uma onda transversal. Ele conseguiu calcular a velocidade de propagação dessa onda eletromagnética, obtendo um resultado que coincidia com o valor experimental da velocidade da luz. Maxwell concluiu que

“A luz é uma perturbação eletromagnética que, sob a forma de ondas, se propaga no éter.”

Em 1888, Heinrich Rudolf Hertz (1857–1894), produziu e detectou experimentalmente ondas eletromagnéticas, confirmando a previsão de Maxwell.

Para Maxwell e outros de sua época, parecia óbvio que ondas só poderiam se propagar tendo um meio que lhes servisse de suporte. No caso das ondas eletromagnéticas, esse meio seria o “éter”. Mas qual seria sua natureza? Acreditava-se que o éter deveria ser tênue, para não perturbar o movimento dos corpos celestes. Por outro lado, ele deveria ser capaz de suportar oscilações de altas frequências, como a da luz visível, o que só seria possível se forças restauradoras muito altas agissem em seu interior.

Atendendo uma sugestão de Maxwell, em 1879, Albert Abraham Michelson (1852–1931) tentou medir a velocidade da Terra em relação ao éter. Ele publicou seus resultados em 1881, concluindo que “...*não detectava qualquer movimento da Terra em relação ao éter – o éter estava em repouso*”. Alguns anos mais tarde, Michelson juntou-se a Edward Williams Morley (1838–1923), e os dois refizeram a experiência com maior precisão. Seus resultados foram publicados em 1887, e indicavam que “... é razoavelmente certo que, se a Terra se deslocar relativamente ao éter, então este movimento tem de ser muito reduzido”.

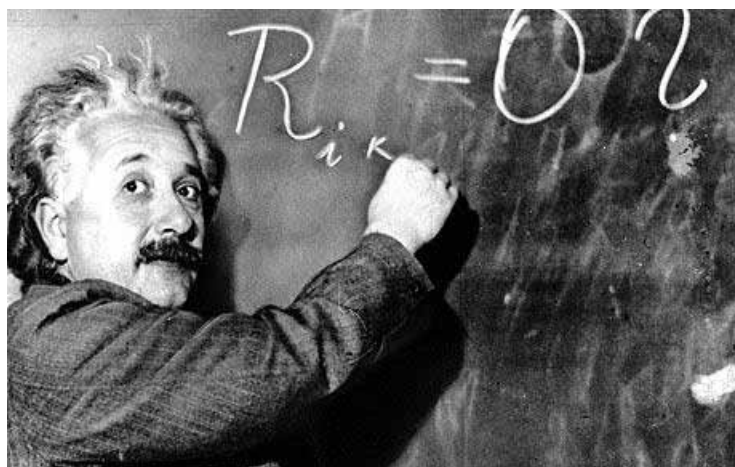


Figura 2.26: Albert Einstein.

Em 1905, Albert Einstein (1879–1955) deu uma explicação revolucionária para o fato da Terra parecer estar sempre em repouso em relação ao éter. Em sua teoria da relatividade especial, Einstein descartou a idéia do éter afirmando que

“A introdução de um éter será supérflua, uma vez que o ponto de vista aqui desenvolvido não requer um espaço em repouso absoluto.”

e postulou que

“A luz se propaga no vácuo com uma velocidade bem definida  $c$ , independente do estado de movimento do emissor.”

No mesmo ano de 1905 Einstein iniciou outra revolução envolvendo a luz, ao propor que a energia luminosa está concentrada em partículas (mais tarde chamadas de fótons). O comportamento corpuscular da luz foi comprovado experimentalmente pelas medidas de Robert Millikan (1868–1953) sobre o efeito fotoelétrico, realizadas em 1919, e pela observação por Arthur H. Compton (1892–1962) do espalhamento de fótons por elétrons em 1923. Os aspectos ondulatórios e corpusculares da luz só encontraram uma descrição única e coerente com o desenvolvimento da mecânica quântica. Esta, por sua vez, abriu novas áreas de atividade na Ótica, com os *Lasers* e a *Ótica Quântica*. Esses temas dominaram a Ótica no século XX (principalmente em sua última metade), mas não trataremos deles em nossa história, voltada essencialmente à refração e à velocidade da luz. Uma linha do tempo com os estudiosos da Ótica que viveram no século XIX está mostrada na figura 2.27.

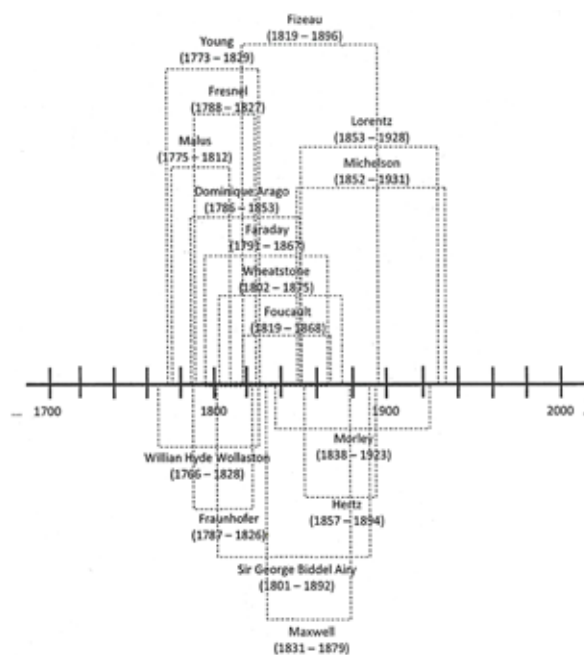


Figura 2.27: Estudiosos da Ótica no século XIX.



## 2.6 OS SÉCULOS XX E XXI

A dispersão anômala – a diminuição do índice de refração com o aumento da frequência – foi observada no final do século XIX. Numa região de dispersão anômala a velocidade de grupo da luz pode ser maior do que a velocidade da luz no vácuo  $c$ , em aparente contradição com o que é previsto pela teoria da relatividade. Em 1914, Léon Brillouin (1889–1969) e Arnold Sommerfeld (1868–1951) mostraram que velocidades de grupo maiores que  $c$  não violam os princípios da relatividade. Isso motivou a busca experimental pela *luz rápida* – meios materiais em que a luz se propagasse com velocidade de grupo maior que  $c$ , ou mesmo negativa. Começando na década de 1980, vários laboratórios foram capazes de produzir luz rápida utilizando diferentes técnicas [Hecht 2002, Milonni 2005]. Também foi possível produzir *luz lenta*, que se propaga com velocidades muito inferiores a  $c$ . Meios em que a luz tem velocidade de grupo de poucos metros por segundo já foram criados em laboratório.

Outro desenvolvimento da Ótica envolvendo refração e a velocidade da luz foi iniciado em 1967 por Victor Veselago (nascido na Ucrânia em 1929). Veselago chamou atenção para o fato de que nada impede a existência de materiais com *índice de refração negativo*. Ao entrar num desses meios, um raio luminoso é refratado para o mesmo lado da normal em que está o raio incidente, não para o lado oposto como é usual. Se produzidos, esses materiais teriam propriedades óticas surpreendentes – por exemplo, o fluxo de energia teria sentido oposto ao da velocidade de fase da onda luminosa.

A natureza aparentemente não produziu materiais com índice de refração negativo, o que deixou a ideia de Veselago esquecida durante muito tempo. Essa situação durou até o final dos anos 90, quando se descobriu que era possível produzir *metamateriais* com índice de refração negativo. Metamateriais, como o nome indica, não são substâncias comuns – são arranjos regulares de minúsculos circuitos elétricos. Radiação eletromagnética de grande comprimento de onda (muito maior que o tamanho dos circuitos) propaga-se por um metamaterial como se ele fosse um meio homogêneo, dotado de índice de refração. Projetando adequadamente os circuitos elementares é possível obter os mais diferentes índices de refração, inclusive valores negativos. A capacidade de produzir metamateriais com índices de refração desenhados ‘por encomenda’ deu origem a intensa atividade experimental e teórica que se mantém até o presente. Aplicações revolucionárias como ‘mantos de invisibilidade’ e ‘superlentes’ parecem ser possíveis e mostram que a história da refração ainda não terminou.

## Capítulo 3 O ÍNDICE DE REFRAÇÃO

---

### 3.1 A VELOCIDADE DA LUZ NA MATÉRIA

O índice de refração de um meio material isotrópico e homogêneo é definido como

$$n = \frac{c}{v} \quad (1)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo e  $v$  a velocidade que ela tem no meio. Não se sabe ao certo quem foi o autor dessa definição, nem quando ela surgiu. Alguns, sem muita certeza, a atribuem a Fresnel, que a teria criado nas décadas de 1810 ou 1820.

A teoria de Maxwell permite calcular o índice de refração a partir das propriedades elétricas e magnéticas do meio. Para ver isso, vamos começar obtendo a velocidade da luz no vácuo. Na ausência de cargas e correntes, as equações de Maxwell no vácuo são

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2)$$

onde  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  são, respectivamente, a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do vácuo. Como

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \quad (3)$$

e  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ , temos

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E}. \quad (4)$$

Por outro lado, usando que  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , podemos escrever

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \times \left( \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial (\nabla \times \vec{B})}{\partial t} \quad (5)$$

e, como  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , obtemos

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (6)$$

Comparando as equações (5) e (6) encontramos

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

De maneira análoga podemos demonstrar que

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (8)$$

As equações (7) e (8) são equações de onda. A forma geral de uma equação da onda é

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (9)$$

onde  $v$  é a velocidade de propagação dessa onda. Portanto, as equações (7) e (8) mostram que campos eletromagnéticos podem propagar-se pelo vácuo na forma de ondas, e que a velocidade dessa propagação é

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \quad (10)$$

Maxwell calculou a velocidade  $c$  a partir dos valores conhecidos de  $\varepsilon_0$  e  $\mu_0$  e obteve um resultado praticamente idêntico à velocidade da luz medida nos experimentos de Fizeau. A coincidência dos dois números o convenceu de que a luz era uma onda eletromagnética e transformou a Ótica num ramo do Eletromagnetismo.

Em um material homogêneo e isotrópico ainda podemos usar as equações de Maxwell, desde que troquemos  $\varepsilon_0$  e  $\mu_0$  pela permissividade elétrica  $\varepsilon$  e permeabilidade magnética  $\mu$  do meio. A velocidade da luz no material é, então,

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \quad (11)$$

Usando as equações (1), (10) e (11), obtemos que o índice de refração do meio é

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (12)$$

A permissividade elétrica e a permeabilidade magnética podem ser escritas como

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi_e), \quad \mu = \mu_0(1 + \chi_m), \quad (13)$$

onde  $\chi_e$  e  $\chi_m$  são as susceptibilidades elétrica e magnética, respectivamente. As susceptibilidades descrevem a polarização elétrica e magnetização que campos

eletromagnéticos (não muito fortes) produzem no meio. A polarização  $\vec{P}$ , o momento de dipolo elétrico por unidade de volume do meio, é dada por

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (14)$$

e a magnetização  $\vec{M}$ , o momento magnético por unidade de volume, é

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (15)$$

onde  $\vec{H}$  é o campo magnético

$$\vec{H} = \vec{B} / \mu . \quad (16)$$

Também é útil definir a permissividade relativa  $K_e = \epsilon / \epsilon_0 = 1 + \chi_e$  e a permeabilidade relativa  $K_m = \mu / \mu_0 = 1 + \chi_m$ , de modo que o índice de refração pode ser escrito como

$$n = \sqrt{K_e K_m} \quad (17)$$

Em materiais diamagnéticos ou paramagnéticos quase sempre temos que  $|\chi_m| \ll 1$  (valores típicos vão de  $10^{-3}$  a  $10^{-5}$ ), de modo que os efeitos magnéticos são pequenos. Assim, é uma boa aproximação ao tomar  $\chi_m \approx 0$ ,  $\mu \approx \mu_0$  e  $K_m \approx 1$ . Nesse caso temos

$$n = \sqrt{K_e} , \quad (18)$$

uma expressão conhecida como a relação de Maxwell [Hecht 2002].

### 3.2 O MODELO DE LORENTZ

Tanto a permissividade elétrica quanto a permeabilidade magnética dependem da frequência da radiação eletromagnética. Isso significa que o índice de refração também depende da frequência, como foi demonstrado por Newton em seus experimentos de dispersão da luz solar por um prisma. Um modelo muito simples, mas que descreve bastante bem a variação do índice de refração com a frequência, foi proposto por Lorentz e será discutido a seguir [Feynman 2009, Jackson 1999].

Vamos começar considerando um único átomo ou molécula sujeito à influência da onda eletromagnética. O primeiro ponto a ser notado é que a força elétrica sobre as cargas internas do átomo é bem maior que a magnética. Numa onda eletromagnética, a razão entre os

módulos dos campos elétrico e magnético é  $E/B = c$ . A razão entre as forças magnética e elétrica sobre uma carga  $q$  no interior do átomo (um elétron, por exemplo) é, portanto,

$$\frac{F_m}{F_e} = \frac{qvB}{qE} = \frac{v}{c} \quad (19)$$

onde  $v$  é a velocidade da carga no plano perpendicular ao campo magnético. Como a velocidade das cargas elétricas no interior do átomo é muito menor que a velocidade da luz, vemos que a força magnética é desprezível frente à força elétrica ( $F_m \ll F_e$ ) e pode ser ignorada.

Os elétrons que constituem a nuvem eletrônica de um átomo estão ligados ao núcleo por forças elétricas que mantêm o sistema em uma configuração de equilíbrio. A força sobre os elétrons pode ser bastante complicada; para simplificar vamos considerar que cada elétron está ligado ao átomo por uma força elástica do tipo

$$F = -kx \quad (20)$$

Na expressão acima,  $k$  é a ‘constante elástica’ e  $x$  é o deslocamento do elétron em relação à sua ‘posição de equilíbrio’ no átomo. Cada elétron do átomo comporta-se como um oscilador harmônico cuja frequência natural, ou frequência de ressonância, é dada por

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_e}} \quad (21)$$

onde  $m_e$  é a massa do elétron.

Quando uma onda eletromagnética de frequência  $\omega$  incide sobre o átomo, a força produzida pelo campo elétrico sobre um elétron é

$$F_e = q_e E(t) = q_e E_0 \cos(\omega t) \quad (22)$$

onde  $q_e$  é a carga do elétron. Já vimos que a força magnética pode ser desprezada, de modo que a equação de movimento do elétron é

$$m_e \frac{d^2x}{dt^2} = -m_e \omega_0^2 x + q_e E_0 \cos(\omega t) \quad (23)$$

Uma solução dessa equação tem a forma

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) \quad (24)$$

Substituindo essa solução na equação de movimento encontramos

$$-m_e x_0 \omega^2 \cos(\omega t) = q_e E_0 \cos(\omega t) - m_e \omega_0^2 x_0 \cos(\omega t) \quad (25)$$

ou seja,

$$x_0 = \frac{q_e E_0}{m_e (\omega_0^2 - \omega^2)} . \quad (26)$$

Portanto, o movimento do elétron é dado por

$$x(t) = \frac{q_e E_0}{m_e (\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t) = \frac{q_e}{m_e (\omega_0^2 - \omega^2)} E(t) \quad (27)$$

A contribuição de um elétron para o momento de dipolo do átomo será  $q_e x$ . O momento de dipolo  $p$  do átomo será a soma das contribuições de seus  $Z$  elétrons, dada por

$$p = Z q_e x = \frac{Z q_e^2}{m_e (\omega_0^2 - \omega^2)} E . \quad (28)$$

Em um meio com  $N$  átomos por unidade de volume, a polarização produzida pela onda eletromagnética será

$$P = N p = \frac{N Z q_e^2}{m_e (\omega_0^2 - \omega^2)} E \quad (29)$$

Com isso podemos calcular a susceptibilidade elétrica,

$$\chi_e = \frac{P}{\epsilon_0 E} = \frac{N Z q_e^2}{m_e \epsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2)} , \quad (30)$$

e a permissividade,

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e) = \epsilon_0 + \frac{N Z q_e^2}{m_e (\omega_0^2 - \omega^2)} , \quad (31)$$

Utilizando a relação de Maxwell, eq. (18), obtemos que o índice de refração é dado por

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{N Z q_e^2}{m_e \epsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2)} , \quad (32)$$

Essa equação pode ser escrita na forma

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (33)$$

onde a *frequência de plasma*  $\omega_p$  é definida por

$$\omega_p^2 = \frac{NZq_e^2}{m_e \epsilon_0} . \quad (34)$$

Vemos da equação (33) que o índice de refração é menor que 1 para frequências acima da frequência de ressonância  $\omega_0$ :

$$\omega > \omega_0 \Rightarrow n^2 < 1 .$$

Esse resultado mostra que índices de refração menores que 1 são possíveis, o que é confirmado por experimentos. Isso contradiz inúmeros livros texto, que afirmam ser impossível encontrar um meio com  $n < 1$ , pois nesse caso teríamos  $c/n > c$ , contrariando a teoria da relatividade [Bohren 2009]. Como veremos no próximo capítulo, não há nenhuma contradição entre a relatividade e meios com  $n < 1$ .

A altas frequências,  $\omega \gg \omega_0$ , o índice de refração é

$$n^2(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} . \quad (35)$$

Nesses casos a frequência de plasma  $\omega_p$  funciona como um limite, abaixo do qual o índice de refração é imaginário ( $n^2 < 0$ ) e o meio reflete a radiação que incide sobre ele, permitindo apenas ondas evanescentes no seu interior. Isso ocorre principalmente quando há elétrons livres no material ( $\omega_0 = 0$ ), como é o caso dos metais e da ionosfera. Em dielétricos a equação (33) só costuma valer para frequências superiores a  $\omega_p$ , onde o índice de refração é real e o meio é transparente.

O índice de refração descrito pela equação (33) tem uma peculiaridade: quando a radiação incidente possui frequência próxima da frequência de ressonância, a diferença  $\omega_0^2 - \omega^2$  vai a zero e  $n(\omega)$  tende para infinito. Esta singularidade pode ser evitada se levarmos em consideração que o átomo deve perder parte da energia que absorve da onda. A dissipação da energia pode ter várias origens: radiação emitida pelo elétron oscilante, colisões com outros átomos, etc. Para simplificar, vamos considerar que os diversos mecanismos dissipativos sejam representados por uma única força de amortecimento agindo sobre cada elétron,

$$F_{diss} = -b v \quad (36)$$

onde  $b$  é uma constante. Levando em consideração a força dissipativa, a equação de movimento do elétron é

$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} = -m_e \omega_0^2 x - b v + q_e E_0 \cos(\omega t) , \quad (37)$$

que pode ser resolvida de maneira semelhante à utilizada no caso sem dissipação (equação 23). Com isso obtemos a permissividade elétrica e o índice de refração do meio,

$$\varepsilon(\omega) / \varepsilon_0 = n^2(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i \gamma \omega} \quad (38)$$

onde  $\gamma = b/m_e$ . Em muitos livros e artigos a equação (38) aparece escrita de forma diferente, com  $+i\gamma\omega$  no lugar de  $-i\gamma\omega$ . Isso corresponde a diferentes convenções sobre como escrever  $\cos\omega t$ : a parte real de  $\exp(i\omega t)$  ou a parte real de  $\exp(-i\omega t)$ . A equação (38) resulta da segunda opção.

A susceptibilidade elétrica é

$$\chi_e = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i \gamma \omega} . \quad (39)$$

Como  $n(\omega) = \sqrt{1 + \chi_e}$ , se  $|\chi_e| \ll 1$  podemos usar a série de Taylor e escrever

$$n(\omega) \approx 1 + \frac{\chi_e}{2} \quad (40)$$

ou seja,

$$n(\omega) \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{2} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 + i \gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (41)$$

cujas partes real e imaginária são

$$\text{Re}(n) = 1 + \frac{\omega_p^2}{2} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (42)$$

e

$$\text{Im}(n) = \frac{\omega_p^2}{2} \frac{\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} . \quad (43)$$



A figura 3.1 mostra as partes real e imaginária do índice de refração, em frequências próximas à ressonância. Pode-se notar que a singularidade em  $\omega = \omega_0$  foi removida pela dissipação, transformando-se em uma região de rápida variação do índice de refração. Em particular, surgiu um intervalo de frequências onde o índice diminui quando  $\omega$  aumenta, ou seja, onde  $dn/d\omega < 0$ . Nesse intervalo a dispersão é chamada de *anômala*. A parte imaginária do índice de refração torna-se grande na região de dispersão anômala, dando origem ao que se chama de absorção ressonante.

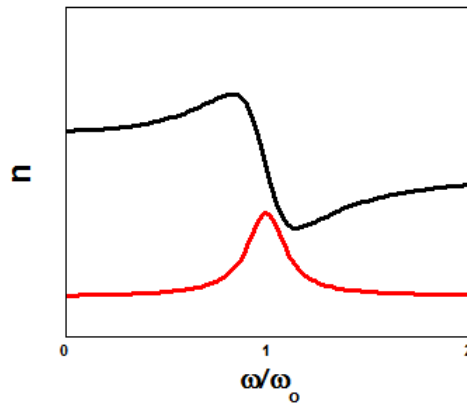


Figura 3.1: Variação do índice de refração com a frequência. A curva em preto representa a parte real enquanto que a parte imaginária é vista em vermelho.

No modelo que descrevemos acima, todos os elétrons do átomo têm a mesma frequência de vibração  $\omega_0$  e constante de amortecimento  $\gamma$ . Essa restrição pode ser facilmente removida, supondo-se que os  $Z$  elétrons comportam-se como osciladores harmônicos independentes, cada qual com sua própria frequência de vibração e fator de amortecimento. Se  $f_i$  elétrons têm frequência de ressonância  $\omega_i$  e amortecimento  $\gamma_i$ , a permissividade elétrica e o índice de refração serão dados por

$$\epsilon(\omega)/\epsilon_0 = n^2(\omega) = 1 + \omega_p^2 \sum_j \frac{f_j/Z}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega}, \quad (44)$$

onde

$$\sum_j f_j = Z. \quad (45)$$

Todos os resultados anteriores podem ser facilmente reescritos nessa formulação mais geral. Na figura 3.2 estão as partes real e imaginária de um índice de refração dado pela eq. (44). Podemos notar várias zonas de dispersão anômala e absorção ressonante, correspondentes a diferentes frequências de ressonância do átomo.

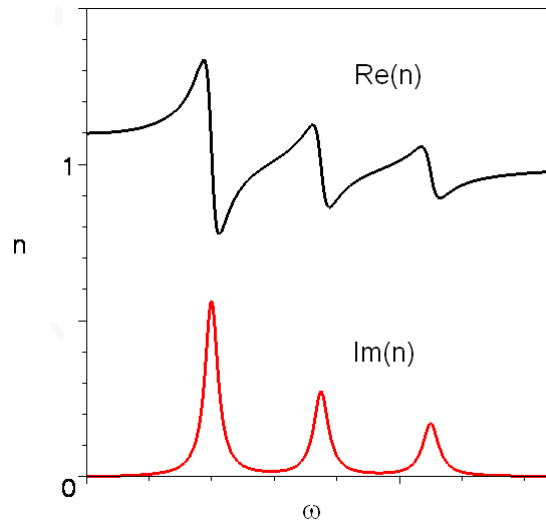


Figura 3.2: O índice de refração de um material com várias frequências de ressonância.

A equação (44) só vale para meios rarefeitos, como gases. Em meios mais densos cada átomo sofrerá a influência do campo elétrico produzido pela polarização de seus vizinhos. Se o efeito desses campos for levado em conta, o índice de refração será dado pela relação de Clausius-Mossotti (ou Lorenz-Lorentz) [Feynman 2009]

$$n^2 = 1 + \frac{\alpha}{1 - \alpha/3} \quad (46)$$

onde  $\alpha = \omega_p^2 \sum_j \frac{f_j / Z}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega}$ .

## Capítulo 4 AS VELOCIDADES DA LUZ

---

### 4.1 A VELOCIDADE DE FASE

Quando falamos na velocidade da luz, quase sempre estamos nos referindo à velocidade da luz no vácuo,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299\,792\,458 \text{ m/s.} \quad (1)$$

Em um meio dispersivo a expressão “velocidade da luz” fica mais ambígua. Nesse caso é possível definir várias velocidades para a luz, com significados e valores diferentes. A velocidade  $c/n$  que discutimos no capítulo 3 é apenas uma das possibilidades – a *velocidade de fase*.

A definição de velocidade de fase é simples: é a velocidade de propagação de uma onda harmônica. Podemos escrever essa onda como

$$\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t). \quad (2)$$

onde  $A$  é a amplitude,  $k$  o número de onda e  $\omega$  a frequência angular. Os dois últimos parâmetros estão relacionados ao comprimento de onda  $\lambda$  e frequência  $f$  da onda por

$$k = 2\pi/\lambda, \quad \omega = 2\pi f. \quad (3)$$

Colocando a equação (2) na forma

$$\psi(x, t) = A \cos k \left( x - \frac{\omega}{k} t \right) = A \cos k(x - v_f t) \quad (4)$$

vemos que a onda harmônica  $\Psi$  desloca-se com velocidade

$$v_f = \frac{\omega}{k}. \quad (5)$$

A equação (5) define a velocidade de fase  $v_f$ . Em termos do comprimento de onda  $\lambda$  e frequência  $f$ ,  $v_f$  é dada por

$$v_f = \lambda f \quad (6)$$

A velocidade de fase é a velocidade com que um ponto de fase constante se desloca (daí seu nome). A fase da onda da equação (2) é  $\phi = kx - \omega t$ . Para que ela permaneça constante

( $d\phi/dt = 0$ ) é necessário que o ponto  $x$  se desloque com  $dx/dt = \omega/k$ , ou seja, com a velocidade de fase. Por exemplo, as cristas da onda se movem com a velocidade de fase, pois correspondem a pontos de fase constante, múltipla de  $2\pi$ .

A velocidade de fase da luz num meio de índice de refração  $n$  é  $c/n$ . Para demonstrar isso basta lembrar que, como vimos no capítulo 3, num material de permissividade  $\epsilon$  e permeabilidade  $\mu$  os campos elétrico e magnético obedecem às equações de onda

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \vec{B} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (7)$$

Considerando que os campos eletromagnéticos são ondas harmônicas (como a equação (2)), com  $\Psi$  representando  $\vec{E}$  ou  $\vec{B}$ ) e substituindo essas funções nas equações (7), encontramos que

$$k^2 = \epsilon\mu \omega^2. \quad (8)$$

Como  $\epsilon\mu = n^2/c^2$ , as equações (5) e (8) mostram que a velocidade de fase da luz no meio é

$$v_f = \frac{c}{n}. \quad (9)$$

O índice de refração  $n$  pode ser menor do que 1 em certas faixas de frequência, como já observamos no capítulo 3. Nesses casos a velocidade de fase será maior que  $c$ , em aparente contradição com a teoria da relatividade. Por exemplo, vimos no capítulo 3 que a altas frequências o índice de refração é

$$n(\omega) = (1 - \omega_p^2/\omega^2)^{1/2}. \quad (10)$$

Esse índice é menor que 1 para  $\omega > \omega_p$  (e imaginário para  $\omega < \omega_p$ ). A velocidade de fase de ondas de alta frequência,

$$v_f = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}}, \quad (11)$$

é, portanto, sempre maior que  $c$ .

Na verdade, não há contradição entre a teoria da relatividade e velocidades de fase superiores a  $c$ . O que é vedado pela relatividade é a transmissão de informação com velocidade maior que  $c$ . Uma onda harmônica não carrega informação, pois tem sempre o mesmo comportamento em qualquer posição e tempo. Não podemos usar uma onda

harmônica para emitir um aviso de que algo aconteceu num certo instante. Esse sinal teria que ter um início (o instante em que o evento aconteceu) e, portanto, não pode ser uma onda puramente senoidal. Um pulso localizado, ou ‘pacote de ondas’, é uma forma mais apropriada de enviar um sinal. Como veremos na próxima seção, um pacote de ondas não se move com a velocidade de fase.

## 4.2 A VELOCIDADE DE GRUPO

Um pacote de ondas pode ser construído pela superposição de ondas harmônicas. Por simplicidade, vamos considerar apenas duas ondas, com amplitudes iguais e frequências e comprimentos de onda ligeiramente diferentes:

$$\psi_1(x,t) = A \cos(k_1 x - \omega_1 t), \quad \psi_2(x,t) = A \cos(k_2 x - \omega_2 t). \quad (12)$$

A superposição dessas ondas é

$$\psi(x,t) = \psi_1(x,t) + \psi_2(x,t) = A[\cos(k_1 x - \omega_1 t) + \cos(k_2 x - \omega_2 t)]. \quad (13)$$

Usando a relação trigonométrica

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right), \quad (14)$$

a onda  $\Psi$  pode ser escrita como

$$\psi(x,t) = 2A \cos(k_m x - \omega_m t) \cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t) \quad (15)$$

onde  $\bar{k} = (k_1 + k_2)/2$  e  $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$  são, respectivamente, o número de onda e a frequência angular médios. A diferença entre esses valores médios e o número de onda e frequência de cada onda é  $k_m = (k_1 - k_2)/2$  e  $\omega_m = (\omega_1 - \omega_2)/2$ . Se as frequências e comprimentos de onda de  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$  forem semelhantes, teremos  $k_m \ll \bar{k}$  e  $\omega_m \ll \bar{\omega}$ . Nesse caso é conveniente escrever a equação (15) como

$$\psi(x,t) = \psi_0(x,t) \cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t), \quad (16)$$

que tem a forma de uma onda harmônica  $\cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$  (a ‘onda portadora’) cuja amplitude

$$\psi_0(x,t) = 2A \cos(k_m x - \omega_m t) \quad (17)$$

(a onda ‘envolvente’ ou ‘moduladora’) varia lentamente. A figura 4.1 mostra a forma da onda  $\Psi$  e sua amplitude  $\Psi_0$  em um determinado instante. Vemos que a onda  $\Psi$  é uma sucessão de pacotes (grupos) de ondas. Estes resultam, é claro, da variação de amplitude definida pela equação (17).

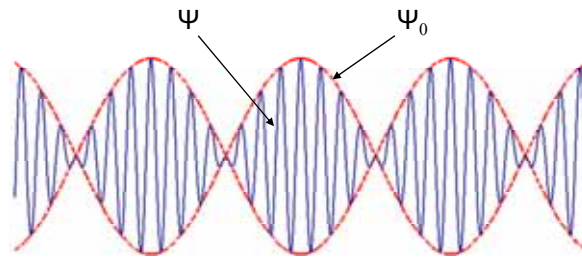


Figura 4.1: Grupos de ondas resultantes da superposição de duas ondas harmônicas.

Os grupos de ondas não se movem com a velocidade de fase da onda portadora,  $\bar{\omega}/\bar{k}$ . Seu movimento é dado pela onda moduladora  $\Psi_0$ , cuja velocidade é

$$v_g = \frac{\omega_m}{k_m} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} . \quad (18)$$

Estamos supondo que  $\Delta\omega$  e  $\Delta k$  são muito pequenos, de maneira a ter grupos de onda bem definidos (com muitas oscilações internas). Assim, podemos escrever

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} . \quad (19)$$

Essa é a *velocidade de grupo* – a velocidade com que pacotes de onda se propagam.

Pode-se argumentar que a onda mostrada na figura 4.1 não é capaz de transmitir informação, pois tem o mesmo problema da onda harmônica: a sequência infinita de pacotes comporta-se sempre da mesma maneira em todos os pontos do espaço e em todos os instantes. Isso ocorre porque as duas ondas que compõem os pacotes entram e saem periodicamente de fase, criando regiões de interferência construtiva (os pacotes) e de interferência destrutiva (os intervalos entre eles) que se alternam indefinidamente. O problema pode ser remediado somando-se mais ondas harmônicas ao grupo. Se o número de ondas for muito grande, fica praticamente impossível que todas recomponham uma dada relação de fases, produzindo uma sequência de pacotes. A figura 4.2 mostra um pacote de ondas formado pela superposição de muitas (infinitas) ondas harmônicas numa certa faixa de comprimentos de onda. É possível mostrar que esse pacote se propaga com a velocidade de grupo definida pela equação (19). As oscilações internas ao pacote movem-se com a velocidade de fase, como no caso de duas ondas.

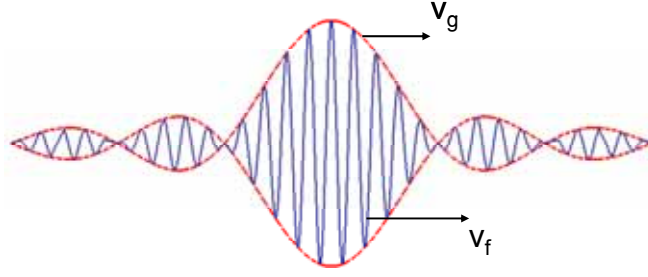


Figura 4.2: Um grupo de ondas localizado. O pacote move-se com a velocidade de grupo  $v_g$ ; as oscilações internas propagam-se com a velocidade de fase  $v_f$ .

A velocidade de grupo é, em geral, diferente da velocidade de fase. Em um meio de índice de refração  $n(\omega)$  a velocidade de fase é  $v_f = c/n(\omega)$ , e a relação entre  $k$  e  $\omega$  é dada por

$$k = \frac{\omega}{c}n(\omega). \quad (20)$$

Daí vemos que

$$\Delta k = \frac{1}{c} \left( n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega} \right) \Delta \omega, \quad (21)$$

de modo que velocidade de grupo é

$$v_g = \frac{c}{n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega}}. \quad (22)$$

O termo  $\omega \frac{dn}{d\omega}$  no denominador da equação (22) é o responsável pela diferença entre as velocidades de fase e grupo. Se não houver dispersão, ou seja, se  $n$  não depender da frequência, teremos  $dn/d\omega = 0$  e as duas velocidades serão iguais. É o que acontece no vácuo; como  $n = 1$  para qualquer frequência, as velocidades de fase e de grupo da luz no vácuo são as mesmas.

Em uma faixa de frequências em que a dispersão é *normal*, ou seja,  $dn/d\omega > 0$ , a velocidade de grupo é menor que a velocidade de fase, como pode ser facilmente visto na equação (22). Isso resolve a aparente ‘contradição’ entre a relatividade e meios com índice de refração menores que 1. Por exemplo, tomando o índice de refração para altas frequências dado na equação (10), vemos que

$$n + \omega \frac{dn}{d\omega} = \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2} + \omega \frac{\omega_p^2/\omega^3}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}} \quad (23)$$

e portanto a velocidade de grupo é

$$v_g = c\sqrt{1 - \omega_p^2 / \omega^2} . \quad (24)$$

Ao contrário da velocidade de fase que, nesse caso, é maior que  $c$  (veja a equação (11)), a velocidade de grupo (equação(24)) é menor que  $c$ .

Na região de dispersão *anômala* muita coisa muda em relação ao que foi descrito acima. Em primeiro lugar, nessa região o índice de refração tem uma parte imaginária não desprezível. Vamos chamar as partes real e imaginária do índice de refração de  $n_R$  e  $n_I$ , de modo que  $n = n_R + i n_I$ . Se  $n$  é um número complexo, o número de onda  $k$  também o será, já que  $k = n \omega/c$ . Escrevendo  $k = k_R + i k_I$ , a parte real  $k_R = n_R \omega/c$  está relacionada ao comprimento de onda e a parte imaginária  $k_I = n_I \omega/c$  à distância de atenuação (absorção) da radiação pelo meio. Na presença de absorção, a velocidade de fase é dada por

$$v_f = \frac{\omega}{k_R} = \frac{c}{n_R} \quad (25)$$

e a velocidade de grupo é

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_R} = \frac{c}{n_R + \omega dn_R / d\omega} . \quad (26)$$

Na região de dispersão anômala temos  $dn_R / d\omega < 0$  e a velocidade de grupo é maior que a velocidade de fase. Tomando como exemplo o modelo do capítulo 3, vemos da equação (3.42) que , para  $\omega \approx \omega_0$  , a parte real do índice de refração é

$$n_R \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\gamma^2 \omega_0} (\omega - \omega_0) . \quad (27)$$

Para  $\omega = \omega_0$  ,  $n_R = 1$  e a velocidade de fase é igual á da luz. A velocidade de grupo, por outro lado, é superior a  $c$ :

$$v_g = \frac{c}{1 - \omega_p^2 / \gamma^2} > c . \quad (28)$$

Podemos ver ainda na equação (28) que se  $\omega_p > \gamma$  a velocidade de grupo torna-se negativa. A superposição de ondas harmônicas que se movem em uma dada direção pode dar origem a um pulso movendo-se no sentido oposto.



Durante muito tempo pensou-se que seria muito difícil observar velocidades de grupo maiores que  $c$  ou negativas, pois a absorção que sempre acompanha a dispersão anômala tornaria praticamente impossível acompanhar o deslocamento do pacote de ondas por distâncias significativas. Recentemente foi possível observar essas velocidades em meios ‘ativos’, materiais onde a luz sofre amplificação ao invés de absorção. Em 2000, Wang, Kuzmich e Dogariu produziram um meio ativo através do qual um pulso luminoso se deslocou com velocidade de grupo  $v_g = -c/310$  [Wang 2000]. Num certo sentido, isso significa que o pulso levou um tempo negativo para atravessar o material: a luz parece sair do meio antes mesmo de entrar nele. Esse efeito se deve à amplificação que o material ativo dá à parte frontal do pacote de onda, e à absorção que a parte posterior sofre. A figura 4.3 (adaptada de [McDonald 2001]) mostra com esse processo se desenvolve.

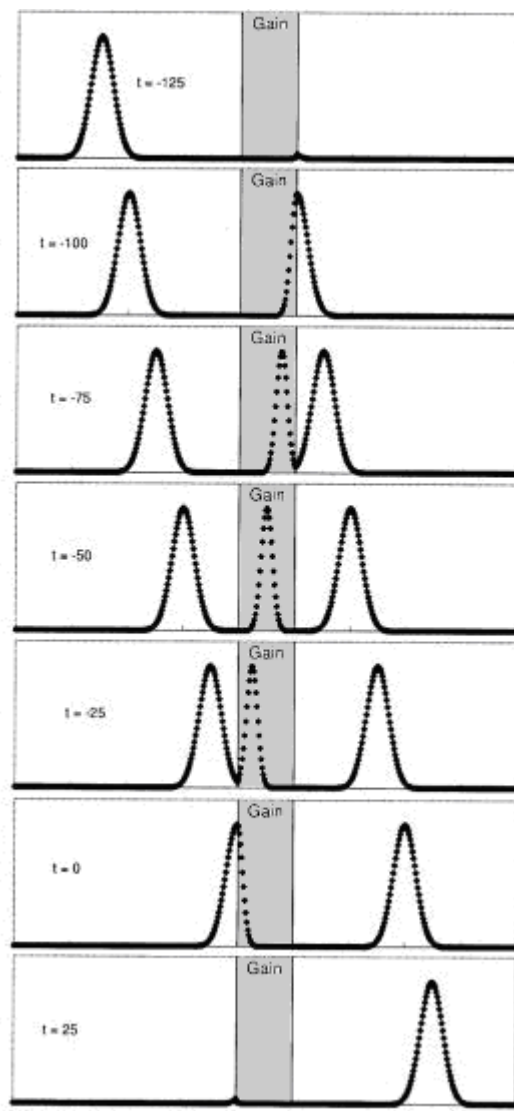


Figura 4.3: Pacote de ondas atravessando uma região com velocidade de grupo negativa. Adaptado de [McDonald 2001].

Luz com velocidade de grupo maior que  $c$  é chamada de *luz rápida*. Também é possível criar *luz lenta*, que tem velocidade de grupo muito menor que  $c$ . Vários experimentos já produziram luz movendo-se a poucos metros por segundo, fazendo a radiação atravessar meios com  $dn/d\omega$  positivo e extremamente alto [Milonni 2005, Boyd 2009].

Velocidades de grupo maiores que  $c$  não estão em desacordo com a relatividade. Como já mencionamos, o que a relatividade proíbe é a transmissão de informação com velocidade superior a  $c$ . A velocidade de grupo é a velocidade com que um pacote de ondas se move ‘como um todo’. Diferentes partes desse pacote podem mover-se com velocidades diferentes. Em particular, o início da perturbação ondulatória não se move com a velocidade de grupo, e é essa parte que realmente transmite informação. Como veremos a seguir, o início do pacote de ondas desloca-se com a *velocidade de frente* (‘front velocity’) [Milonni 2005].

### 4.3 A VELOCIDADE DE FRENTE

Transmitir informação é enviar um aviso de que algo aconteceu. Informação deve sempre conter um elemento de surpresa, do contrário não seria uma nova informação. O sinal que transmite essa informação deve, portanto, ter um início: ele é zero até o momento em que se decide enviar o aviso, e diferente de zero por certo tempo a partir daí. É esse início descontínuo que carrega a informação do acontecimento que está sendo anunciado. Por exemplo, se numa dada posição  $x$  a perturbação ondulatória é

$$\Psi(t) = \Theta(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases} \quad (29)$$

a informação transmitida pela onda chega no instante  $t = t_0$ , não depois. Sommerfeld e Brillouin mostraram que uma descontinuidade como a da equação (29) move-se sempre, em qualquer meio, com velocidade igual a  $c$  [Brillouin 1960]. A demonstração de Sommerfeld e Brillouin supõe que o índice de refração tende a 1 em altas frequências,

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} n(\omega) = 1. \quad (30)$$

A condição expressa na equação (30) pode ser justificada da seguinte maneira. Devido à sua inércia, os elétrons do meio não conseguem responder a campos eletromagnéticos que variam com frequência muito alta, permanecendo efetivamente inertes. Com isso o meio não afeta a passagem da radiação e o índice de refração é 1. Esse comportamento é encontrado, por

exemplo, no modelo de Lorentz que discutimos no capítulo 3. É por essa razão que descontinuidades como a da equação (29) se propagam com velocidade  $c$ . Uma descontinuidade é uma mudança finita que ocorre num período de tempo nulo, ou seja, envolve frequências infinitas. Como essas frequências não são afetadas pelo meio, a descontinuidade se propaga como se estivesse no vácuo, ou seja, com velocidade  $c$ . Descontinuidades na forma da onda são chamadas de *frentes*, e a velocidade com que elas se movem é a *velocidade de frente*. O resultado de Sommerfeld e Brillouin é equivalente a dizer que a velocidade de frente das ondas eletromagnéticas é igual a  $c$  em qualquer meio. Como a informação é carregada pela frente, nenhuma radiação pode violar o princípio da relatividade, qualquer que seja sua velocidade de grupo ou fase.

#### 4.4 A VELOCIDADE DE SINAL

É difícil medir a velocidade de frente em situações práticas, pois a descontinuidade que caracteriza a frente pode ser quase imperceptível. Em algumas situações a *velocidade de sinal* é introduzida como um substituto da velocidade de frente. A velocidade de sinal é definida como a velocidade com que se move um ponto com uma dada intensidade na parte frontal da onda. Ou seja, considera-se que o sinal chega a um determinado ponto quando a sua intensidade atinge pela primeira vez um dado limiar. Frequentemente esse valor é dado como uma fração da intensidade máxima do sinal. Por exemplo, a velocidade de sinal de um pulso pode ser definida como a velocidade do ponto dianteiro onde a intensidade é a metade da intensidade máxima.

Há um elemento de arbitrariedade na definição da velocidade de sinal, pois pontos de diferentes intensidades podem mover-se com velocidades distintas. Em princípio a velocidade de sinal tende à velocidade de frente quando o limiar de intensidade tende a zero. Na prática isso tem pouca utilidade, pois para registrar uma intensidade arbitrariamente baixa precisaríamos de sensores infinitamente sensíveis ou ambientes completamente livres de ruído, o que não é viável em situações reais.

Como a velocidade de sinal é diferente da velocidade de frente, ela não é a velocidade com que a informação se desloca e, portanto, não está sujeita às restrições relativísticas. É possível encontrar situações onde a velocidade de sinal é maior, igual ou menor que  $c$ .

## 4.5 A VELOCIDADE DO TRANSPORTE DE ENERGIA

A propagação da energia eletromagnética permite definir mais uma velocidade da luz: a *velocidade do transporte de energia*. A conservação da energia eletromagnética é dada pelo teorema de Poynting [Jackson 1999]. Na ausência de correntes esse pode ser escrito como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (30)$$

onde o *vetor de Poynting*  $\vec{S}$  descreve o fluxo da energia eletromagnética

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (31)$$

e  $u$  é a densidade de energia

$$u = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}). \quad (32)$$

Para uma onda eletromagnética de frequência  $\omega$  em um meio sem absorção, a densidade de energia é (em média sobre um ciclo da onda)

$$u = \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{d(n\omega)}{d\omega} E_{\omega}^2 \quad (33)$$

onde  $E_{\omega}$  é amplitude do campo elétrico da onda. O módulo do vetor de Poynting é (em média)

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{\omega}^2. \quad (34)$$

A velocidade do transporte de energia é definida como a razão entre o fluxo e a densidade de energia,

$$v_e = \frac{S}{u} \quad (35)$$

de modo que

$$v_e = \frac{c}{d(n\omega)/d\omega} = \frac{c}{n + \omega dn/d\omega}. \quad (36)$$

Comparando as equações (36) e (22) vemos que a velocidade de propagação da energia é igual à velocidade de grupo,

$$v_e = v_g. \quad (37)$$

Deve-se notar, entretanto, que o cálculo da velocidade do transporte de energia realizado acima supõe que a absorção é desprezível, ou seja, exclui as regiões de dispersão anômala. Nessas faixas de frequência, onde a velocidade de grupo pode ser maior que  $c$  ou negativa, a velocidade  $v_e$  pode ser bem diferente de  $v_g$ .

É útil definir a “impedância” do meio de propagação da onda como

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (38)$$

de modo que o vetor de Poynting e a densidade de energia são dados por

$$S = \frac{1}{2} \frac{E_\omega^2}{Z} \quad (39)$$

$$u = \frac{1}{2c} \frac{d(n\omega)}{d\omega} \frac{E_\omega^2}{Z}. \quad (40)$$

Como veremos mais à frente, em certas situações a impedância  $Z$  desempenha um papel tão importante quanto o índice de refração  $n$ .

## 4.6 MAIS VELOCIDADES DA LUZ

Existem mais “velocidades da luz”. Além das velocidades de fase, grupo, frente, sinal e transporte de energia, muitas outras podem ser definidas. As referências [Smith 1970, Bloch 1977] descrevem detalhadamente as definições existentes (e introduzem algumas novas).

## Capítulo 5 IMPEDÂNCIA

---

### 5.1 O QUE É IMPEDÂNCIA?

Um conceito importante na propagação das ondas, sejam mecânicas ou eletromagnéticas, é o de *impedância* [Rogers 1960]. Em nosso ouvido médio, por exemplo, existem três ossos (martelo, bigorna e estribo) que funcionam como “casadores de impedância” entre o ar do ouvido externo e o líquido presente no ouvido interno. Sem esse casamento, o som que entrasse no ouvido seria quase totalmente refletido ao alcançar o ouvido interno. Um boxeador que golpeia um garoto pequeno que está sobre um skate (e portanto recua com a pancada) causará dano menor do que se golpeasse um homem com a sua massa. Se o boxeador acertasse um elefante, seria arremessado para trás. Nos dois casos, o menino e o elefante, o boxeador não consegue transmitir toda a energia do golpe, pois as impedâncias não estão ajustadas. Um médico que utiliza um estetoscópio para melhor escutar os batimentos do coração também está utilizando um casador de impedâncias. O sistema coração, veias e artérias tem impedâncias bem ajustadas quando somos jovens, mas com o endurecimento das artérias, o sistema deixa de funcionar adequadamente. Os exemplos acima mostram a importância e generalidade da ideia de impedância. Antes de explorar as aplicações desse conceito temos, entretanto, que responder a algumas perguntas básicas: O que é impedância? O que é casamento de impedância? Qual a influência da impedância na propagação das ondas?

Não há uma definição formal para o conceito de impedância. Sabe-se que é uma característica de um sistema (ou meio), e que relaciona duas grandezas: uma associada à ideia de força ( $G$ ) e outra que transmita a ideia de velocidade ( $U$ ). A impedância  $Z$  desse sistema é definida como  $Z = G/U$ . Um exemplo para esclarecer melhor esta ideia; a tensão elétrica em um resistor é uma grandeza relacionada à força enquanto que corrente elétrica está relacionada à velocidade. A razão entre a tensão  $V$  e a intensidade de corrente  $I$  é a resistência elétrica,  $R = V/I$ , que é um exemplo de impedância elétrica.

Para uma partícula de massa  $m$ , a impedância  $Z$  pode ser definida como a razão entre o impulso que ela sofre numa colisão e a velocidade que ela adquire, ou seja,

$$Z = \frac{F \Delta t}{\Delta v} = \frac{m \Delta v}{\Delta v} = m \quad (1)$$

Assim, a impedância da partícula é sua própria massa. Para verificar a utilidade dessa definição e a importância do casamento de impedâncias, vamos considerar uma bola de massa  $m$  que se desloca com velocidade  $v$  e, num certo instante, colide frontal e elasticamente com outra bola de massa  $M$ , inicialmente em repouso ( $V = 0$ ).



Figura 5.1: Bola de massa  $m$  que irá colidir com outra de massa  $M$ .

Para que toda energia da bola de massa  $m$  se transfira para a de massa  $M$ , é necessário que a primeira fique em repouso após a colisão. Se a velocidade da segunda bola depois da colisão é  $V'$ , temos que as leis de conservação de energia e momentum,

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} M V'^2, \quad m v = M V' \quad (2)$$

implicam em

$$m = M \quad (3)$$

Portanto, a energia será totalmente transferida da primeira para a segunda partícula apenas se as massas  $m$  e  $M$  forem iguais, ou seja, se suas impedâncias estiverem casadas.

Aproveitando a ideia de transferência de energia, podemos citar um caso muito comum em nossos discursos em sala de aula, como o exemplo clássico de uma campânula de vidro em cujo interior colocamos uma campainha. Em geral é comentado que, se retirarmos o ar do interior da campânula, deixaremos de ouvir o som emitido pela campainha. Não deixa de ser verdade, mas o que ocorre é que o som fica se refletindo no interior do vaso de vidro, pois lá dentro não se tem vácuo perfeito, sem que consiga chegar aos nossos ouvidos. Se por outro lado existir um casamento de impedâncias entre os meios envolvidos (ar no interior da campânula, vidro e o ar do exterior), o som será transmitido até nossos ouvidos de modo que passaremos escutá-lo, isto é, haverá transferência de energia.

## 5.2 O CABO COAXIAL

Os cabos conectores são utilizados para transmitir sinais de um ponto a outro de um sistema eletrônico, procurando abranger uma ampla faixa de frequências do espectro. Porém, ao enviar sinais de um pulso através de um fio simples, resulta em distorções e perdas em apenas alguns centímetros de fio. Isto se deve às *capacitâncias, indutâncias e resistências* características de qualquer condutor. Para diminuir esses inconvenientes, que provocam perdas de energia, há a indicação do uso dos *cabos coaxiais*. O cabo coaxial é constituído de um fio de cobre condutor revestido por um material isolante chamado de dielétrico, geralmente polietileno ou teflon, envolvido por uma malha de fios que permite o retorno da corrente elétrica, assim como blindagem do condutor, diminuindo a influência externa de campos elétricos e magnéticos. Finalmente, uma capa protetora plástica forma uma cobertura para todos os elementos que constituem o cabo coaxial, como visto na figura 5.2. Recebe este nome porque o fio, o dielétrico, a malha e a capa plástica possuem forma cilíndrica com o eixo comum a todos os elementos.

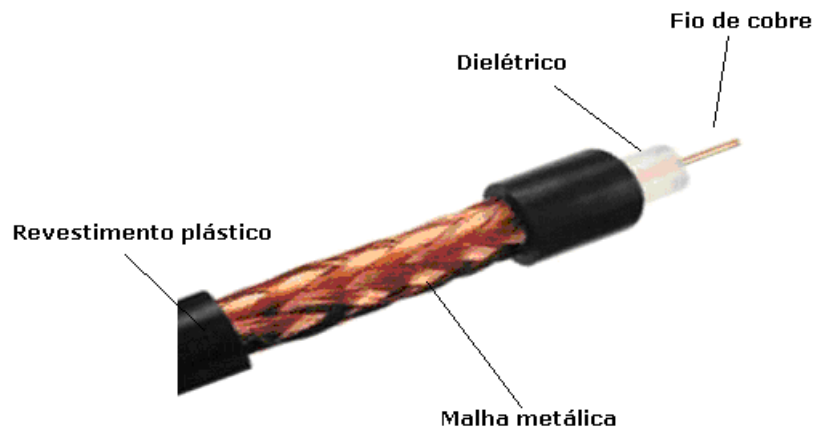


Figura 5.2: O cabo coaxial com seus elementos constituintes, o fio de cobre, o dielétrico, a blindagem e o revestimento.

Os sinais são transmitidos através do cabo na forma de ondas eletromagnéticas, isto é, o cabo é uma guia de ondas denominada *linha de transmissão*. Para detalhar mais o estudo, pode-se observar na figura 5.3 as vistas lateral à esquerda, onde se percebe alguns parâmetros geométricos do cabo, e a vista frontal à direita, onde aparecem os campos elétrico e magnético instantâneos quando um sinal é enviado através do cabo coaxial.



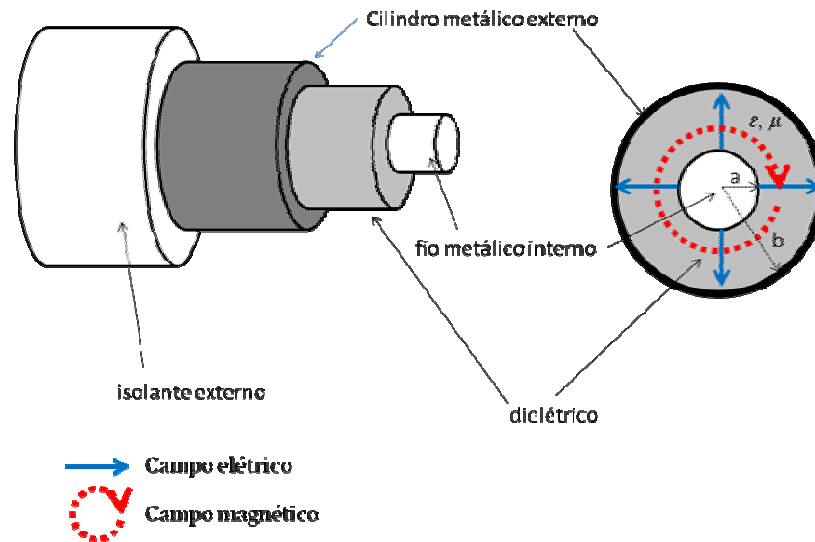


Figura 5.3: Cabo coaxial; (esquerda) vista lateral e (direita) vista frontal dos parâmetros geométricos do cabo, campos elétrico e magnético.

A capacitância  $C$  e a indutância  $L$  de um cabo coaxial dependem das medidas geométricas do cabo, sendo que a primeira é dependente do dielétrico utilizado, expresso em função de sua permissividade elétrica  $\epsilon$ , e a segunda em termos da permeabilidade magnética  $\mu$ . Por unidade de comprimento do cabo, a capacitância e a indutância são determinadas pelas expressões:

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (\text{Farad / metro}) \quad (4)$$

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (\text{Henry / metro}) \quad (5)$$

Nelas,  $a$  é o raio do condutor interno e  $b$  o raio interno do condutor externo. Vale ressaltar que a indutância de um cabo coaxial é relativamente pequena se comparada à de um condutor único de mesmo comprimento, pois o fluxo magnético gerado pela corrente no condutor interno tende a anular o fluxo do condutor externo (correntes de sentidos contrários).

Tanto o condutor como o dielétrico, não são perfeitos e, devido a tal fato, existem distribuídas uniformemente ao longo do cabo, uma resistência  $R$  e uma condutância  $G$ , respectivamente, em se tratando de um cabo real. Os elementos, até agora citados, podem ser representados em uma conexão real, entre fonte e carga, numa linha de transmissão como na figura 5.4.

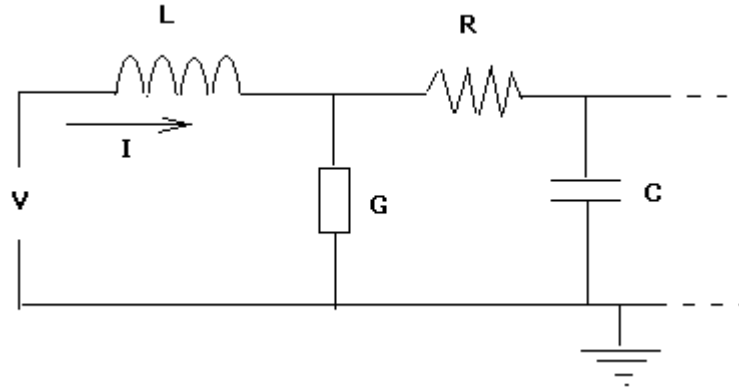


Figura 5.4: Representação de uma conexão real de um cabo coaxial entre a fonte e a carga.

Na Figura 5.4 temos:  $V$  – tensão da fonte

$I$  – corrente no circuito

$R$  – resistência por unidade de comprimento ( $\Omega/m$ )

$G$  – condutância por unidade de comprimento ( $\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$ )

$C$  – capacitância do cabo (F/m)

$L$  – indutância por unidade de comprimento (H/m)

A impedância em série de um cabo coaxial, isto é, soma da impedância do resistor e do indutor, é dada por

$$Z_{série} = R + i\omega L \quad (6)$$

enquanto a admitância em paralelo, ou seja, inverso da impedância em paralelo é dada por

$$Y = G + i\omega C \quad (7)$$

Pode-se observar que o aterramento está na malha de blindagem do cabo. Para um comprimento infinitesimal  $\Delta x$  de cabo, se tem diferenças  $\Delta V$  e  $\Delta I$  para tensão e corrente, respectivamente, dadas por:

$$\Delta V(x,t) = -R \Delta x I(x,t) - L \Delta x \frac{\Delta I(x,t)}{\Delta t} \quad (8)$$

e

$$\Delta I(x,t) = -G \Delta x V(x,t) - C \Delta x \frac{\Delta V(x,t)}{\Delta t} , \quad (9)$$

lembrando que as parcelas  $-R \Delta x I(x,t)$  e  $-G \Delta x V(x,t)$  são devidas ao cabo ser real.

Para o caso de um cabo ideal ( $R = G = 0$ ). Dividindo por  $\Delta x$  e fazendo o limite tender a zero ( $\Delta x \rightarrow 0$ ), encontra-se

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L \frac{\partial I}{\partial t} \quad (10)$$

e

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (11)$$

Derivando as equações acima em relação a  $x$  encontramos

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -L \frac{\partial^2 I}{\partial t \partial x} \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = -C \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} \quad (13)$$

e, em relação a  $t$ ,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} = -L \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial t} = -C \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (15)$$

Substituindo (12) em (15), temos

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \quad (16)$$

que é uma equação de onda para a tensão  $V$ . Seguindo a mesma linha de raciocínio, chega-se a equação correspondente a  $I$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 0 \quad (17)$$

As expressões (16) e (17) representam equações de onda em um cabo coaxial. Comparando essas expressões à forma geral da equação da onda, vista em capítulos anteriores,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (18)$$

vemos que a velocidade de propagação da onda é

$$\frac{1}{v^2} = LC \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}. \quad (19)$$

Também no caso limite de um cabo ideal, a razão entre a impedância em série e a admitância em paralelo é dada por

$$\frac{Z_{\text{série}}}{Y} = \frac{i\omega L}{i\omega C} = \frac{L}{C} \quad (20)$$

As soluções das equações para o potencial e a corrente são dadas por

$$V(x,t) = V_+ e^{i(\omega t - kx)} + V_- e^{i(\omega t + kx)} \quad \text{e} \quad I(x,t) = I_+ e^{i(\omega t - kx)} + I_- e^{i(\omega t + kx)} \quad (21)$$

Substituindo essas soluções para  $V(x,t)$  e  $I(x,t)$  nas equações (10) e (11), obtemos

$$I_{\pm} = \pm \frac{V_{\pm} k}{L\omega} = \pm \frac{V_{\pm}}{\sqrt{Z_{\text{série}} / Y}} \quad (22)$$

Por definição a *impedância característica*  $Z_o$  é dada por:

$$Z_o = \frac{V}{I} = \sqrt{\frac{Z_{\text{série}}}{Y}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (23)$$

A equação (23) mostra que a impedância característica de um cabo coaxial ideal é real e independe do seu comprimento. Este resultado é totalmente não intuitivo se compararmos com a resistência de um fio que é proporcional ao seu comprimento.

Se considerarmos um gerador ligado a uma linha de transmissão infinita, ele não consegue “perceber” o final da linha que pode estar em curto, aberta ou ainda com qualquer carga. Desta forma, o gerador fica alimentando continuamente a linha de transmissão, pois sua energia nunca chega ao seu final. Assim sendo, pode-se dizer que a *impedância característica* de uma linha de transmissão é igual a sua impedância de entrada, se a linha tiver um comprimento infinito. Mas o problema reside nas linhas de transmissão de comprimento  $L$ , uma vez que não existe linha com comprimento infinito. Quando se aplica um pulso na linha de transmissão com uma duração  $t$ , menor que o tempo que ele leva para chegar ao final da linha, o gerador “interpretará” que está ligado a uma linha infinita.

### 5.3 REFLEXÃO DE UM SINAL

Ocorre uma *reflexão* quando uma onda que se propaga em um meio encontra outro meio onde a velocidade de propagação é diferente. Em ótica observamos o fenômeno quando a luz, em sua propagação, se depara com um meio de índice de refração diferente. No caso de uma linha de transmissão, representada na figura 5.5, as reflexões acontecem devido à mudança da impedância característica  $Z_0$ , de um cabo, para outra  $Z$ , de uma carga, colocada no seu final.

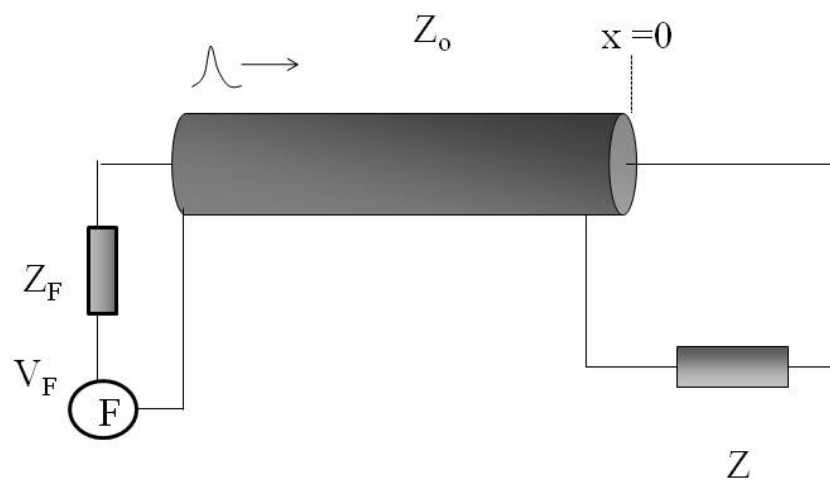


Figura 5.5: Na mudança de impedância de  $Z_0$  do cabo para  $Z$  da carga, ocorre a reflexão do sinal.

Como visto anteriormente, o sinal em um cabo coaxial é, em geral, a soma de um sinal original e um refletido viajando em sentido oposto. Para um sinal arbitrário  $V_+$ , pode-se escrever  $V = V_+(x-vt) + V_-(x+vt)$ , onde  $V_-$  é a onda refletida. As consequências devido às reflexões podem ser desastrosas como: interferências, distorções e ecos. Estas reflexões podem ser analisadas considerando as condições de contorno nas interfaces. Para uma melhor compreensão, considere um cabo com impedância característica  $Z_0$ , terminado por uma impedância  $Z$  que, por exemplo, pode ser a entrada de algum aparelho eletrônico, como ilustrado na figura acima.

A medida que o sinal atravessa o cabo, a razão  $V/I$  deve ser, por definição, sempre igual a  $Z_0$ . Chegando a interface, como reflexões dos sinais são formadas, deve-se ajustar a razão  $V/I$  para a nova impedância característica.

$$Z_o = \frac{V_+}{I_+} = -\frac{V_-}{I_-} \quad (24)$$

onde  $V_+$  e  $I_+$  são a voltagem e a corrente do sinal original e  $V_-$  e  $I_-$  são as correspondentes do sinal refletido. Na saída da fonte temos

$$V_F = V_+ + Z_F I_+ \quad (25)$$

$$V_+ = Z_o I_+ \quad (26)$$

$$V_+ = V_F \frac{Z_o}{Z_F + Z_o} \quad (27)$$

e na interface  $x = 0$

$$V(0, t) = Zi(0, t) \quad (29)$$

$$V_+ e^{i(\omega t)} + V_- e^{i(\omega t)} = \frac{Z}{Z_o} [V_+ e^{i(\omega t)} - V_- e^{i(\omega t)}] \quad (30)$$

$$V_+ + V_- = \frac{Z}{Z_o} (V_+ - V_-) = V_t = Z I_t \quad (31)$$

onde  $V_t$  e  $I_t$  são a tensão e a corrente transmitidas. A partir destas equações encontramos

$$R = \frac{V_-}{V_+} = -\frac{I_-}{I_+} = \frac{Z - Z_o}{Z + Z_o} \quad (32)$$

$$T = \frac{V_t}{V_+} = \frac{2Z}{Z + Z_o} \quad (33)$$

onde  $R$  é conhecido como o *coeficiente de reflexão* e  $T$  é o *coeficiente de transmissão*.

A polaridade da amplitude do sinal refletido depende do valor relativo das duas impedâncias. Se  $Z$  é maior do que  $Z_o$ , então a reflexão será sempre da mesma polaridade, mas com uma amplitude entre 0 e  $V_+$ . No caso limite de carga infinita, em um circuito aberto, o sinal refletido é igual em amplitude ao sinal incidente, como mostra a figura 5.6.

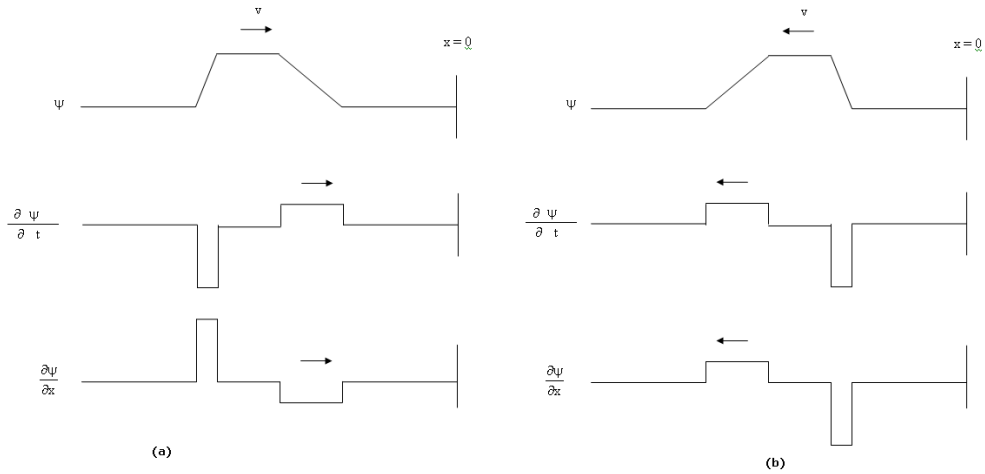


Figura 5.6: Pulso se propagando em uma corda com extremidade fixa ( $x = 0$ ) representando impedância infinita no meio 2 ( $Z \rightarrow \infty$ ). A seqüência (a) representa o pulso antes da reflexão e a (b) depois da reflexão.

Por outro lado, como na figura 5.7 onde  $Z$  é menor do que  $Z_0$ , a reflexão tem polaridade oposta e valor entre 0 e  $V_0$ . No limite de carga zero, como um curto circuito, a reflexão é igual e oposta ao pulso incidente. No caso especial onde  $Z = Z_0$ ,  $R$  anula-se e não temos nenhuma reflexão. Note que  $T + R \neq 1$ , o coeficiente de reflexão possui valores compreendidos entre -1 e +1 e o de transmissão, entre 0 e 2, que são conseqüências das impedâncias dos dois meios em questão. Vale destacar que, se  $Z = 0$  e  $R = 1$ , não haverá energia transmitida ao segundo meio.

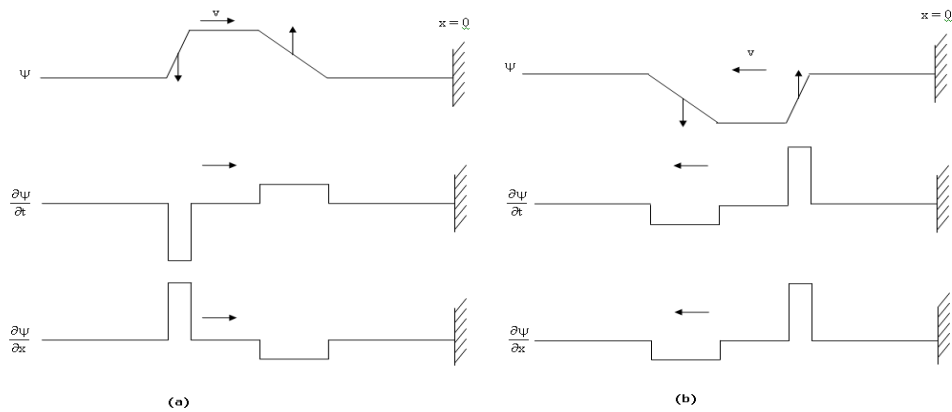


Figura 5.7: Pulso se propagando em uma corda com extremidade livre ( $x = 0$ ) representando impedância tendendo para zero para o meio 2 ( $Z \rightarrow 0$ ). A seqüência (a) indica o pulso antes da reflexão e a (b), após a reflexão. As setas verticais são as velocidades dos pontos do meio indicando também a velocidade nula do ponto central.

Em uma linha de transmissão, o campo elétrico é proporcional à voltagem e, por outro lado, o campo magnético proporcional à corrente. Assim sendo, e mais uma vez por analogia, podemos considerar o coeficiente de reflexão do campo elétrico igual ao da voltagem e, por outro lado, o coeficiente do campo magnético igual ao da corrente.

Nos meios mais presentes em nosso cotidiano (ar, água, vidro, etc), a permeabilidade magnética vale 1, com boa aproximação. Desta forma, a velocidade e a impedância assumem, respectivamente, as formas

$$v \propto \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \quad (34)$$

e

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{1}{n} \quad (35)$$

já que  $n = \sqrt{\epsilon}$ , para  $\mu = 1$ . Assim sendo,  $Z_1 \propto \frac{1}{n_1}$  e  $Z_2 \propto \frac{1}{n_2}$ , ou seja, o coeficiente de

reflexão para o campo elétrico é  $R_E (Z_2 + Z_1) = Z_2 - Z_1$ , ou seja,  $R_E \left( \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_1} \right) = \frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1}$ , ou

ainda,

$$R_E = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad (36)$$

A curiosidade é que, neste caso, pode-se ter dois meios com mesma impedância apesar de possuírem índices de refração diferentes. Um exemplo que pode ilustrar a situação em questão, é a de dois meios 1 e 2 com índices de refração  $n$  e permissividades e permeabilidades como dados na figura 5.8.

Meio 1	Meio 2
$n_1 = 1$	$n_2 = -1$
$\epsilon_1 = 1$	$\epsilon_2 = -1$
$\mu_1 = 1$	$\mu_2 = -1$

Figura 5.8: Dois meios distintos com índices de refração diferentes, apesar de possuírem a mesma impedância.



Vale observar que, sendo  $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ , teremos  $Z_1 = Z_2 = 1$  apesar de  $n_1$  ser diferente de  $n_2$ .

Outro exemplo é o *titanato de ferrite*, uma mistura de um material com alto  $\mu$  (ferrite) e alto  $\varepsilon$  (titanato de bário), pode ser utilizado para absorção com  $\mu$  e  $\varepsilon$  complexos e com razão  $\mu/\varepsilon$  igual à do vácuo. Embora a mistura constitua uma descontinuidade física (mudança do índice de refração), uma onda incidente entra sem reflexão. A velocidade da onda é reduzida e uma alta atenuação ocorre em uma distância curta, para ondas de 100 MHz (3 m) incidindo normalmente em uma placa de titanato de ferrite, onde  $\mu/\mu_0 = \varepsilon/\varepsilon_0 = 60 \cdot (2 - i)$ . O meio é não condutor ( $\sigma = 0$ ), e como a impedância  $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon} = Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$  é igual à do vácuo, *não ocorre reflexão*. Uma possível aplicação é evitar reflexão por radar, isto é, tornar-se invisível para o radar [Kraus 1999].

Em suma, neste capítulo houve a preocupação em “desvendar” o conceito de impedância. Vimos que não há uma definição única e que para cada sistema em questão há uma forma diferente de se expressar a impedância. Outro objeto do capítulo foi o casamento de impedâncias em um sistema, seja ele mecânico, elétrico ou ótico. De uma forma abrangente pode-se dizer que casamento de impedâncias é a maneira de garantir que haja máxima transferência de energia de um sistema para outro.

## Capítulo 6 DA TEORIA À PRÁTICA

---

### 6.1 VELOCIDADE DE FASE

Propomos neste capítulo uma discussão da forma como a velocidade da luz é apresentada aos alunos do ensino médio. Nesses cursos, quando falamos na velocidade da luz, nos referimos ao seu valor no vácuo, ou seja,  $c = 299\,792\,458$  m/s. A constante  $c$ , do latim – *celeritas* – velocidade ou rapidez, é a velocidade máxima com que se pode transmitir um sinal. Em se tratando de propagação em um dielétrico, a referência é a *velocidade de fase* de uma onda monocromática, isto é,  $v_f = c/n$ , onde  $n$  é o índice de refração do meio [Hecht 2002]. Em função da frequência  $f$  e do comprimento de onda  $\lambda$ , a velocidade de fase é dada por  $v_f = \lambda f$ . Afirmações do tipo: “a luz sempre se propaga mais lentamente através de um meio material do que no vácuo” ou ainda, “o valor do índice de refração é sempre maior do que 1” são comuns, baseadas na ideia de que não podem existir velocidades maiores do que  $c$ , o que contradiria a teoria da relatividade de Einstein.

Os textos se referem simplesmente à velocidade da luz, onde deveriam citar *velocidade de fase* da luz. Talvez seja esta a origem da confusão a respeito da propagação da luz pois, na faixa do visível, a maioria dos materiais conhecidos possuem índice de refração maior do que a unidade. A rigor, o índice de refração pode ser menor do que 1. Como exemplo o alumínio e a água, possuem índices de refração menores que 1, desde que os comprimentos das ondas incidentes sejam em torno de 1  $\mu\text{m}$  e 70 nm, respectivamente (ver, por exemplo, <http://refractiveindex.info>). Um alerta a respeito da maneira de como os livros didáticos apresentam os conceitos, em particular relativos ao índice de refração e à velocidade da luz, pode ser encontrado em [Bohren 2009].

A velocidade de fase é a velocidade com a qual um “ponto” qualquer da onda, um máximo, por exemplo, se propaga no espaço. No entanto, a velocidade de fase não possui um significado físico, ou seja, não carrega informação. O fato é que, se a fase de uma onda monocromática leva um certo tempo para alcançar um determinado ponto no espaço, isso não significa necessariamente que a energia emitida pela fonte leve o mesmo tempo para chegar a esse ponto. Em algumas situações a fase pode até mover-se em sentido contrário ao fluxo de energia.

As TVs a cabo tornaram-se bastante comuns nos dias de hoje, onde o aparelho de TV recebe um sinal através de um cabo coaxial conectado à sua entrada. O cabo coaxial da figura 6.1 tem a função de transportar o sinal, na forma de energia eletromagnética de um extremo a outro. Assim como uma fibra ótica, o cabo serve de guia para a onda eletromagnética que se propaga através do dielétrico. Associado aos campos elétrico e magnético da onda, há também o sinal na forma de corrente e tensão que se propagam pelo fio interno. Os campos  $E$  e  $B$  obedecem às equações de Maxwell ou, equivalentemente, a uma equação de onda. A velocidade de propagação do sinal depende do dielétrico através da permissividade elétrica  $\epsilon$  e da permeabilidade magnética  $\mu$  e é dada por  $v^2 = 1/\epsilon\mu$ .

O valor para a velocidade de propagação em um cabo coaxial típico, o *RG58U*, é  $v = 0,66c$ . Normalmente, descreve-se a velocidade de propagação através do fator de velocidade ( $VF$ ) que é definido como  $VF = v/c$  [Fonseca 2007]. Como em geral o cabo não é perfeito, pois o material dielétrico possui uma resistência finita, assim como o fio de cobre, as equações de onda para o campo elétrico, o campo magnético, a tensão e a corrente não são homogêneas, dando origem ao fenômeno da dispersão [Fonseca 2007]. No caso limite, onde o material dielétrico é um isolante perfeito, e desprezando a resistividade do fio de cobre, o cabo é chamado de ideal e não ocorre dispersão. Desta forma, o cabo coaxial nada mais é do que um meio onde ondas de energia são transmitidas de um ponto a outro. Quando essas ondas encontram uma interface com outro meio diferente, ocorre reflexão e somente uma parte da energia é transmitida através da interface.

Ao contrário do que afirmam alguns livros didáticos, as reflexões de ondas são determinadas, não pelo índice de refração relativo entre os meios, mas por suas impedâncias relativas. Por exemplo, a antena de TV deve ter uma impedância igual à impedância do ar, que vale  $377 \Omega$ , de modo a absorver o sinal eficientemente. O cabo que leva o sinal captado pela antena até o aparelho de TV, que também deve ser adequadamente “terminado”, de modo que a sua impedância seja “casada” com a do aparelho, evita reflexões indesejadas. No caso dos cabos coaxiais *RG58U*, a impedância vale  $50\Omega$ .

Na maioria dos circuitos habituais, o comprimento do cabo, que conecta os diversos componentes e dispositivos, não é importante. Naqueles casos, a tensão no fio em um determinado instante é suposta igual em qualquer parte do cabo. No entanto, quando a variação temporal do sinal é comparável ao tempo de propagação do sinal no cabo, o comprimento do cabo torna-se importante e o cabo se comporta como uma linha de

transmissão. Em termos mais quantitativos, o comprimento do cabo é significativo quando o comprimento de onda típico do sinal é muito menor do que as dimensões do cabo. Uma regra prática é que o cabo comporta-se como uma linha de transmissão se o comprimento do cabo for pelo menos um décimo do comprimento de onda do sinal. Neste caso, o atraso do sinal é significativo bem como as reflexões na linha, podendo levar a um comportamento imprevisível em sistemas que não são cuidadosamente confeccionados dentro dos padrões de uma linha de transmissão.

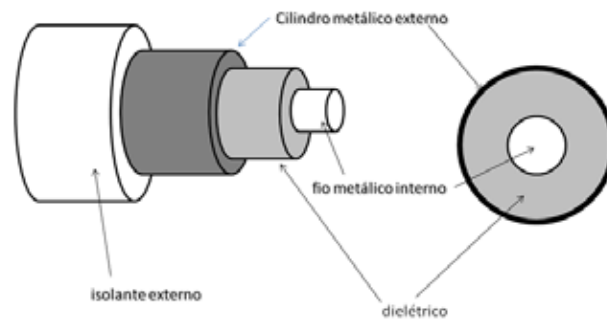


Figura 6.1: Esquema dos componentes de um cabo coaxial em corte.

Neste trabalho, é proposta uma metodologia experimental fácil de ser implementada no ensino médio, para a introdução do conceito de dispersão e medida da velocidade de fase da luz. Um dos colaboradores que participou ativamente do experimento, D.O.S.Gomes, é aluno do ensino médio do Colégio Estadual Guilherme da Silveira Filho, no Rio de Janeiro, e bolsista do programa Jovens Talentos da Ciência da FAPERJ.

## 6.2 APARATOS E MÉTODOS

Embora o equipamento utilizado não seja de baixo custo, seu preço não é exatamente proibitivo. O equipamento consiste em: um gerador de ondas, um osciloscópio de duplo traço, dois cabos coaxiais, 1 terminador de  $50 \Omega$  e dois conectores “T”.

Ondas senoidais, de frequência variável até 5,8 MHz, são produzidas pelo gerador de ondas e, com um cabo coaxial de 20 cm conecta-se sua saída até a entrada no osciloscópio através de um conector “T”. Um segundo cabo coaxial, com 13,2 m de comprimento, é fixado na segunda saída do conector “T”, e sua outra extremidade é colocada no canal 2 do osciloscópio (quanto mais longo for o cabo melhor será a resposta), como mostrado na figura 6.2.

O osciloscópio, assim como qualquer bom voltímetro, possui uma alta impedância de entrada ( $\sim 1 \text{ M}\Omega$ ) e o cabo coaxial utilizado possui uma impedância de  $50 \Omega$ . Um detalhe bastante importante neste experimento é que, para evitar reflexões no canal, no final do cabo coaxial deve ser inserido um terminador de  $50 \Omega$ , de modo a casar a impedância do osciloscópio com a do cabo [Fonseca 2007]. Isto equivale colocar uma impedância de  $50 \Omega$  em paralelo com a impedância de entrada do osciloscópio, de modo que a onda incidente “veja” uma impedância efetiva de  $50 \Omega$ .

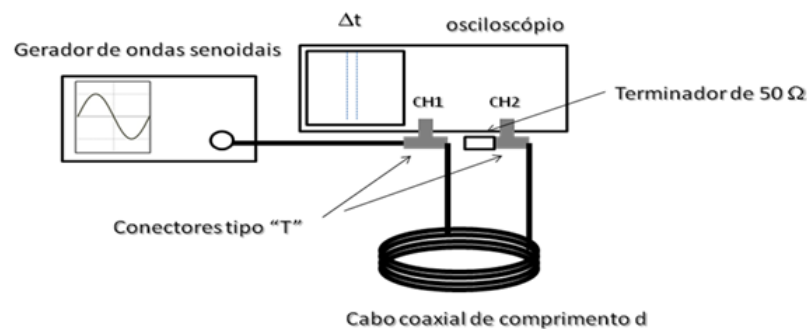


Figura 6.2: Esquema do aparato experimental com o gerador, osciloscópio e cabos.

Para determinar o atraso do sinal no canal 2 em relação ao canal 1, medimos a diferença de fase entre os respectivos máximos, conforme ilustrado na figura 6.3 abaixo.

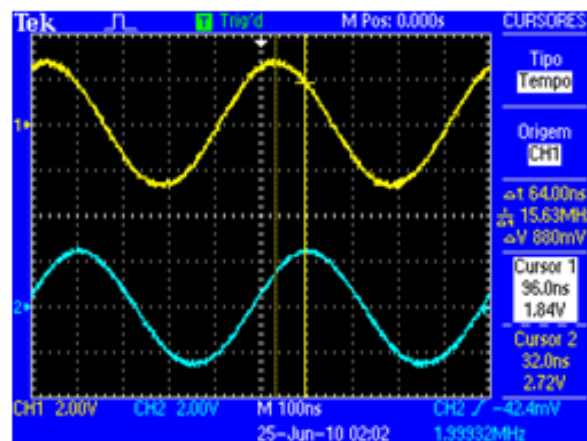


Figura 6.3: Exemplo de medida do tempo de atraso em um cabo coaxial usando ondas senoidais. Os dois cursores tipo tempo (linhas verticais) indicam as posições relativas entre os máximos.

Os resultados para a velocidade de fase  $v_f = d/\Delta t$ , são mostrados na figura 6.4, em função da frequência da onda, onde a linha horizontal ilustra o valor do recíproco do índice de refração,  $1/n$ , para este cabo [Fonseca 2007]. Podemos observar que, para a presente faixa de frequências, o cabo não exhibe dispersão de forma significativa a ser medida pelo método proposto.

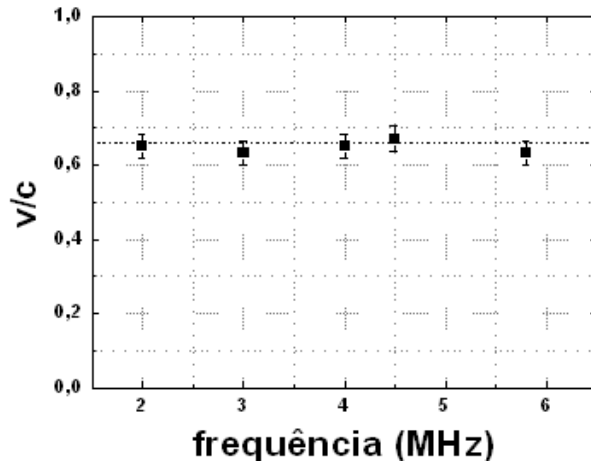


Figura 6.4: Velocidade de fase em um cabo coaxial RG58U em função da frequência de uma onda senoidal. A linha horizontal indica o valor do recíproco do índice de refração,  $n^{-1} = v/c = (\mu_0 \epsilon_0 / \mu \epsilon)^{1/2}$ , para este cabo, onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo

### 6.3 VELOCIDADE DE GRUPO

Como comentado anteriormente, a impedância de um cabo coaxial RG58U vale  $50 \Omega$  e, como todo bom voltímetro, o osciloscópio possui uma impedância de entrada muito alta, em torno de  $1 \text{ M}\Omega$ . Quando um sinal rápido que se propaga em um cabo coaxial é medido com um osciloscópio haverá, inevitavelmente, várias reflexões e assim sendo, para a medida da velocidade de grupo utilizamos um gerador de sinais ORTEC modelo 448, representado na figura 6.5.

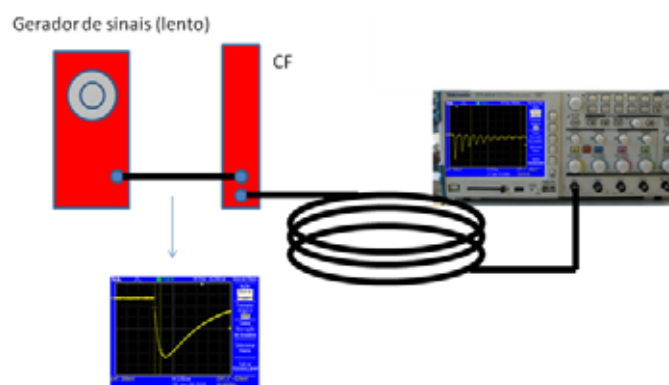


Figura 6.5 - Aparato para a medição da velocidade de grupo em um cabo coaxial.

Este gerador produz sinais lentos com tempo de subida da ordem de  $\mu\text{s}$ , ou seja, sinais cujo tempo de subida é maior do que o tempo de propagação do sinal no cabo ( $5 \text{ ns/m}$ ). Um desses sinais é destacado na figura 6.6.

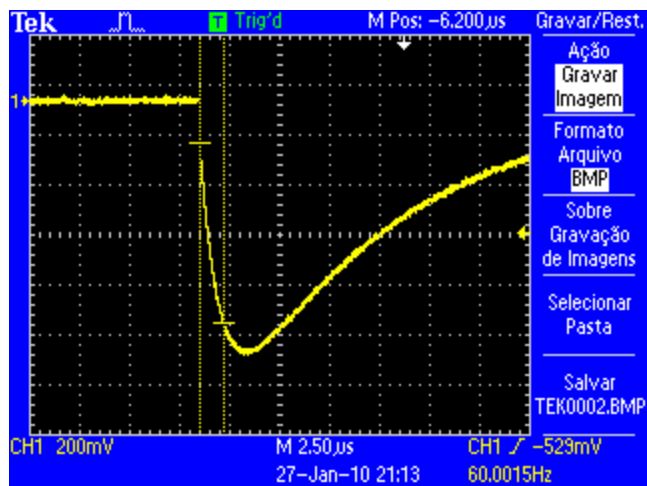


Figura 6.6: Sinal lento produzido pelo gerador de sinais ORTEC modelo 448. Os dois cursores verticais mostram as posições utilizadas para a medida do tempo de subida (risetime).

Para atingir nosso objetivo, precisamos de um sinal rápido e para tanto, usa-se um discriminador de frações constantes da ORTEC modelo CF 473A. Este discriminador produz na sua saída um sinal rápido lógico de 1 volt negativo, sempre que na entrada haja um sinal com um certo valor mínimo de tensão. O sinal rápido possui um tempo de subida menor que 5 ns. Se utilizarmos um cabo coaxial RG58U, conectando a saída do discriminador e o osciloscópio, com um comprimento tal que, o tempo de propagação do sinal seja maior do que o seu tempo de subida, este sinal para nossos fins passa ser considerado rápido. Desta forma, as considerações feitas no capítulo sobre casamento de impedâncias são totalmente aplicáveis aqui. O sistema da figura 6.7 é análogo às reflexões da luz em três meios de índice de refração diferentes.

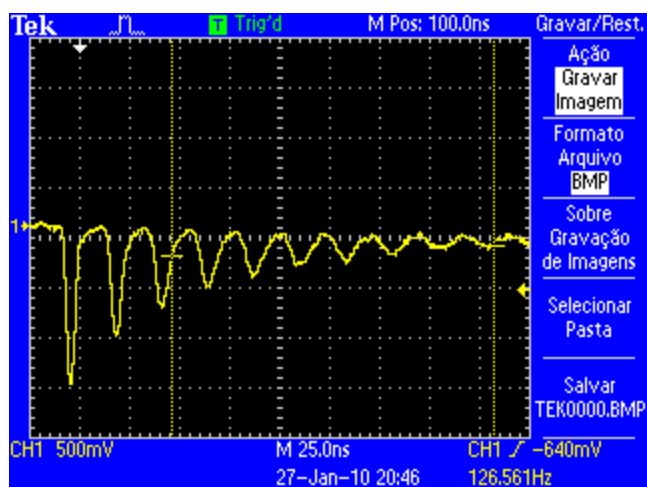


Figura 6.7: Sinal transmitido ao osciloscópio e suas reflexões. Nesta medida utilizamos um cabo coaxial de 1,99 m de comprimento.

Na figura 6.8, o meio 1 representa o discriminador que produz um sinal de amplitude  $V_0$ , o meio 2 é o cabo coaxial e o meio 3 o osciloscópio. O sinal que é transmitido ao meio 2 passa ter amplitude  $T_1 V_0$ , onde  $T_1$  é o coeficiente de transmissão do meio 1 para o meio 2. Este sinal propaga-se no meio 2 até a interface com o meio 3 onde parte do sinal é refletido,  $R_2 T_1 V_0$ , e parte transmitido,  $T_2 T_1 V_0$ . Devemos ressaltar que, no meio 1 também haverá pulsos refletidos e os transmitidos de 2 para 1, que não estão mostrados na figura.

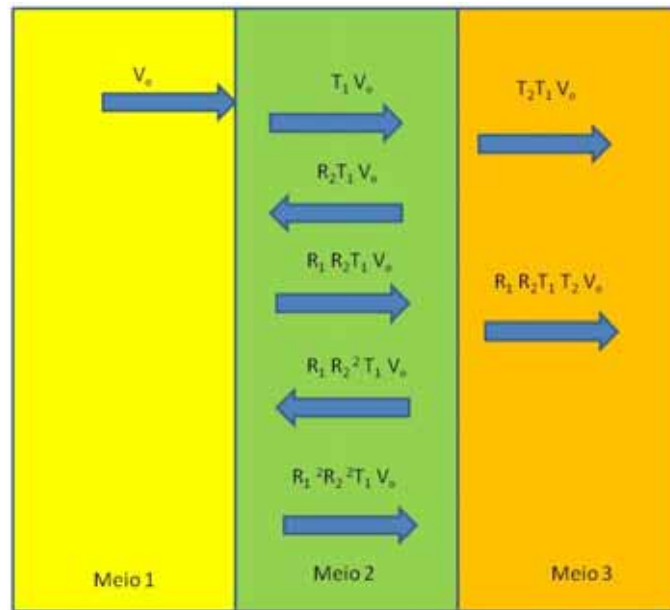


Figura 6.8: Representação esquemática do discriminador (meio 1), do cabo coaxial (meio 2) e do osciloscópio (meio 3).

Para a medida experimental da velocidade de grupo, considerando o cabo coaxial como um meio pouco dispersivo, adotamos as posições dos máximos dos sinais observados como pontos de referência para as medidas. Assim sendo, a velocidade de grupo é medida através do tempo de voo, utilizando a equação  $v = \Delta x / \Delta t$ , onde  $\Delta x$  é o deslocamento observado no osciloscópio entre dois picos de sinais consecutivos, e  $\Delta t$  o respectivo intervalo de tempo.

A figura 6.9 mostra o gráfico do deslocamento, em função do tempo de propagação para os pulsos observados na figura 6.7, onde  $\Delta x = 2L$  e  $L$ , de valor igual a 1,99 m, é o comprimento do cabo coaxial. O valor encontrado para a velocidade de grupo é  $v = (176,41 \pm 0,17) \times 10^8$  m/s, ou seja,  $v = 0,588c$ . Este valor é um pouco diferente do valor medido para a velocidade de fase, o que está de acordo com a dispersão normal, onde a velocidade de grupo é menor do que a velocidade de fase.



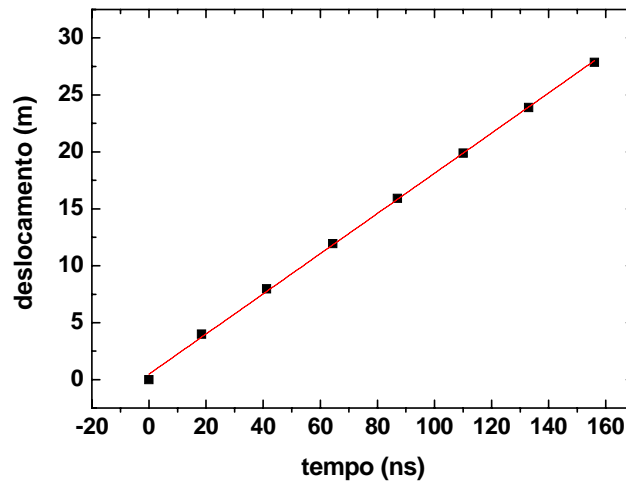


Figura 6.9: Gráfico do deslocamento em função do tempo de propagação.

## 6.4 VELOCIDADE DE PROPAGAÇÃO DO SINAL

A velocidade de grupo nem sempre pode ser associada à propagação de informação – nos meios que apresentam dispersão anômala essas velocidades podem ser diferentes. Como vimos no capítulo 4, a informação contida numa onda é transmitida com a velocidade de frente. Para medir a velocidade de frente, precisaríamos de um detector com sensibilidade infinita. Como tal detector não existe, operacionalmente usa-se a velocidade de sinal, a velocidade com que um dado nível da intensidade da onda se propaga. É necessário escolher algum critério arbitrário para determinar esse nível mínimo, e a figura 6.10 mostra que a velocidade de sinal depende fortemente dessa escolha. Dois níveis de sinal foram usados: 10% e 50% da intensidade máxima. As velocidades encontradas foram

$$v_{10\%} = (0,524 \pm 0,005) c$$

e

$$v_{50\%} = (0,548 \pm 0,009) c .$$

A diferença entre as velocidades a 10 % e 50 % é real, pois é maior do que a soma das respectivas incertezas. Esta é uma consequência da dispersão do cabo coaxial para frequências muito altas.

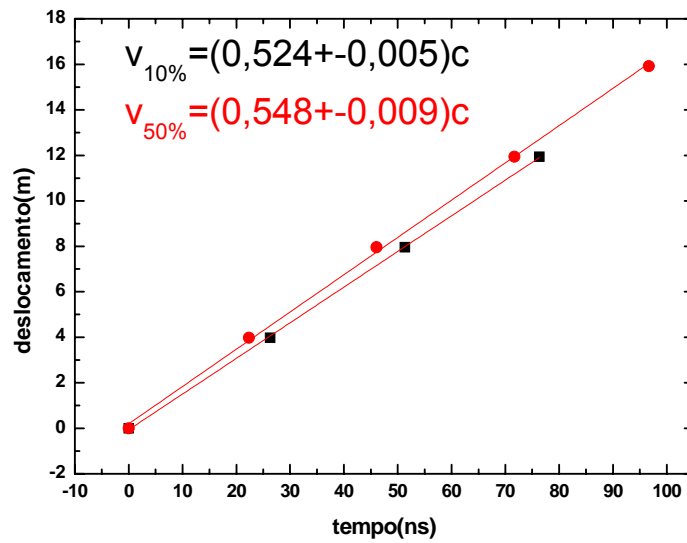


Figura 6.10: Medidas da velocidade de propagação do sinal para duas diferentes definições; círculos, para o sinal definido a 50 % do máximo, e quadrados, para o sinal definido a 10 % do máximo.

## 6.5 ALARGAMENTO DE UM PULSO EM UM MEIO DISPERSIVO

Uma outra maneira de estudar dispersão é através do alargamento do pulso ao longo do tempo ou espaço. A figura 6.11 ilustra a medida da largura à meia altura (FWHM) para os sinais apresentados na figura 6.7.

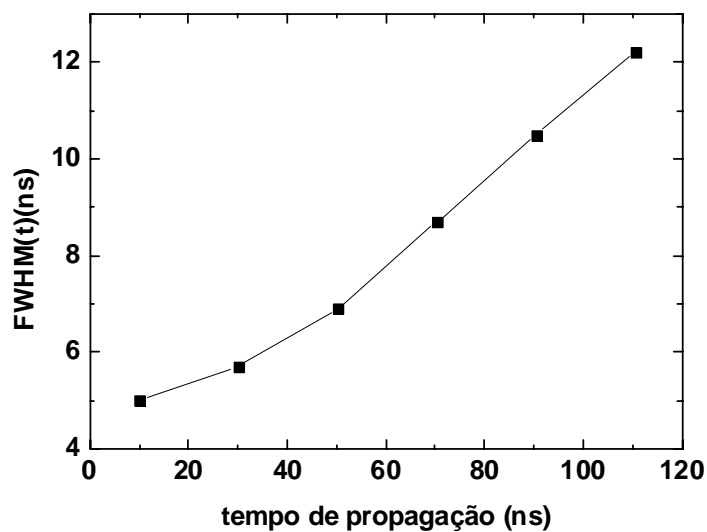


Figura 6.11: Largura à meia altura (FWHM) dos pulsos da figura 6.7 em função do tempo.

Quando o meio não é dispersivo, todas as velocidades de propagação (de fase, de grupo, de sinal, etc...) são iguais. Para um meio dispersivo, a relação de dispersão pode ser expandida em série de Taylor como:

$$\omega(k) = \omega(k_o) + \left. \frac{d\omega}{dk}(k - k_o) \right|_{k=k_o} + \left. \frac{d^2\omega}{dk^2}(k - k_o)^2 \right|_{k=k_o} + \dots \quad (1)$$

Para pulsos ou pacote de ondas, ou seja, uma onda que contenha uma distribuição de diferentes frequências, cada componente do pacote se propaga no meio com sua própria velocidade de fase. Se o pacote contém uma faixa muito grande de frequências, o problema de determinar sua velocidade torna-se muito complicado, podendo levar a um resultado impreciso. Já se o pulso contiver apenas uma pequena banda de frequências, é possível caracterizar tal velocidade, ou seja, a velocidade de grupo. Se o pulso possui uma largura inicial  $\Delta x(0)$ , a largura correspondente em números de onda será  $\Delta k(0) \approx 1/\Delta x(0)$  (vide apêndice B). Isto significa que a velocidade de grupo,  $v_g = d\omega/dk$ , tem uma distribuição da ordem de  $\Delta v_g \approx d^2\omega/dk^2 \Delta k \approx (d^2\omega/dk^2)/\Delta x(0)$ . No instante  $t$ , isto implica num alargamento extra da ordem de  $\Delta v_g t$ . Quando combinamos as incertezas na posição (alargamentos), obtemos a largura  $\Delta x(t)$  no instante  $t$  dada por:

$$\Delta x(t) = \sqrt{\Delta x(0)^2 + (\Delta v_g t)^2} = \sqrt{\Delta x(0)^2 + \left( \frac{d^2\omega}{dk^2} \right)^2 \frac{t^2}{\Delta x(0)^2}} \quad (2)$$

Compare a equação acima com a dedução do apêndice B. A expressão acima para  $\Delta x(t)$  mostra que se  $d^2\omega/dk^2 \neq 0$ , um pulso estreito espalha-se rapidamente em virtude do seu amplo espectro de números de onda. Os efeitos dispersivos sobre o pulso são maiores quanto mais estreito for o pulso, ou seja, quanto menor for a sua largura em  $t = 0$ ,  $\Delta x(0)$ . Para que o alargamento seja desprezível, temos a condição  $\Delta x(0) \gg t d^2\omega/dk^2$ , ou seja, uma pequena dispersão. Para intervalos de tempo grandes, a largura do pulso aumenta linearmente com o tempo, mas o tempo necessário para atingir a forma assintótica depende da razão  $d^2\omega/dk^2 / \Delta x(0)$ .

A figura 6.12 ilustra o que acabou de ser comentado. O pulso da esquerda não é muito estreito em comparação com  $1/k_0$  e por isto não se alarga com muita rapidez. O pulso da direita é tão estreito inicialmente que se alarga muito rapidamente.

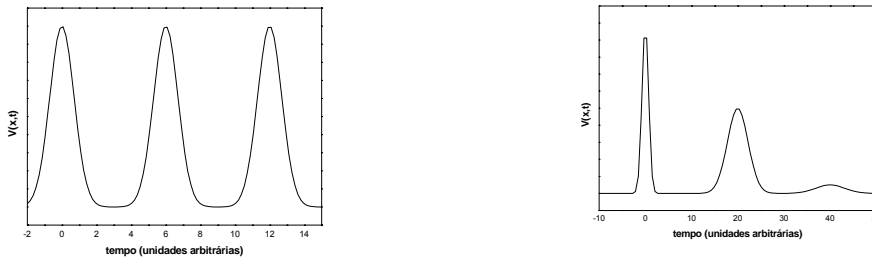


Figura 6.12: Esquerda: pulso que se propaga em um meio sem dispersão. Direita: pulso em um meio muito dispersivo.

## 6.6 CASAMENTO DE IMPEDÂNCIAS

Se o cabo coaxial é terminado com uma carga puramente resistiva, de impedância  $Z$ , o pulso será refletido ou transmitido no final da linha. O coeficiente de transmissão, como vimos anteriormente, é dado por

$$T = \frac{2Z}{Z + Z_o} \quad (3)$$

onde  $T$  é definido com a razão entre os sinais transmitido e incidente.

$$T = \frac{V_t}{V_o} \quad (4)$$

No caso limite de uma carga de impedância infinita, o sinal transmitido é duas vezes maior do que o sinal incidente. Por outro lado, se  $Z$  é igual à impedância do cabo,  $Z_o$ , o sinal transmitido é igual ao incidente. Adicionando-se um potenciômetro em paralelo, conforme ilustrado na figura 6.13, podemos medir o sinal transmitido em função de  $Z$ .



Figura 6.13: O casador de impedâncias

No caso das impedâncias do cabo e do osciloscópio não estarem casadas, ocorrerão várias reflexões, conforme ilustrado na parte esquerda da figura 6.14. Para melhor entendimento, o leitor deve recorrer à figura 6.8. Quando ocorre o casamento das impedâncias do cabo com a do osciloscópio, o pulso será totalmente transmitido, não ocorrendo nenhuma reflexão, conforme mostra a parte direita da figura 6.14.

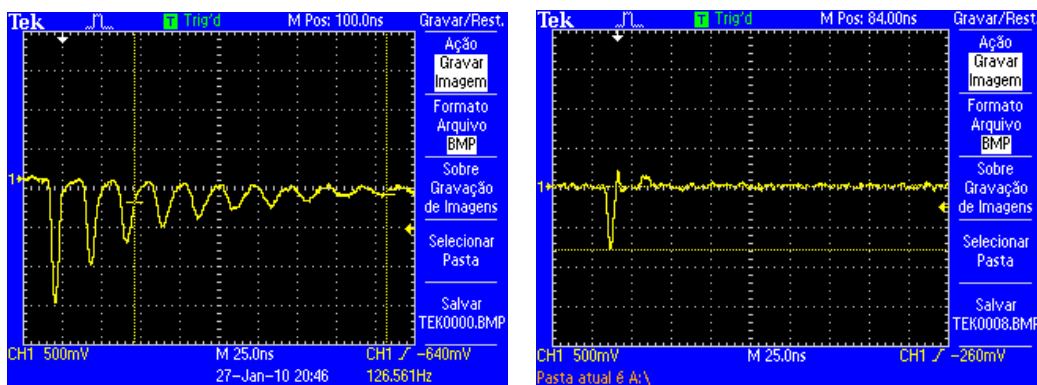


Figura 6.14: Pulsos rápidos vistos em um osciloscópio. Esquerda : sem casamento de impedância. Direita : com casamento de impedância.

Outra maneira de estudar a dependência de  $T$  com  $Z$  é tornar linear a eq. (3).

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{2} + \frac{Z_o}{2Z} \quad (5)$$

Assim, o gráfico do inverso do coeficiente de transmissão  $1/T$  em função de  $1/(2Z)$ , recai em uma reta cujo coeficiente angular nos fornece a impedância do cabo, como mostra a figura 6.15A. Por outro lado, a figura 6.15B mostra o gráfico do coeficiente de transmissão em função de  $Z$ .

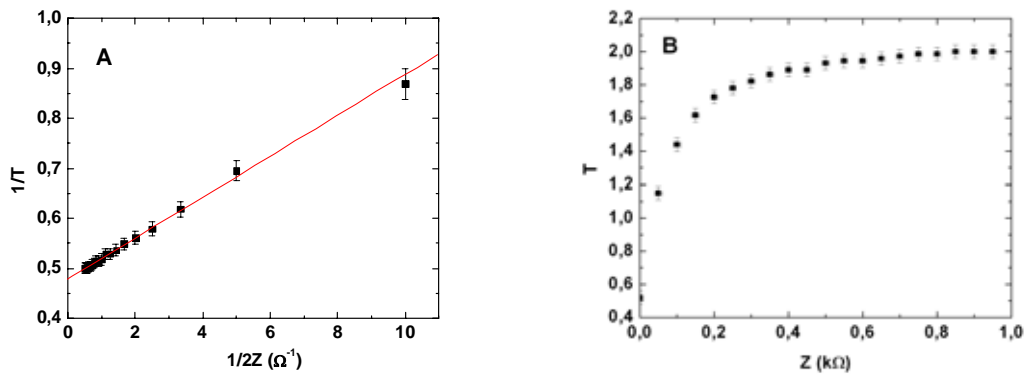


Figura 6.15: A) gráfico do inverso de  $T$  em função do inverso de  $Z$ ; B) Coeficiente de transmissão em função da impedância equivalente.

O coeficiente de transmissão é determinado da seguinte forma: primeiramente mede-se a amplitude  $V_t$  do pulso rápido ao final do cabo coaxial usando um osciloscópio sem casamento de impedância, como mostrado na parte esquerda da figura 6.14. O pulso de interesse é o primeiro (no tempo). Os pulsos seguintes são relacionados às múltiplas reflexões nas duas extremidades do cabo coaxial. De acordo com a equação (6), a medida do sinal corresponde ao dobro do sinal incidente, isto é,  $V_t = 2V_0$ . Em seguida, acrescenta-se o potenciômetro em paralelo e mede-se a amplitude do pulso transmitido,  $V_t$  (mais uma vez o primeiro no tempo) como uma função de  $Z$ . O coeficiente de transmissão é determinado por

$$T = \frac{V_t}{V_o} \quad (6)$$

A figura 6.15B mostra este gráfico. O valor experimental do  $Z_{\text{cabo}}$  é  $48 \Omega \pm 4 \Omega$ , em concordância com o valor nominal da impedância do cabo coaxial.

# Capítulo 7 METAMATERIAIS E REFRAÇÃO NEGATIVA

## 7.1 CLASSIFICANDO OS MATERIAIS ÓTICOS

Embora todos os materiais naturais conhecidos possuam índice de refração positivo, a possibilidade de materiais com  $n < 0$  foi sugerida na década de 1960, quando Victor Veselago percebeu que tais meios não violariam nenhuma lei da física [Veselago 1968]. Veselago classificou os materiais de acordo com a sua permissividade elétrica  $\epsilon$  e permeabilidade magnética  $\mu$ , com os resultados mostrados na figura 7.1.

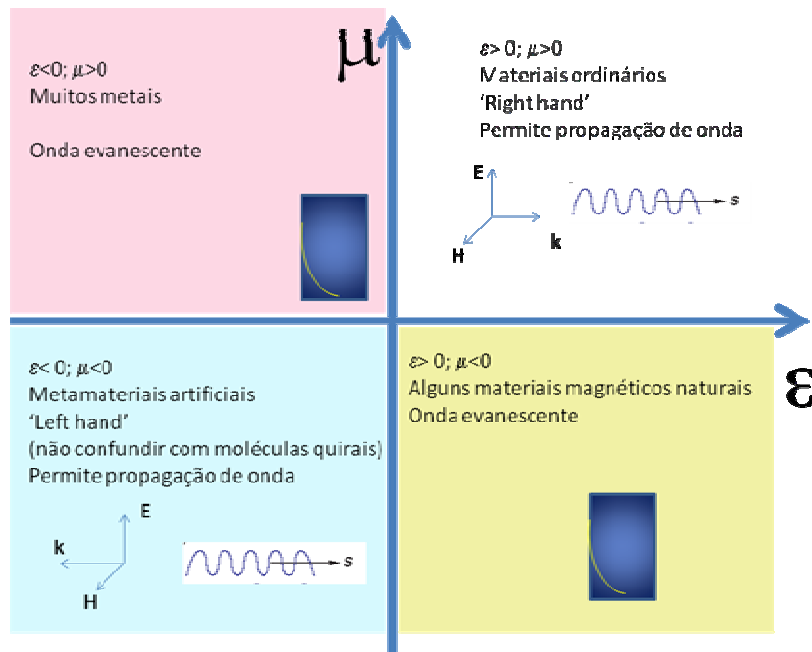


Figura 7.1: Materiais classificados em termos do sinal de  $\epsilon$  e de  $\mu$ .

A propagação de ondas eletromagnéticas é possível nos materiais do primeiro quadrante da figura 7.1, onde  $\epsilon$  e  $\mu$  são ambos positivos. Esses são os meios transparentes usuais, com índice de refração positivo. Nos materiais do segundo e quarto quadrantes, que têm  $\epsilon$  e  $\mu$  com sinais contrários, não há propagação ondulatória. Apenas ondas evanescentes penetram nesses meios, cujos índices de refração são imaginários. No terceiro quadrante estão os materiais com  $\epsilon$  e  $\mu$  negativos. A propagação de ondas torna-se novamente possível nesses meios, mas com um detalhe: o índice de refração é negativo. Esse último resultado não é imediato. Como  $n^2 = \epsilon\mu/\epsilon_0\mu_0$  é positivo, não é claro que  $n$  deva ser necessariamente negativo. A demonstração envolve a consideração das (pequenas) partes imaginárias de  $n$ ,  $\epsilon$  e  $\mu$ , e está

feita no anexo A. O resultado é que se  $\epsilon$  e  $\mu$  forem negativos,  $n$  também será negativo. A figura 7.1 mostra outra peculiaridade dos meios com  $\epsilon < 0$  e  $\mu < 0$ : os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  de uma onda eletromagnética formam um sistema de mão esquerda com o vetor de onda  $\vec{k}$ . Por isso Veselago chamou esses materiais de “canhotos” (“*left handed materials*”). Num material canhoto, o vetor de Poynting  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$  e o vetor de onda  $\vec{k}$  apontam em sentidos opostos. Como a velocidade de fase tem a mesma direção e sentido do vetor de onda, nos materiais canhotos a energia se propaga em sentido contrário ao deslocamento dos pontos de fase constante (cristas e vales, por exemplo).

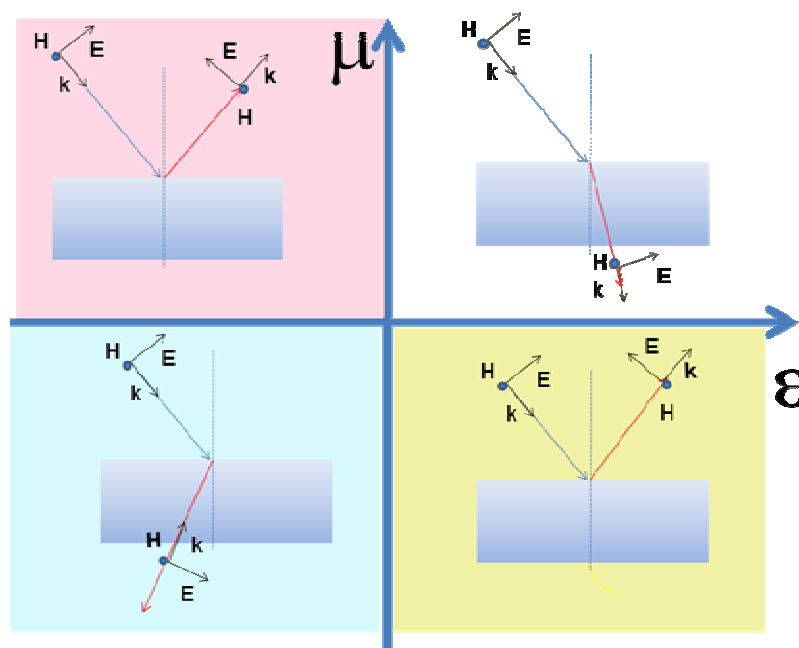


Figura 7.2: Refração de raios para os quatro tipos de meios óticos.

A figura 7.2 ilustra o que acontece quando um raio luminoso encontra um meio com  $\epsilon$  e  $\mu$  dados. No caso de materiais convencionais ( $\epsilon > 0$  e  $\mu > 0$ ), o raio é refratado de modo a se aproximar ou se afastar da normal. Os materiais que estão no segundo quadrante da figura 7.2, com  $\epsilon < 0$  e  $\mu > 0$ , refletem completamente a radiação – apenas ondas evanescentes conseguem penetrar neles. Plasmas e a maioria dos metais estão entre esses meios. A reflexão também ocorre nos meios com  $\epsilon > 0$  e  $\mu < 0$ , que também não permitem a propagação de ondas. Alguns materiais magnéticos estão entre esses últimos meios. No último tipo de material, aqueles com  $\epsilon < 0$  e  $\mu < 0$ , a refração volta a ocorrer, mas o raio refratado vai para o ‘lado errado’ da normal. Não existem materiais naturais conhecidos com  $\epsilon < 0$  e  $\mu < 0$ , mas



‘metamateriais’ com essa propriedade já foram produzidos em laboratório. Os detalhes sobre esses materiais ainda serão abordados neste capítulo.

Em um meio com  $\epsilon < 0$  e  $\mu < 0$ , o fato da luz ser refratada para o mesmo lado da normal em que se encontra o raio incidente é consequência do valor negativo do índice de refração. A lei de Snell

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (1)$$

vale tanto para meios com índice de refração positivos quanto negativos. Se  $n_1 > 0$ , o ângulo de refração  $\theta_2$  muda de sinal (‘troca de lado’) dependendo do sinal de  $n_2$ , como está mostrado na figura 7.3.

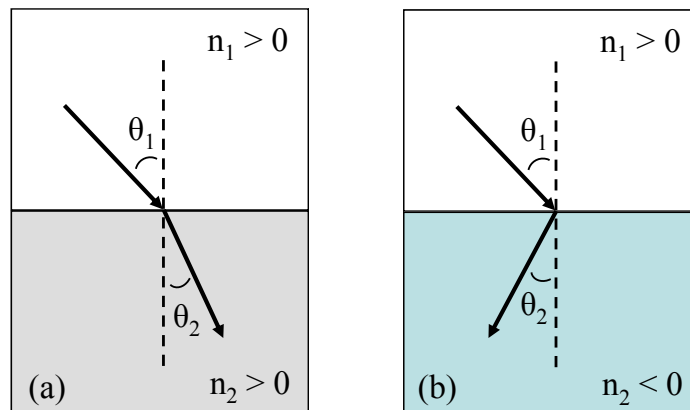


Figura 7.3: (a) Refração de um raio de luz ao passar pela interface entre dois meios com índices de refração positivos; (b) refração de um raio de luz que passa de um meio de índice de refração positivo para outro de índice negativo.

Além da refração para o ‘lado errado’ da normal, Veselago previu que materiais com  $n < 0$  apresentariam outros fenômenos surpreendentes: inversão do efeito Doppler e da radiação Cherenkov, lentes planas, etc. Apesar de todas essas possibilidades inusitadas e potencialmente muito úteis, as ideias de Veselago permaneceram ignoradas por cerca de três décadas. O motivo foi, basicamente, a inexistência de materiais conhecidos com  $n < 0$ . Esta situação mudou em meados dos anos 90, quando John Pendry e colaboradores demonstraram que arranjos regulares de pequenos elementos metálicos poderiam comportar-se como materiais de  $\epsilon < 0$  ou  $\mu < 0$ , desde que o comprimento de onda da radiação eletromagnética fosse muito superior às dimensões dos componentes elementares [Pendry 1996, 1999]. As estruturas estudadas por Pendry vieram a ser chamadas de *metamateriais*. Os componentes metálicos elementares de um metamaterial desempenham papel semelhante ao dos átomos ou moléculas de um material comum. Para grandes comprimentos de onda, os detalhes

estruturais perdem importância e os meios podem ser considerados como homogêneos, descritos por suas propriedades macroscópicas  $\epsilon$ ,  $\mu$  e  $n$ .

Em 2000, David Smith e colaboradores produziram na Universidade da Califórnia em San Diego (UCSD) estruturas semelhantes às propostas por Pendry e mostraram que elas possuíam índice de refração negativo na região de micro-ondas [Smith 2000, Shelby 2001]. Na próxima seção discutiremos com mais detalhes os metamateriais com índice de refração negativo.

## 7.2 METAMATERIAIS COM REFRAÇÃO NEGATIVA

Metamateriais são confeccionados de modo a aproveitar a resposta eletromagnética de seus elementos básicos (as ‘metamoléculas’) para a obtenção dos valores desejados de  $\epsilon$ ,  $\mu$  e  $n$ . Como já mencionamos, isso só faz sentido quando o comprimento de onda da radiação incidente for bem maior que as dimensões típicas desses elementos. Como a onda não consegue “enxergar” um circuito elementar individualmente, a resposta obtida é fruto da influência da onda sobre muitos deles.

Quando uma onda eletromagnética percorre um material convencional, a ação do campo elétrico imprime aos elétrons do meio um movimento oscilatório, de “vai e vem”. O campo magnético da onda, por sua vez, tende a produzir um movimento circular nos elétrons. Os dois efeitos estão ilustrados na figura 7.4 (adaptada de [Pendry 2006]).

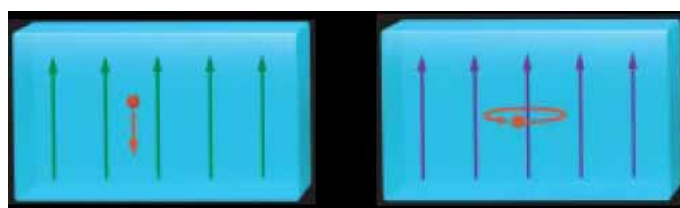


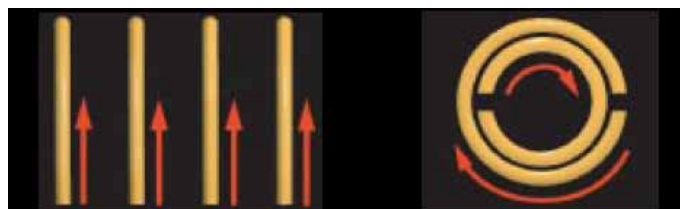
Figura 7.4: Movimento linear dos elétrons induzido pelo campo elétrico da radiação (esquerda); movimento circular induzido pelo campo magnético (direita). Adaptado de [Pendry 2006].

Em um material onde  $\epsilon < 0$  e  $\mu < 0$ , os movimentos oscilatório e circular dos elétrons terão sentidos opostos ao das forças geradas pelos campos elétrico e magnético da onda incidente, o que pode parecer estranho à primeira vista. O que acontece foi ilustrado por Pendry e Smith da seguinte maneira [Pendry 2006]: “Pense em um balanço: aplicando um empurrão lento e constante, o balanço se move obedecendo a direção do impulso, embora não oscile muito alto. Uma vez posto em movimento, o balanço tende a oscilar para frente e

*para trás, a uma taxa especial, conhecida tecnicamente como sua frequência de ressonância. Empurrando o balanço periodicamente, com o tempo ele oscila mais alto. Agora, empurrando mais rápido, o impulso sai da fase do movimento do balanço e, em certo momento, seus braços podem estar estendidos com o balanço vindo para trás. Se você empurrar por algum tempo, o balanço pode te empurrar de volta. Da mesma forma, os elétrons em um material de índice de refração negativo, saem da fase e resistem ao “empurrão” do campo eletromagnético.”*

Esse é, exatamente, o comportamento apresentado pelos osciladores atômicos do modelo de Lorentz que discutimos no capítulo 3. Acima da ressonância o momento de dipolo induzido pela onda opõe-se ao campo elétrico, dando origem a uma permissividade elétrica  $\epsilon < \epsilon_0$  inferior à do vácuo, que pode inclusive chegar a valores negativos, como vemos na equação (3.31). Mecanismo semelhante pode ocorrer em algumas substâncias magnéticas, produzindo valores de  $\mu$  inferiores ao do vácuo e até negativos. O problema é que parece não existir na natureza um material em que essas duas situações extremas,  $\epsilon < 0$  e  $\mu < 0$ , ocorram para a mesma frequência da radiação incidente.

O interesse despertado pelos metamateriais vem da possibilidade de se projetar seus elementos básicos de forma que tanto  $\epsilon$  quanto  $\mu$  sejam negativos em uma mesma faixa de frequências, uma flexibilidade que não é oferecida pelas moléculas e átomos encontrados na natureza. A permissividade elétrica, associada ao movimento de “vai e vem” dos elétrons, foi gerada nos metamateriais de Pendry e Smith através de um gradeamento ordenado de fios de metal. A permeabilidade magnética, associada ao efeito de correntes circulares, foi produzida por um conjunto de “anéis partidos ressonantes” (*split-ring resonators*, SRR). Esses dois elementos estão mostrados na figura 7.5.



*Figura 7.5: Os elementos básicos dos metamateriais de Pendry e Smith. Os fios de metal (esquerda) geram a permissividade elétrica, e os anéis partidos – SRRs –, a permeabilidade magnética. Adaptado de [Pendry 2006].*

Dois metamateriais produzidos pelo grupo da UCSD com esses elementos estão mostrados na figura 7.6. Cada célula elementar mede cerca de 5 mm e contem um fio metálico e um anel partido. A refração nesses metamateriais foi estudada com micro-ondas de

comprimento de onda da ordem de alguns centímetros, bem maiores que as dimensões das células.



Figura 7.6: Metamateriais construídos com fios metálicos para produzir a resposta elétrica e SRRs para o efeito magnético. Adaptado de [Pendry 2006].

A equipe da UCSD mediu a refração de micro-ondas nesses metamateriais, e comparou o resultado com a refração no Teflon, um material convencional com  $n > 0$ . Os resultados estão mostrados na figura 7.7. A radiação no Teflon foi refratada por um ângulo positivo, enquanto que a refração no metamaterial ocorreu para ângulos negativos. Nos dois casos a radiação saiu do meio (metamaterial ou Teflon) para o ar, com um ângulo de incidência de  $18,43^\circ$ . Usando esse número e a lei de Snell, é fácil ver da figura 7.7 que o índice de refração do metamaterial é  $n = -2,7$ . O material imaginado por Veselago tinha sido finalmente criado.

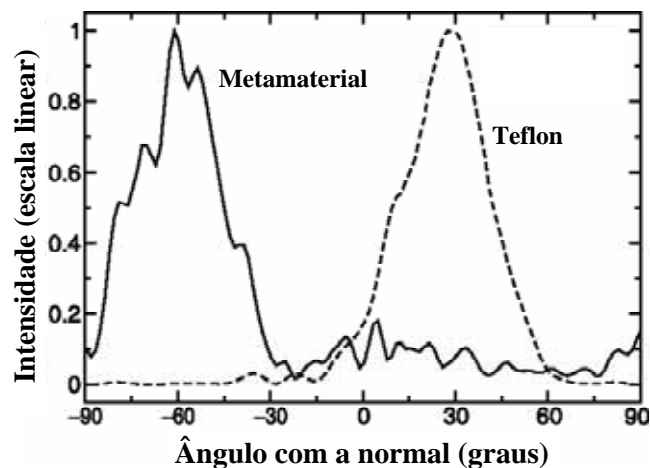


Figura 7.7: A intensidade da radiação refratada como função do ângulo, medida no experimento da UCSD. A linha tracejada indica a refração positiva no Teflon, e a linha cheia mostra a refração negativa no metamaterial (note o ângulo de refração negativo). Adaptado de [Shelby 2001].

O experimento da UCSD foi seguido por inúmeros outros, que confirmaram a existência de índices de refração negativos em metamateriais com diferentes estruturas e em vários comprimentos de onda. Embora a maioria dos experimentos tenha sido realizada com

micro-ondas, parece já ser possível produzir refração negativa até mesmo com luz visível [Lezec 2007, Burgos 2010].

## 7.3 CONSEQUÊNCIAS DA REFRAÇÃO NEGATIVA

### 7.3.1 Velocidade de fase negativa

Como a luz se propaga num metamaterial com  $n < 0$ ? Se a velocidade de fase em um material é  $v_f = c/n$ , essa expressão sugere que a luz “anda para trás” ( $v_f < 0$ ) em um meio com índice de refração negativo. Por estranho que pareça, num certo sentido é isso que ocorre. Para entender o que isso quer dizer, lembremos que, como visto no capítulo 4, uma onda que se propaga em um meio dispersivo não possui uma única velocidade. Além da velocidade de fase, muitas outras velocidades podem ser definidas e usadas. Pelo menos duas delas merecem destaque nos meios de refração negativa: a velocidade com que os pacotes de onda se propagam (a velocidade de grupo)  $v_g$ , e a velocidade com que a energia é transportada,  $v_e$ . Embora a velocidade de fase nos metamateriais com  $n < 0$  seja negativa, as velocidades de grupo e da energia são positivas. É isso que significa a onda eletromagnética “andar para trás” no metamaterial: a energia e os pacotes de onda se propagam em um sentido, mas as ondulações que compõem a onda vão em sentido oposto. Isso está ilustrado na figura 7.8, que compara as velocidades de energia, grupo e fase em materiais convencionais e em metamateriais com refração negativa.

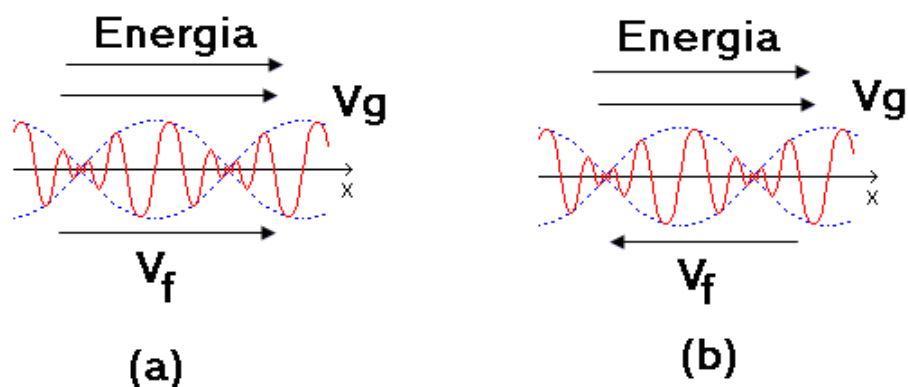


Figura 7.8: (a) Em um meio de índice positivo, as ondulações individuais de um pulso eletromagnético ( $v_f$  é a velocidade de fase) viajam na mesma direção e sentido da forma global do pulso ( $v_g$  é a velocidade de grupo) e da energia. (b) Em um meio de índice negativo, as ondulações individuais viajam no sentido oposto ao da forma do pulso e da energia.

A velocidade de fase negativa tem consequências surpreendentes. Por exemplo, se uma fonte luminosa é colocada no interior de um metamaterial com  $n < 0$ , os máximos e mínimos da onda emitida se movem na direção da fonte ao invés de afastar-se dela.

### 7.3.2 Formação de imagens em um meio com índice de refração negativo

A refração negativa pode criar mais surpresas. A figura 7.9 mostra dois lápis, um mergulhado num meio com índice de refração positivo e outro imerso em um meio com índice negativo [Pendry 2006]. No primeiro caso vemos uma situação familiar: a imagem da parte mergulhada parece ‘quebrada’, mas ainda está localizada no interior do meio. No caso do meio com índice de refração negativo, a quebra é tão acentuada que a imagem é formada acima da superfície do meio. A ‘profundidade aparente’ observada nos meios usuais (como a água) é substituída pela ‘altura aparente’.

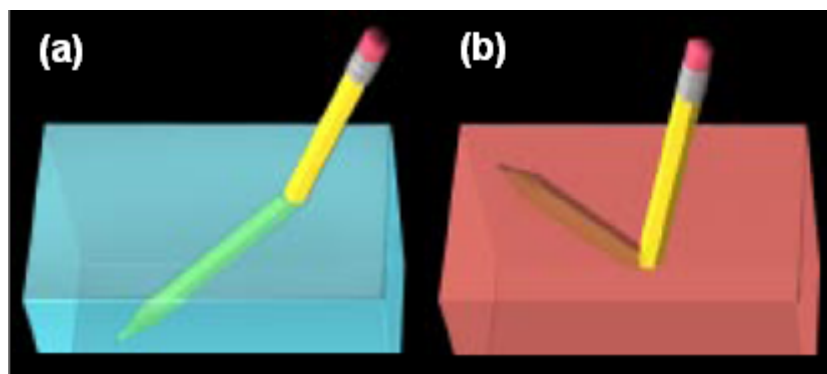


Figura 7.9: (a) O lápis parece dobrado dentro de um meio (água, por exemplo) com índice de refração maior que o do ar; (b) o lápis imerso em um meio com índice negativo parece dobrar-se para fora do meio. Adaptado de [Pendry 2006].

Estendendo esta ideia para outras situações, se tivéssemos um lago com “água” de índice de refração negativo, os peixes seriam vistos nadando acima da superfície. O próprio fundo do lago seria visto acima dele.

### 7.3.3 Lentes planas

Lentes convencionais têm superfícies curvas, que podem ser côncavas ou convexas. Se tiver índice de refração negativo, entretanto, uma lente não necessita de curvatura para focalizar a luz. A figura 7.10 mostra uma ‘lente plana’ com índice de refração  $n = -1$ ,

proposta por Veselago em seu trabalho original. A lente forma duas imagens reais, uma no seu interior e outra no lado oposto àquele onde se encontra o objeto.

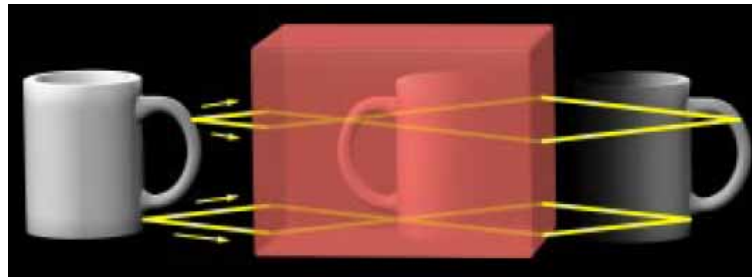


Figura 7.10: Lente plana com índice de refração negativo. Adaptado de [Pendry 2006].

A figura 7.11 ilustra a refração por placas de índice de refração positivo e negativo. Vemos que apenas a placa com refração negativa é capaz de focalizar a luz.

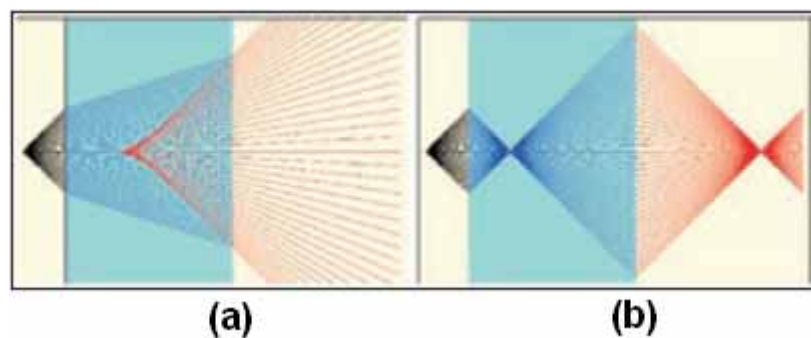


Figura 7.11: (a) Imagem de um ponto através de uma lâmina de índice  $n = 2,3$ ;  
(b) imagem do mesmo ponto fornecida por uma lâmina de índice  $n = -1$ .

Lentes convencionais também são incapazes de produzir imagens perfeitas. Há um limite para a resolução de imagens, o *limite de difração*, que tem origem ondulatória e, portanto, é ignorado no traçado de raios luminosos. Ernst Abbe, em 1873, foi o primeiro a definir o limite de difração, quando afirmou que: “...mesmo com lentes perfeitas, é impossível definir detalhes menores do que a metade do comprimento de onda da luz que produz a imagem. No caso da luz visível, isso significa que objetos menores que algumas centenas de nanômetros nunca poderão ser vistos.”

Em 2000, Pendry mostrou que a lente plana de Veselago era capaz de superar o limite de difração [Pendry 2000]. Pouco tempo depois, em 2004, Anthony Grbic e George Eleftheriades [Grbic 2004] demonstraram experimentalmente que uma linha de transmissão bidimensional projetada para ter  $\epsilon = -1$  e  $\mu = -1$  em frequências de rádio podia realmente criar imagens com detalhes mais finos que o permitido pelo limite de difração. Por isso as lentes planas de Veselago passaram a ser chamadas de *superlentes*.

### 7.3.4 Refração negativa na computação gráfica

O POV-Ray (<http://www.povray.org/>) é um programa de computação gráfica que cria imagens fotorealistas simulando o traçado dos raios luminosos que iluminam um objeto e seu entorno. Essas simulações podem ser estendidas a materiais com índice de refração negativo e dão uma boa ideia de quão estranhos são os efeitos óticos encontrados nesses sistemas [Dolling 2006, Hormann 2007].

Por exemplo, a figura 7.12 mostra lentes convexas e côncavas com índice de refração negativo, simuladas no POV-Ray [Hormann 2007]. O comportamento da luz nessas lentes é o oposto do encontrado nas lentes normais: as lentes de refração negativa convexas são divergentes e as côncavas são convergentes.

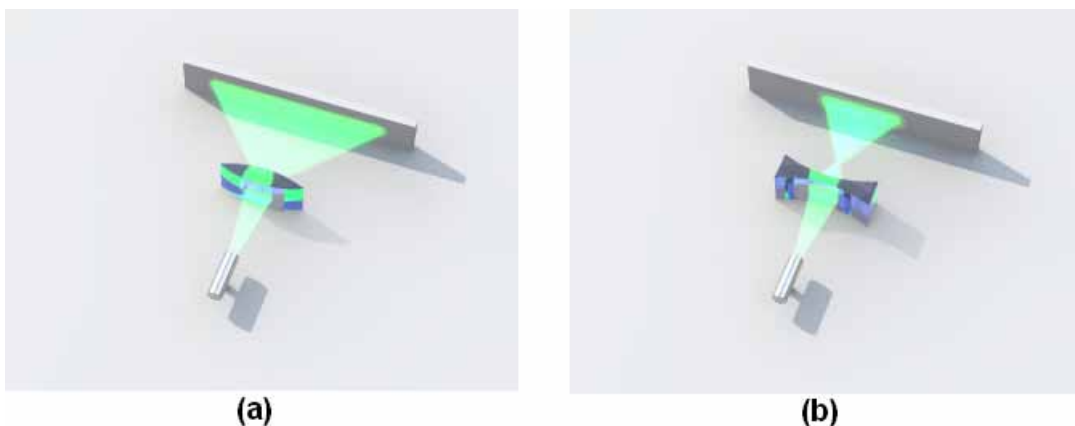


Figura 7.12: Lentes com índice de refração negativo. (a) Faces convexas; (b) faces côncavas.  
Adaptado de [Hormann 2007].

Outro exemplo, presente em qualquer livro texto de ótica, é o do canudinho em um copo d'água. A figura 7.13 mostra três situações diferentes. Na primeira imagem (a) o copo está vazio; na segunda (b) ele contém água de índice de refração  $n = 1,3$ ; e na última (c) a “água” tem índice de refração negativo  $n = -1,3$ . A diferença entre os dois últimos casos é marcante; em particular, vemos que no caso (c) a imagem do canudo está quebrada para o lado “errado”, o esquerdo.



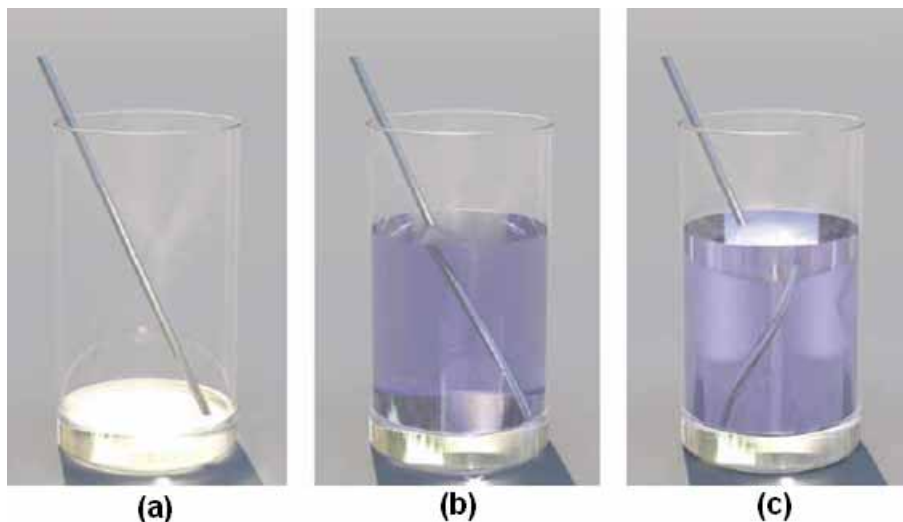


Figura 7.13: (a) Copo vazio; (b) copo com água de índice  $n = 1,3$ ; (c) copo com “água” de índice  $n = -1,3$ . Adaptado de [Dolling 2006].

Situação parecida é a simulação de uma piscina cheia de “água” com índice de refração negativo, mostrada na figura 7.14 [Danner 2009]. Para melhor comparação, a figura 7.14 (a) mostra a piscina com água de índice de refração positivo  $n = 1,33$ . Ao observarmos a figura 7.14 (b), onde a “água” possui índice de refração negativo  $n = -1,33$ , notamos que os pontos do fundo da piscina estão “flutuando”, tanto que é possível observar o canto da piscina acima da borda.

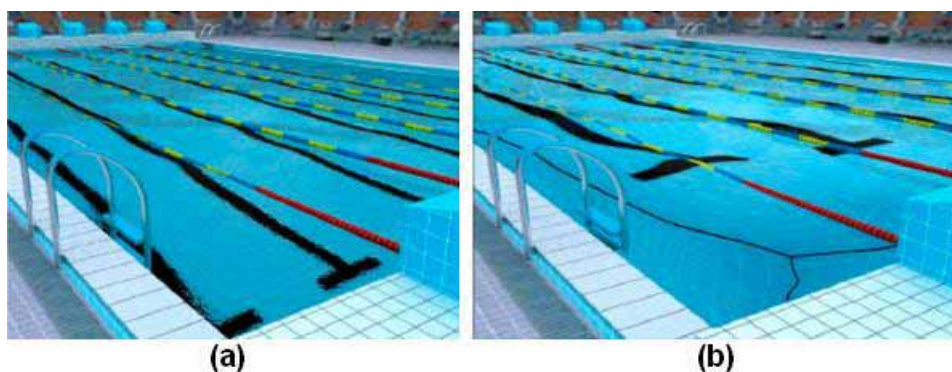


Figura 7.14: (a) Piscina com água de índice  $n = 1,33$ ; (b) piscina com “água” de índice  $n = -1,33$ . Adaptado de [Danner 2009].

### 7.3.5 Ampliação de objetos ‘submersos’

Quando um objeto mergulha em um meio de refração negativa, sua imagem é formada acima da superfície. Para um observador que também está acima da superfície, o objeto

parecerá mais próximo e, portanto, maior. O fator de ampliação pode ser calculado com um pouco de geometria [Dolling 2006].

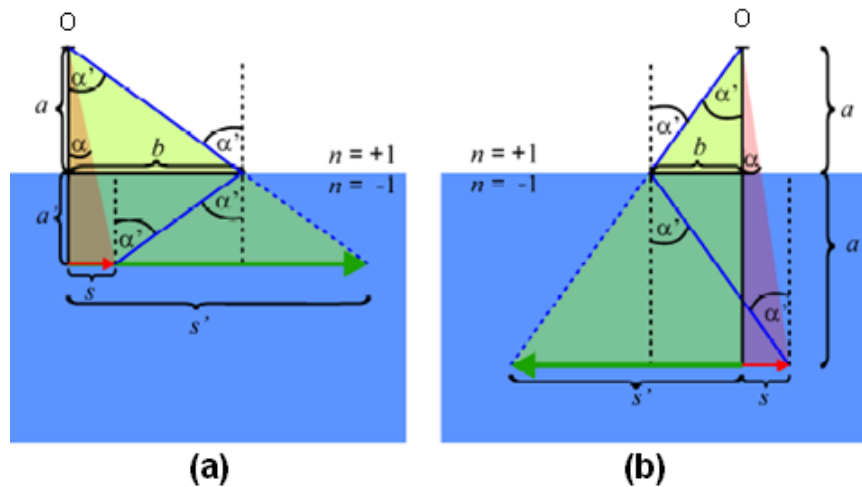


Figura 7.15: ampliação com a profundidade  $a'$  de um objeto (a seta de tamanho  $S$ ) em um meio com  $n = -1$ . (a)  $a' < a$ ; (b)  $a' > a$ . Adaptado de [Dolling 2006].

A figura 7.15 mostra a superfície de separação do ar, cujo índice de refração vale  $n = +1$ , e a “água“ de índice de refração  $n = -1$ . Um objeto de tamanho  $S$ , representado por uma seta, se localiza a uma distância  $a'$ , abaixo da interface ar-água. Do objeto partem raios luminosos, que são negativamente refratados na superfície, e chegam a um observador em  $O$ , situado a uma distância  $a$  acima da superfície e olhando diretamente para baixo. Para o observador, a imagem do objeto parece ampliada e de tamanho igual a  $S'$ , devido a um ângulo de visão  $\alpha'$ , que é aumentado em relação a  $\alpha$ , que é o ângulo de visão do objeto, se os raios luminosos seguissem seu trajeto exclusivamente no ar. A razão entre o tamanho da imagem, vista pelo observador, e o tamanho do objeto, ou seja,  $S'/S$ , é o fator de ampliação. Dos triângulos formados na figura, podemos escrever:

$$\frac{S'}{S} = \frac{(a + a')}{(a - a')} \quad (2)$$

É claro que o fator de ampliação depende das posições do observador e do objeto, em relação à superfície de separação dos dois meios. Mantendo fixa a posição  $a$  do observador e variando a posição  $a'$  do objeto, concluímos que:

- Quando o objeto está na superfície, isto é,  $a' = 0$ , o tamanho da imagem é igual ao tamanho do objeto, pois  $S' = S$ ;

- Estando o objeto a uma profundidade igual à posição do observador, ou seja,  $a' = a$ , o fator de ampliação tende para infinito ( $S'/S \rightarrow \infty$ ) e a imagem parece estar na face do observador;
- Para  $a' > a$ , a imagem fica invertida em relação ao objeto, uma vez que  $S'/S < 0$ , o que pode ser observado na figura 7.15 (b)

O curioso é que, as conclusões a que chegamos pela análise da expressão do fator de ampliação, podem ser observadas nas sequências de quadros mostrados nas figuras 7.16 e 7.17, a seguir [Dolling 2006].

Na sequência da figura 7.16 (a), temos uma bola colorida que desce verticalmente na “água” com velocidade constante  $v$ , isto é, ela se afasta do observador que está na posição  $X$ . A figura 7.16 (b) mostra a visão do observador, com a bola se afastando dele com velocidade constante  $v$  em um líquido de índice de refração  $n = +1$  (ou seja, sem refração alguma); e a figura 7.16 (c) mostra a bola caindo em um “líquido” de índice de refração  $n = -1$ . Observando a sequência, de cima para baixo, dos quatro quadros, nota-se que:

- No primeiro quadro, temos  $a' = 0$ , ou seja,  $S' = S$ ;
- No segundo, no intervalo onde  $0 < a' < a$ , é observado que, com o aumento de  $a'$ , o tamanho da imagem  $S'$  também aumenta – embora a bola esteja se afastando do observador na “água” de índice de refração negativo, ela parece estar se aproximando;
- No terceiro quadro da sequência, chega-se ao ponto onde  $a' = a$  e  $S'$  tende para infinito;
- No quarto, quando  $a'$  passa ser maior que  $a$  e ocorre uma inversão da imagem, que pode ser observada pelo posicionamento das cores na bola, e  $S'$  volta a diminuir;

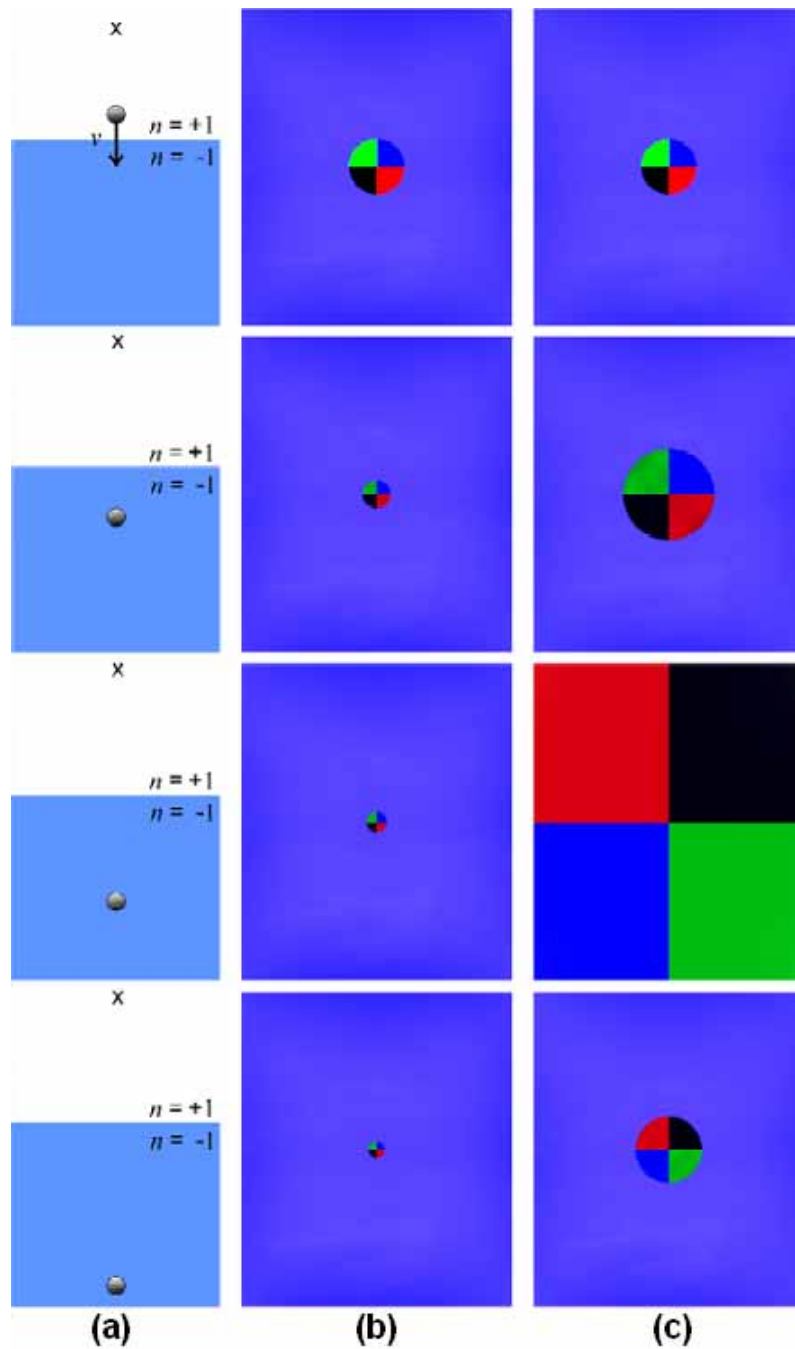


Figura 7.16: (a) Posições da bola e de um observador  $X$  que olha diretamente para baixo; (b) a bola caindo em um meio com  $n = +1$ , tal como vista pelo observador; (c) a bola caindo em um meio com  $n = -1$ , vista pelo observador. É mostrada a dimensão infinita quando  $a' = a$ . Adaptado de [Dolling 2006].

A sequência da figura 7.17 é mais complexa, pois mostra um objeto retilíneo (uma seta) em vez de uma pequena bola. Nesta série de imagens, as deformações do objeto não são tão uniformes como na figura 7.16, porque as profundidades  $a'$  dos diversos pontos do objeto não são as mesmas, ou seja, as extremidades do objeto estão em profundidades diferentes. No entanto, as variações no fator de ampliação continuam válidas.

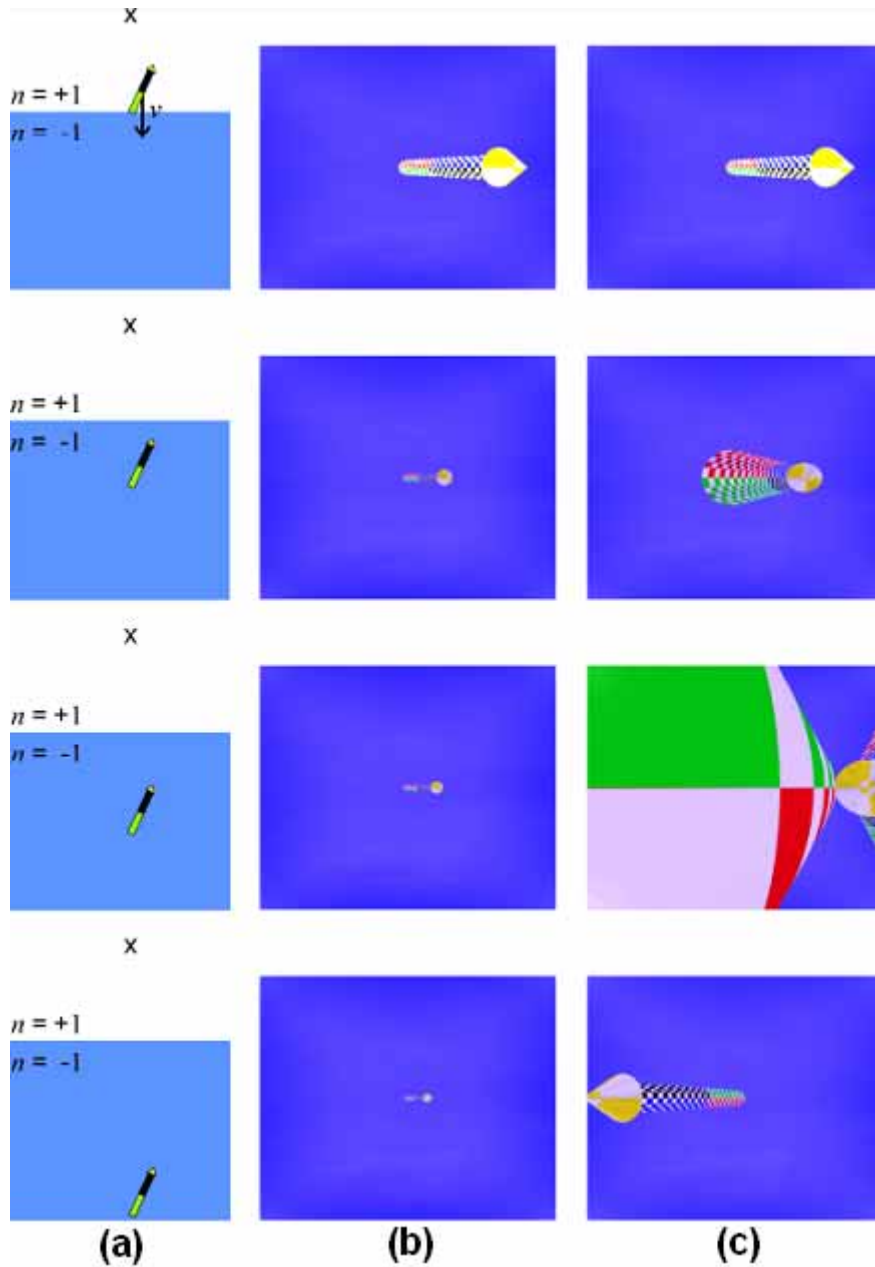


Figura 7.17: (a) Posições da seta e de um observador  $X$  que olha diretamente para baixo; (b) a seta caindo em um meio com  $n = +1$ , tal como vista pelo observador; (c) a seta caindo em um meio com  $n = -1$ , vista pelo observador. A distorção extrema da seta ocorre quando  $a' = a$ . Adaptado de [Dolling 2006].

# Capítulo 8    REFRAÇÃO NEGATIVA E GEOMETRIA DINÂMICA

---

## 8.1 PERSPECTIVAS DE APLICAÇÃO NO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo discutiremos como um programa de geometria dinâmica pode ser utilizado para estudar sistemas óticos com refração negativa. A Ótica Geométrica desses sistemas é simples e pode ser facilmente integrada aos cursos introdutórios de Física. O ensino da Ótica Geométrica tem muito a ganhar com a inserção da refração negativa, uma vez que ela traz um tema novo e interessante para dentro das salas de aula. O interesse pedagógico dessa inclusão é duplo. Primeiro, ela permite levar a cursos introdutórios de Física um tema muito atual, com aspectos teóricos e aplicações práticas surpreendentes. Em segundo lugar, o próprio ensino da Ótica tradicional pode ser beneficiado pela incursão aos domínios da refração negativa. Isso colocaria vários resultados encontrados nos livros-texto usuais sob uma perspectiva nova e instigante, que poderia ser aproveitada para atrair o interesse dos estudantes e motivar estudos mais abrangentes e profundos.

Do ponto de vista da Ótica Geométrica, o aspecto fundamental dos materiais previstos por Veselago é a refração para o lado “errado” da linha normal, como está mostrado na figura 8.1. Essa propriedade será a responsável por todos os efeitos estranhos que veremos a seguir.

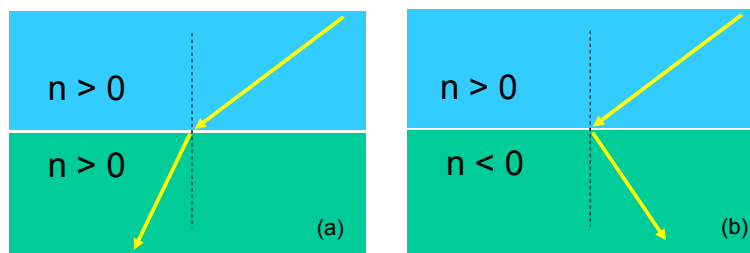
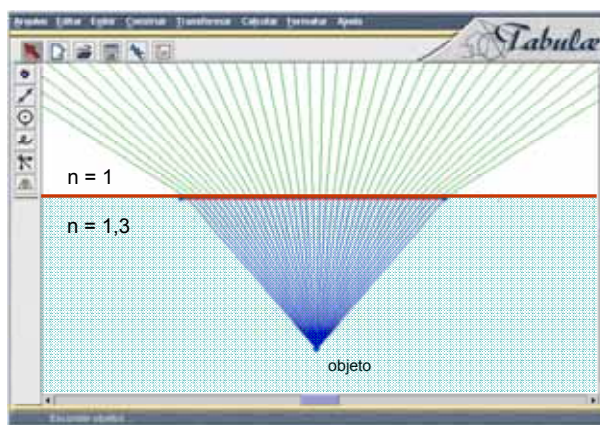


Figura 8.1: Desvio do raio de luz ao penetrar em um meio com índice de refração (a) positivo e (b) negativo.

Como já mencionamos, nossa discussão dos sistemas com refração negativa será baseada nos ambientes de geometria dinâmica. Os programas de geometria dinâmica são “régua e compassos” virtuais, e têm sido muito utilizados por professores de matemática no ensino de geometria plana. Eles permitem que construções geométricas sejam facilmente produzidas na tela do computador e, o que é mais importante, modificadas dinamicamente com simples movimentos de *mouse*. Na Física, esses ambientes computacionais altamente

interativos podem ser especialmente úteis na aprendizagem de Ótica Geométrica [Aguiar 2009]. Como veremos neste capítulo, isso também é verdade para sistemas com índice de refração negativo. Na próxima seção estudaremos uma situação simples, a interface entre dois meios, e mostraremos com auxílio da geometria dinâmica alguns efeitos já mencionamos no capítulo 7, como a troca da ‘profundidade aparente’ pela ‘altura aparente’. Em seguida investigaremos a lente plana de Veselago, um prisma com índice de refração negativo, e a ‘antimatéria ótica’. O programa de geometria dinâmica que utilizamos foi o *Tabulae*, desenvolvido no Instituto de Matemática da UFRJ (disponível em <http://tabulae.net>). Além de criar construções geométricas interativas, o *Tabulae* permite executá-las como *applets* na internet. Usamos essa característica do programa para produzir uma versão *on-line* do conteúdo deste capítulo, na qual é possível manipular diretamente os sistemas óticos, algo impossível de realizar com figuras estáticas impressas em papel.

## 8.2 REFRAÇÃO NEGATIVA EM UMA INTERFACE



*Figura 8.2: Refração de raios luminosos na interface entre dois meios convencionais, de índice de refração positivo. A figura foi produzida em um ambiente de geometria dinâmica. Nesses ambientes é possível interagir com a construção geométrica, alterando com movimentos de mouse a posição do objeto, os índices de refração, a forma da superfície, etc.*

A figura 8.2 mostra dois meios com índices de refração diferentes e positivos ( $n = 1,3$  e  $n = 1,0$ ), separados por uma fronteira plana. Raios de luz saem de uma fonte localizada no meio inferior. Detalhes sobre essa construção geométrica e suas propriedades interativas podem ser encontrados em [Aguiar 2009]. Vemos na figura que os raios refratados na parte superior parecem divergir de uma região situada abaixo da superfície. Para um observador

acima da interface, a imagem do objeto é formada no meio inferior, a uma “profundidade aparente” diversa daquela em que o objeto se encontra.

A situação muda drasticamente se um dos meios tiver índice de refração negativo. A figura 8.3 mostra o que ocorre quando o índice de refração do meio inferior, onde está imerso o objeto, for  $n = -0,9$ . O valor negativo de  $n$  altera completamente o comportamento dos raios refratados, que agora tendem a convergir no meio superior. Isso significa que a imagem do objeto luminoso é formada acima da superfície, ao contrário do que acontece na refração usual. Em outras palavras, uma moeda no fundo de uma piscina com “água” de índice de refração negativo, pareceria estar acima da superfície: não há profundidade aparente e sim “altura aparente”. Vários exemplos desse efeito foram discutidos no capítulo 7.

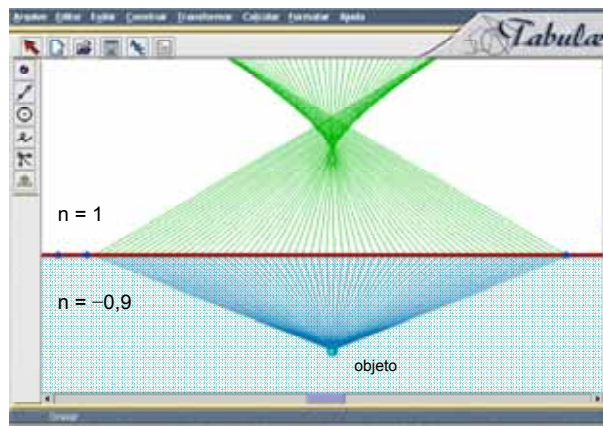


Figura 8.3: Desvio dos raios de luz quando um dos meios tem índice de refração negativo.

Também podemos observar na figura 8.3 que o objeto não produz uma imagem bem definida. Dependendo do ponto de observação, a imagem desloca-se ao longo de uma cáustica. Entretanto, se o índice de refração da região inferior for  $n = -1$ , a cáustica desaparece e uma imagem perfeita é formada, como pode ser visto na figura 8.4.

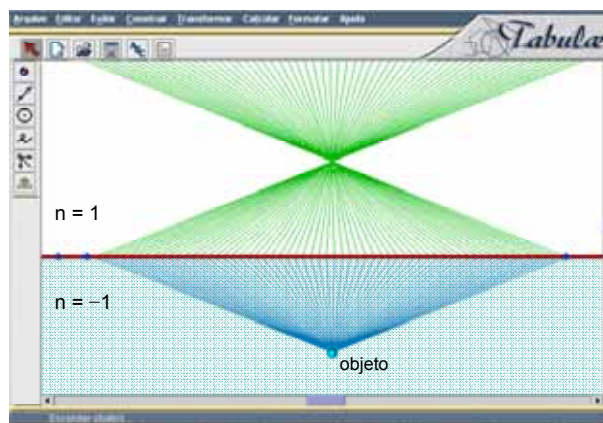


Figura 8.4: Imagem de um objeto imerso em um meio com índice de refração  $n = -1$ .



É importante ressaltar que, nos ambientes de geometria dinâmica, construções como as mostradas nas figuras 8.2, 8.3 e 8.4 não são imagens estáticas, mas sistemas altamente interativos. Com movimentos do *mouse* (clique, arrastar, etc.) é possível mudar dinamicamente aspectos como a posição do objeto, os índices de refração e a geometria da interface e estudar o efeito que essas modificações têm sobre a formação da imagem. A interatividade dos programas de geometria dinâmica dá aos estudantes a possibilidade de explorar sistemas óticos – e não apenas os de refração negativa – em um contexto de forte impacto visual e grande apelo intuitivo, um recurso que pode ser de muita utilidade na aprendizagem da Ótica Geométrica. A versão *on-line* deste capítulo, mencionada acima, permite essa interação dinâmica com as figuras.

### 8.3 A SUPERLENTE PLANA

Se o material com índice de refração negativo tiver a forma de uma placa plana de faces paralelas (como um vidro de janela), surgem novos efeitos curiosos. A figura 8.5 mostra o que acontece com a luz que atravessa uma placa de material tradicional, com índice de refração positivo. Basicamente, uma imagem virtual é formada nas proximidades do objeto.

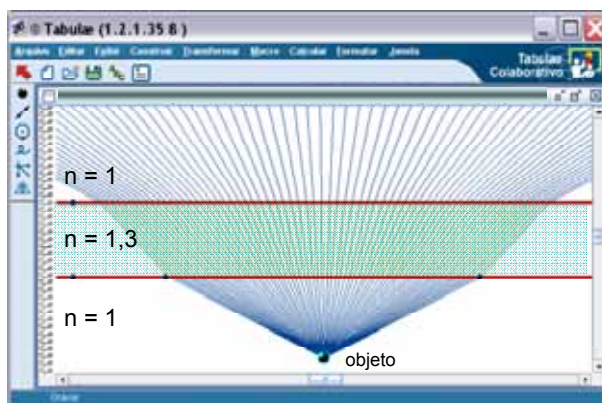


Figura 8.5: Refração da luz por uma placa com  $n = 1,3$ .

Uma situação bem diferente é observada se a placa possuir índice de refração negativo, como está ilustrado na figura 8.6. Vemos que duas imagens reais são formadas, uma dentro da placa e outra do lado oposto àquele em que se encontra o objeto. Se a janela de uma sala tiver seu “vidro” feito com material de índice de refração negativo, objetos do lado de fora da sala parecerão estar do lado de dentro.

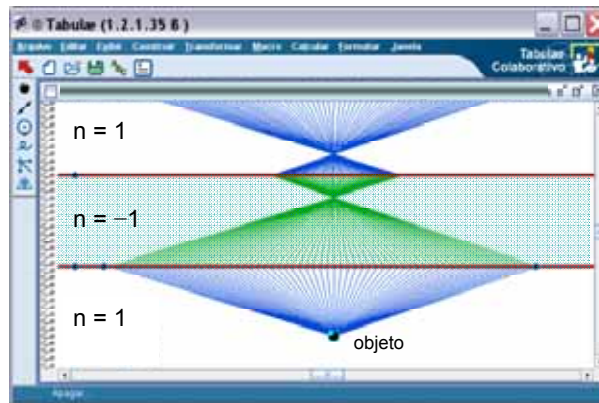


Figura 8.6: Refração da luz por uma placa com  $n = -1$ .

As imagens produzidas pela placa com  $n = -1$  têm mais características notáveis: elas não sofrem o efeito de aberrações e estão perfeitamente em foco. A placa também não reflete a luz incidente, pois se  $\epsilon = \mu = -1$ , sua impedância  $Z = \sqrt{\mu/\epsilon} = 1$  é idêntica à do vácuo. Essas duas propriedades fazem, da placa de refração negativa, uma lente de excelente qualidade, frequentemente chamada de lente de Veselago. Além do mais, já comentamos no capítulo 7 que a resolução das imagens obtidas não é limitada por efeitos difrativos, como ocorre com as lentes normais. Com a lente de Veselago é possível focalizar a luz em uma área de dimensões bem menores que o comprimento de onda. Por essas razões a lente plana também é chamada de superlente, ou lente perfeita. Deve ser notado, entretanto, que para objetos distantes a imagem formada pela superlente deixa de ser real, como mostra a figura 8.7.

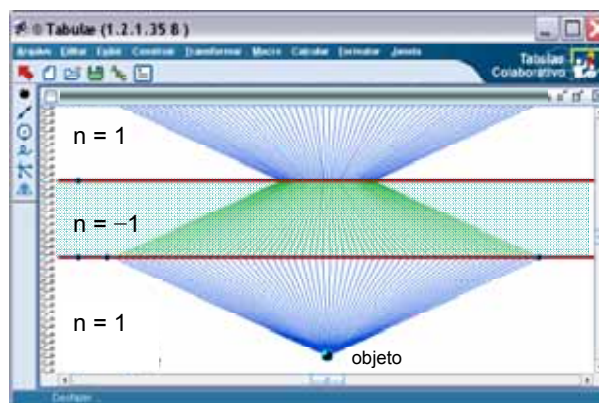


Figura 8.7: O mesmo que na figura 8.6, com o objeto mais distante da placa.

## 8.4 REFRAÇÃO NEGATIVA POR UM PRISMA

Um prisma de índice de refração negativo também cria efeitos inesperados. Vamos considerar apenas o caso em que o ângulo de abertura do prisma é  $90^\circ$  e seu índice de refração

$n = -1$ . A figura 8.8 mostra o caminho seguido por um feixe de raios luminosos emitido por um objeto localizado próximo ao vértice do prisma. Vemos que uma imagem real é formada do outro lado da ‘quina’, no mesmo meio onde se encontra o objeto e que, após as duas refrações no prisma, os raios refratados têm a mesma direção dos raios incidentes, mas sentido oposto. O prisma de refração negativa funciona como um par de espelhos planos perpendiculares, um sistema óptico discutido frequentemente nos cursos introdutórios de Física.

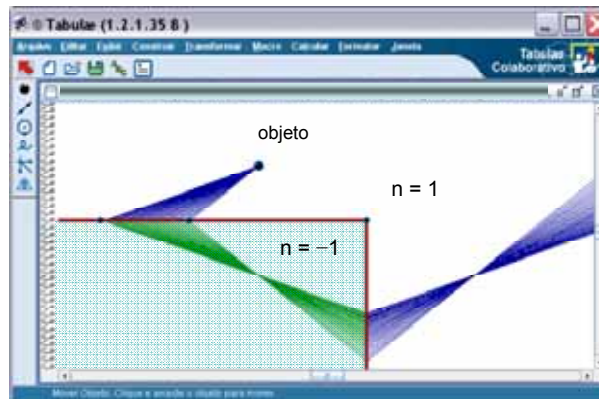


Figura 8.8: Refração por uma ‘quina’ com  $n = -1$ .

## 8.5 ANTIMATÉRIA ÓTICA

Apesar do nome, a superlente não é propriamente uma lente, isto é, ela não possui uma distância focal. Para objetos próximos ela atua como lente convergente produzindo imagens reais, e para objetos distantes ela age como lente divergente gerando imagens virtuais. As duas situações podem ser vistas nas figuras 8.6 e 8.7.

Uma caracterização mais interessante da lente plana foi proposta por Pendry e Ramakrishna. Segundo eles, a placa de  $n = -1$  comporta-se como uma região de “antimatéria ótica”, que cancela óticamente uma região vizinha de mesma largura e índice de refração  $n = 1$ . Esse é um caso particular de um teorema geral: *duas placas adjacentes de mesma largura e índices de refração opostos se aniquilam óticamente* [Pendry 2003]. A figura 8.9 ilustra o teorema: os efeitos óticos da região com índice de refração  $n_1(x,y,z)$  são cancelados pelos da região onde o índice é  $n_2(x,y,z) = -n_1(x,y, -z)$ .

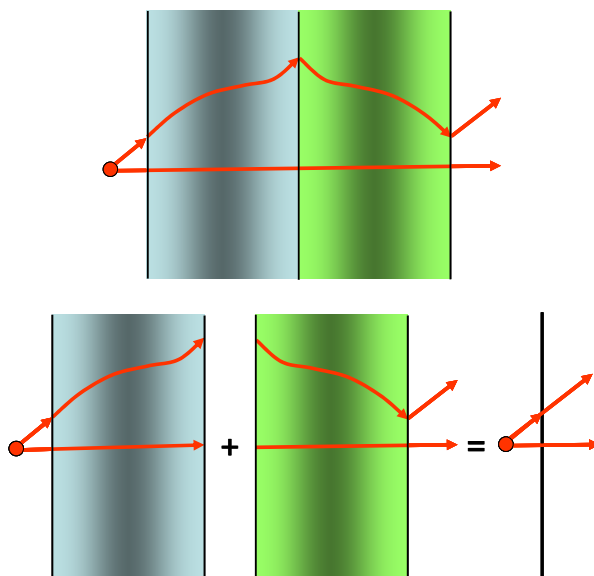


Figura 8.9: Ilustração do teorema de Pendry-Ramakrishna. Os efeitos óticos de regiões com índices de refração opostos se cancelam.

Pode-se usar a geometria dinâmica para verificar a validade desse teorema. A figura 8.10 mostra raios de luz que passam por regiões adjacentes de mesma espessura, com  $n = 1,3$  e  $n = -1,3$ . Observa-se que, ao deixar a segunda placa, os raios estão na mesma configuração que possuíam ao entrar na primeira; é como se as duas placas não existissem. O mesmo ocorre quando a ordem das placas é invertida, como mostra a figura 8.11. Esse resultado não se altera quando usamos os recursos da geometria dinâmica para mudar os índices de refração, a espessura das placas ou a posição do objeto, o que mostra que o cancelamento ótico não é um acidente criado por uma configuração específica.

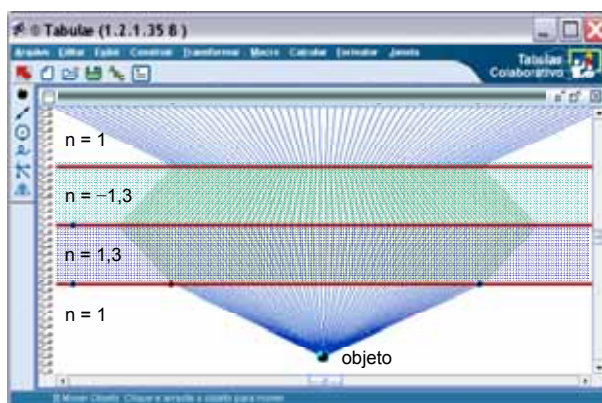


Figura 8.10: A antimatéria ótica. A placa com  $n = -1,3$  cancela óticamente a placa com  $n = 1,3$ .

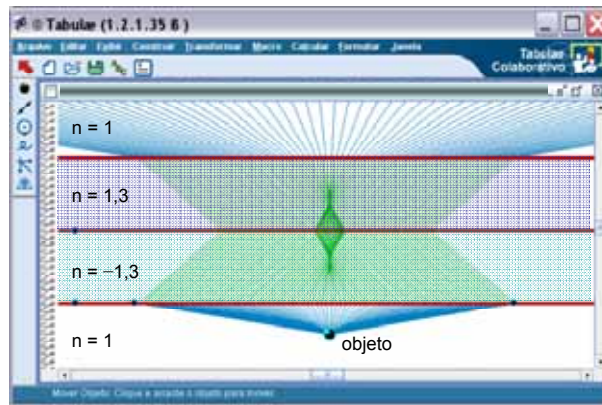


Figura 8.11: O mesmo que na figura 10, com as placas em ordem invertida.

## Capítulo 9 CONCLUSÃO

---

A Ótica Geométrica é parte integrante de todos os cursos introdutórios de Física, e tem a reputação de ser um campo “acabado”, onde nada de novo é criado há muito tempo. Essa reputação não serve de estímulo aos estudantes. Cabe ao professor de Física mostrar que a Ótica Geométrica, além de ser importante para a compreensão de inúmeros fenômenos naturais e instrumentos tecnológicos, é uma área onde avanços notáveis ocorreram recentemente. Um dos objetivos desta dissertação é dar uma contribuição nesse sentido.

A parte histórica deste trabalho visa mostrar aos estudantes que o desenvolvimento da Ótica não teve início no século XVII com Snell, Huygens e Newton, nem terminou no século XIX com Young, Fresnel e Maxwell. Os primeiros passos da Ótica foram dados na Grécia Antiga e não há sinal de que os últimos já tenham sido dados. Em particular, o estudo da refração tem revelado surpresas ao longo do século XX e início do XXI, como a criação de meios onde a propagação da luz é mais rápida ou muitíssimo mais lenta que  $c$ , ou nos quais o índice de refração é negativo (respectivamente, luz rápida, luz lenta e luz canhota).

Nós discutimos com algum detalhe o índice de refração e sua relação com a frequência da radiação incidente. Essa parte do trabalho se destina mais aos professores do ensino médio e aos alunos de graduação da universidade do que aos estudantes que iniciam o estudo da Ótica. O modelo de Lorentz para o índice de refração é a base para a apresentação da dispersão, de seus regimes normal e anômalo, da absorção ressonante, e de muitos outros efeitos. Em particular, mostramos que mesmo em modelos simples surge um efeito pouco discutido no ensino médio (e até tido como impossível) – o índice de refração inferior a 1.

Esse aspecto é o ponto de partida para outro tema de destaque na dissertação, as várias velocidades da luz. Causa surpresa nos alunos, e em alguns professores, a informação de que em um meio material não há *uma* velocidade da luz, mas muitas. Nós discutimos as definições de velocidade de fase, de grupo, de frente, de sinal e de propagação de energia, tentando deixar claros seus significados e relações.

Também tratamos do conceito de impedância de um meio, uma grandeza física que em muitas situações é tão importante quanto o índice de refração. O papel da impedância na transmissão de energia de um meio para outro é analisado. Em particular discutimos como efeitos de reflexão podem ser eliminados pelo casamento de impedâncias.

Na etapa seguinte da dissertação, apresentamos uma maneira de estudar experimentalmente as várias velocidades da luz e a impedância característica de um meio material. Nos experimentos propostos, o meio de propagação da radiação eletromagnética foi um cabo coaxial, e mostramos como medir as velocidades de fase, de grupo e de sinal nessas linhas de transmissão. O método de medida da velocidade de fase é tão simples que pode ser introduzido mesmo no ensino médio. Também medimos a impedância característica do cabo coaxial.

O último tema abordado na dissertação diz respeito aos metamateriais com índice de refração negativo. Vimos como esses materiais artificiais criaram um domínio novo na Ótica, cuja exploração promete muitas surpresas e aplicações revolucionárias. Superlentes e antimatéria ótica são apenas alguns exemplos do que pode ser feito nessa área. A geometria dinâmica foi uma ferramenta essencial em nossa discussão, permitindo a criação de representações de grande impacto visual de sistemas óticos, com as quais é possível interagir dinamicamente. Com isso fica muito mais fácil entender os estranhos efeitos associados à refração negativa e ganhar um conhecimento mais consistente e profundo da própria Ótica Geométrica.

Esperamos ter demonstrado nesta dissertação que o ensino da Ótica Geométrica tem muito a ganhar com a inclusão da refração negativa e outros temas atuais (luz rápida/lenta, as várias velocidade da luz) em cursos introdutórios. Esses temas podem ser facilmente incorporados aos currículos existentes, pois sua compreensão exige apenas a extensão de conceitos já abordados nos cursos convencionais. Com isso fica mais simples esclarecer velhos ‘problemas’, como a existência de índices de refração inferiores a 1 ou o significado da expressão ‘velocidade da luz no meio’. Os efeitos curiosos e potencialmente revolucionários da refração negativa podem motivar os alunos a aprofundar seus estudos de Ótica Geométrica, mostrando que essa disciplina milenar ainda tem algumas surpresas reservadas para o futuro próximo.

## Anexo A - O ÍNDICE DE REFRAÇÃO COMPLEXO

---

Neste apêndice é apresentada a demonstração de que se  $\varepsilon$  e  $\mu$  são ambos negativos, o índice de refração deve também ser negativo.

À primeira vista, se  $\varepsilon < 0$  e  $\mu < 0$ , simultaneamente, isso não afetaria o índice de refração (ver equação 3.12). No entanto,  $\varepsilon$ ,  $\mu$  e  $n$  são complexos, e podem ser colocados nas formas  $\varepsilon/\varepsilon_0 = r_\varepsilon e^{i\theta}$  (figura A.1) e  $\mu/\mu_0 = r_\mu e^{i\phi}$  (figura A.2).

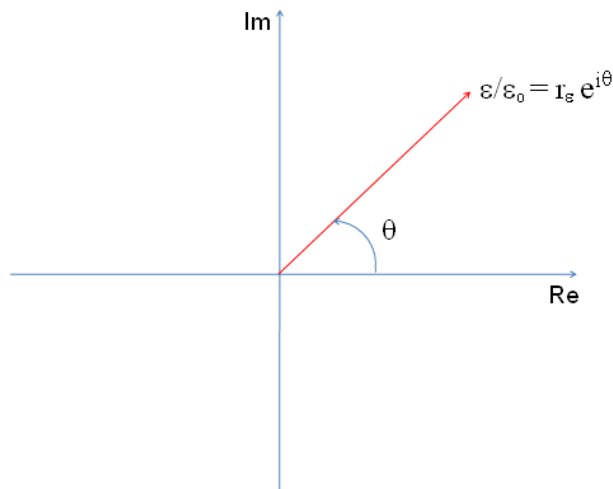


Figura A.1: Partes real e imaginária da permissividade relativa.

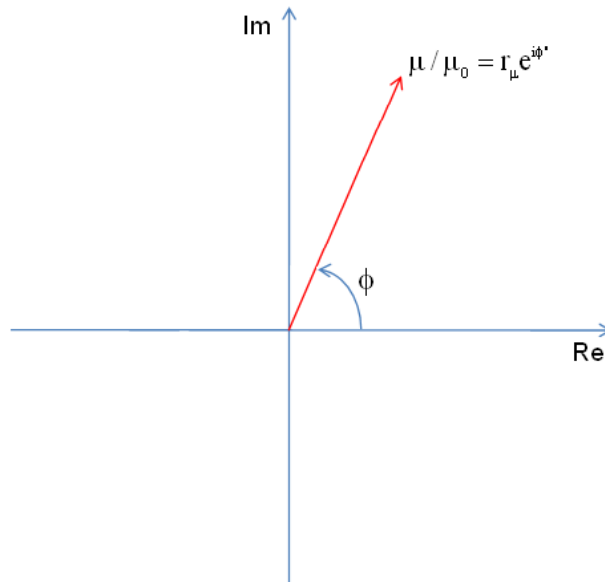


Figura A.2: Partes real e imaginária da permeabilidade relativa.

Assim sendo, de acordo com a equação (3.12),



$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{r_\varepsilon r_\mu} e^{\frac{i(\theta+\phi)}{2}} = \text{Re}(n) + i \text{Im}(n). \quad (1)$$

Para  $\text{Im}(n) > 0$ , devemos ter

$$0 < \frac{\theta + \phi}{2} < \pi \quad (2)$$

e por outro lado, se  $\text{Re}_e(\varepsilon) < 0$  e  $\text{Re}_e(\mu) < 0$ , então  $\cos\theta < 0$  e  $\cos\phi < 0$ . Assim sendo,

$$\frac{\pi}{2} < \frac{\theta + \phi}{2} < \frac{3\pi}{2}. \quad (3)$$

Para satisfazer (2) e (3) é necessário que

$$\frac{\pi}{2} < \frac{\theta + \phi}{2} < \pi \quad (4)$$

e, portanto,

$$\text{Re}(n) = \sqrt{r_\varepsilon r_\mu} \cos\left(\frac{\theta + \phi}{2}\right) < 0. \quad (5)$$

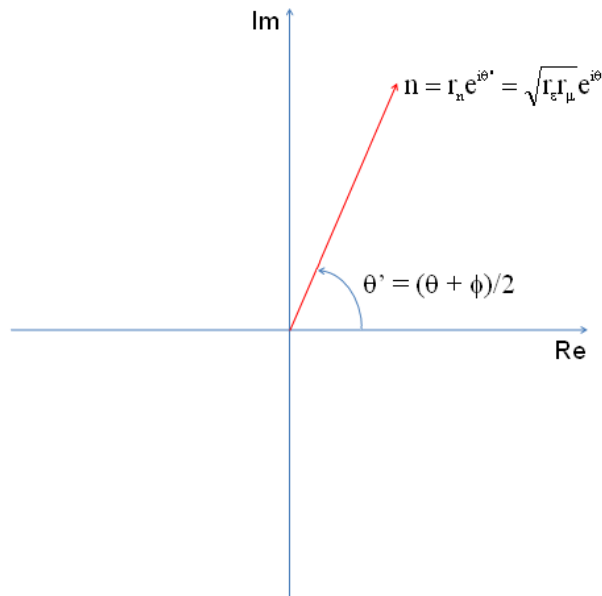


Figura A.3: Parte real e parte imaginária do índice de refração.

Desta forma, o requisito que  $n$  tenha uma parte imaginária positiva leva a conclusão que, se  $\varepsilon$  e  $\mu$  possuem uma parte real negativa, a parte real de  $n$  deve também ser negativa.

## Anexo B - DISPERSÃO EM UM CABO COAXIAL

Neste apêndice discutimos matematicamente o alargamento de um pulso rápido gaussiano que se propaga em um meio dispersivo, conforme estudado no capítulo 6.

Uma propriedade importante é que a transformada de Fourier de uma função gaussiana, do tipo  $f(x) = A \exp[-(x - x_0)^2 / (2\sigma^2)]$  também será uma gaussiana. O desvio padrão, definido como a semi-largura no ponto em que a amplitude cai a  $1/e$  de seu valor máximo  $A$ , é ilustrado na figura B1. O desvio padrão de um pulso  $\sigma_x$ , e o correspondente desvio padrão da transformada de Fourier do pulso  $\sigma_k$ , estão relacionados por  $\sigma_x \sigma_k = 1$  [Hecht 2002].

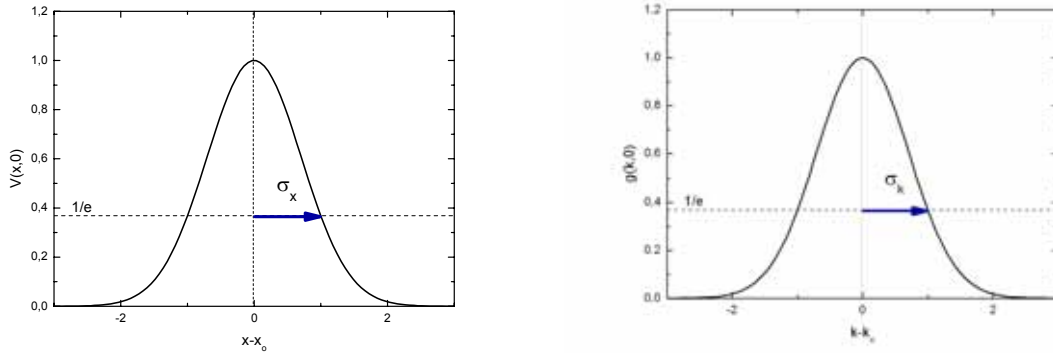


Figura B1: Esquerda: Ilustração de um pulso gaussiano de desvio padrão  $\sigma_x$ . Direita: a transformada de Fourier de  $V(x,0)$  e seu respectivo desvio padrão.

O pulso elétrico rápido pode ser descrito em termos de suas componentes de Fourier como:

$$V(x,0) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{3/4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2} e^{ikx} dk \quad (1)$$

Este pulso é a superposição de ondas planas  $e^{ikx}$  com amplitudes

$$\frac{g(k,0)}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{3/4}} e^{-\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2} \quad (2)$$

onde  $g(k,0)$  é a transformada de Fourier de  $V(x,0)$ , e corresponde a uma função gaussiana centrada em  $k = k_0$ . Nos cálculos a seguir utilizaremos repetidamente a integral

$$I(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2(\xi+\beta)^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \quad (3)$$

onde  $-\pi/4 < \text{Arg}(\alpha) < \pi/4$ .

Vamos calcular  $V(x,0)$ . Para tanto, vamos agrupar os expoentes da equação (1), na seguinte forma:

$$-\frac{a^2}{4}(k-k_o)^2 + ikx = -\frac{a^2}{4} \left[ k - k_o - \frac{2ix}{a^2} \right] + ik_o x - \frac{x^2}{a^2} \quad (4)$$

Utilizando a equação (3), obtemos

$$V(x,0) = \left( \frac{2}{\pi a^2} \right)^{1/4} e^{ik_o x} e^{-\frac{x^2}{a^2}}. \quad (5)$$

A parte real de  $V(x,0)$  é dada por

$$\text{Re}V(x,0) = \sqrt[4]{\frac{2}{\pi a^2}} e^{-x^2/a^2} \cos(k_o x) \quad (6)$$

que possui uma forma de sino, com oscilações internas que podem ou não ser visíveis, dependendo do valor de  $k_o a$ . A parte central do pacote de ondas, onde está o máximo de  $\text{Re} V(x,0)$ , está situada em  $x = 0$ , conforme ilustrado na figura B.2. A largura a meia altura (FWHM) de  $\text{Re} V(x,0)$  está relacionada com o desvio padrão por  $\text{FWHM} = 2 (2 \ln 2)^{1/2} \sigma_x$ .

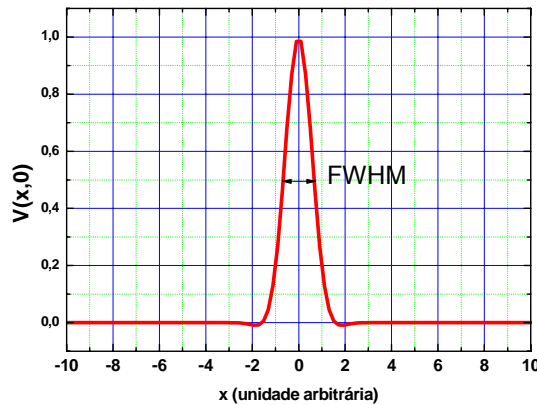


Figura B.2: O pulso  $V(x,0)$  em função da posição

Vamos agora calcular  $V(x,t)$ , cuja forma geral é dada por

$$V(x,t) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{3/4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a^2}{4}(k-k_o)^2} e^{i(kx-\omega(k)t)} dk, \quad (7)$$

onde  $\omega(k)$  é a relação de dispersão para o pacote de ondas considerado. Supondo uma relação de dispersão do tipo  $\omega(k) = b k^2$ , similar à relação de dispersão de uma partícula livre em mecânica quântica, e usando a equação (3), obtemos

$$V(x,t) = \left(\frac{2a^2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{e^{i\phi}}{(a^4 + 8bt^2)^{1/4}} e^{ik_0 x} \exp\left[-\frac{(x - 2bk_0 t)^2}{a^2 + 4ibt}\right] \quad (8)$$

onde  $\phi$  é real, dado por  $\phi = -\theta - b k_0^2 t$ , e  $\text{tg}(2\theta) = 4 b t / a^2$ .

A parte real de  $V(x,t)$  é dada por

$$\text{Re}V(x,t) = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/4} \frac{e^{i\phi}}{\left(1 + \frac{8bt^2}{a^4}\right)^{1/4}} \exp\left[-\frac{(x - 2bk_0 t)^2}{a^2 + \frac{16b^2 t^2}{a^2}}\right] \cos\left[4bt \frac{(x - 2bk_0 t)}{a^4 + 16b^2 t^2} + \phi\right] \quad (9)$$

Vemos que a parte real de  $V(x,t)$  está centrada em  $x = v_g t$ , onde  $v_g = 2 b k_0$  é a velocidade de grupo do pacote de onda. Na equação (9), o desvio padrão  $\sigma(t)$  é dado por

$$\sigma(t) = \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{16b^2 t^2}{a^4}} \quad (10)$$

A figura B.3 ilustra o crescimento da largura do pulso com o tempo. Para  $t$  muito grande a largura aumenta linearmente com  $t$ , e esse comportamento assintótico também é mostrado na figura.

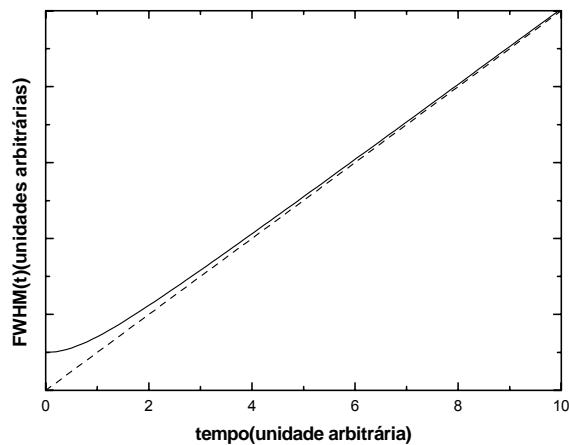


Figura B.3: A linha contínua representa a largura do pacote como função do tempo. A linha tracejada é o valor assintótico da largura para  $t$  muito grande.

## Anexo C - AULA SOBRE METAMATERIAIS PARA O ENSINO MÉDIO

---

As pesquisas que apresentaremos nesta aula se iniciaram há cerca de 10 anos, apesar de a idéia original ter surgido em 1968. Por ser um assunto muito recente, uma exposição a respeito dessas novas idéias numa linguagem simples e objetiva para os alunos do ensino médio se faz necessária. Desde o ano passado (2010) começou a surgir questões sobre o tema nos concursos de acesso ao terceiro grau (ENEM e UNICAMP), tornando essas novidades do mundo científico ainda mais curiosas para os estudantes de Ótica, assim como, de seu interesse em particular.

Quando em uma ocasião comentei em sala de aula sobre a possibilidade de se criar um material com índice de refração negativo, isto é, uma proposta que sai dos padrões considerados normais da Ótica, surgiram questionamentos com propriedades bem interessantes. A expectativa foi muito grande, já que é enfaticamente pregado por nós professores do ensino médio não existir índice de refração menor do que 1 para um material, nem entre zero e 1 e muito menos negativo. Diante desta postura por parte dos alunos, a recompensa e a realização eram certas, daí a proposta em preparar uma aula qualitativa sobre o tema. No entanto, não se pode falar em um material com índice de refração negativo sem comentar o pré-requisito indispensável para seu entendimento, a refração.

Entende-se por refração a passagem da luz de um meio para outro sofrendo, com exceção da incidência perpendicular à interface de separação dos meios, um desvio na sua direção de propagação. A luz se aproxima da normal quando sua velocidade diminui, e se afasta quando aumenta a sua velocidade, conservando o raio incidente de um lado da normal e o refratado do outro. A figura C.1 faz a ilustração clássica de refrações envolvendo índices de refração positivos.

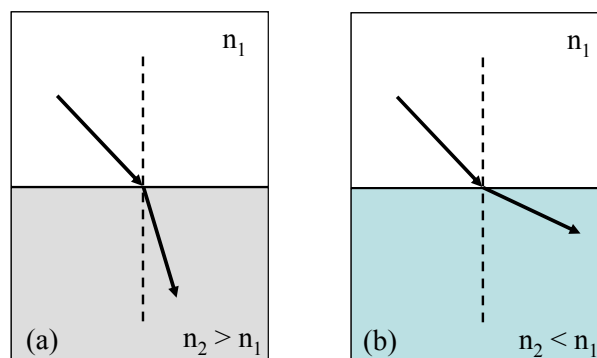


Figura C.1: A refração da luz; em (a) a velocidade diminui e em (b) a velocidade aumenta.

Devido a esta diferença entre as velocidades de propagação da luz, criou-se uma relação entre a velocidade da luz no vácuo  $c$  e a velocidade da luz no meio em questão  $v$ , ou seja,  $n = c/v$ , denominada índice de refração  $n$ . Não se sabe ao certo quando surgiu esta relação, mas desde Newton se tem conhecimento que o índice de refração depende da frequência da radiação incidente na superfície. A mudança da velocidade da luz devido à refração tem como consequência alguns efeitos óticos bem presentes no nosso cotidiano: a piscina parecer mais rasa quando cheia de água, a formação do arco-íris, a impressão do lápis parecer quebrado quando imerso na água, e muitos outros. A figura C.2 ilustra os exemplos citados.



Figura C.2: Na esquerda o arco íris e na direita o lápis “quebrado”.

A refração não é um atributo só da luz, podendo ocorrer com qualquer onda, eletromagnética ou não. A diferença de uma onda eletromagnética para outra está na sua frequência. A luz em particular, é uma onda eletromagnética que pode ser captada pelos nossos olhos, nos dando a sensação da visão. Para uma familiarização maior com as ondas eletromagnéticas, a figura C.3 mostra o espectro eletromagnético nas frequências mais presentes no cotidiano.

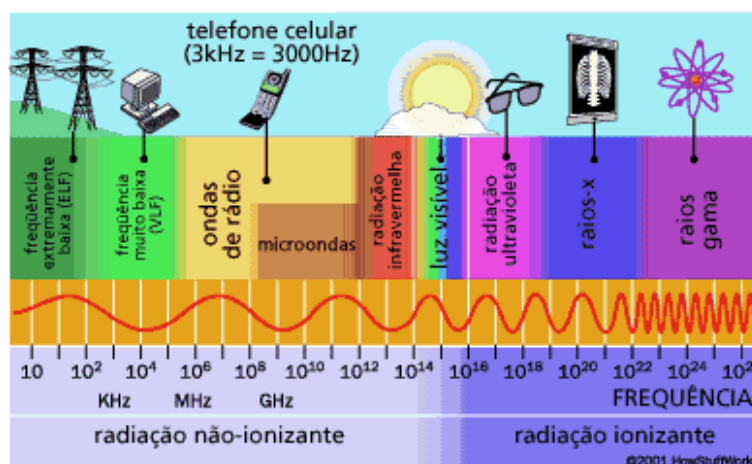
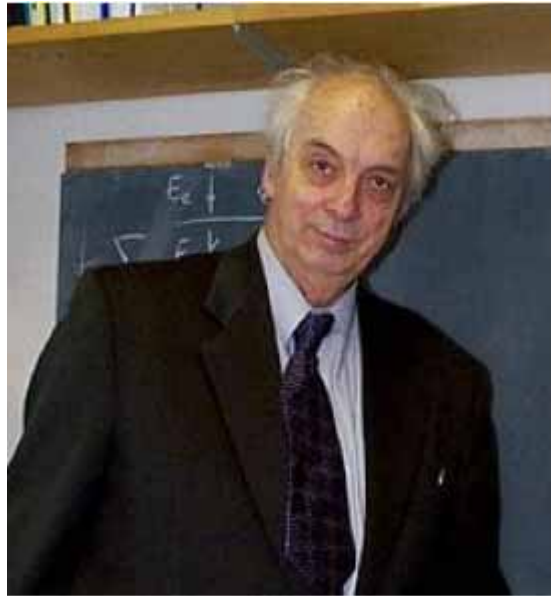


Figura C.3: O espectro eletromagnético.

Um grande avanço no estudo da refração teve início em 1967, com o físico russo Victor Veselago, mostrado na figura C.4. Ele sugeriu possibilidade de um material com índice de refração negativo, que a princípio nenhuma lei física diz ser impossível. Essa era uma proposta inovadora, uma vez que a comunidade científica nunca tinha examinado de perto o conceito de refração negativa. Se o índice de refração  $n$  for negativo, isso acarreta uma velocidade  $v$ , para a onda, também negativa, já que  $v = c/n$ .



*Figura C.4: Victor Veselago.*

A interpretação estritamente cinemática para que a velocidade da luz no vácuo e a velocidade da luz no meio tenham sinais opostos é que essas duas velocidades possuem sentidos opostos. É difícil entender o que isso significa quando se imagina a luz entrando no meio, vinda do vácuo. A solução para o problema surge quando se toma conhecimento que uma onda possui diversas velocidades, a destacar as velocidades de fase e de grupo. A velocidade de fase é aquela com que se movem as ondas de frequência e comprimento de onda bem determinados. Essas ondas repetem-se indefinidamente e, portanto, não têm começo nem fim. Uma onda com início e fim – um pulso ou uma sequência finita de ondulações, por exemplo – move-se com velocidade de grupo. No ensino médio, não discutimos a diferença entre essas velocidades, porque consideramos os meios como sendo “não-dispersivos”, o que acarreta uma igualdade entre as velocidades de fase e grupo. No entanto, em meios reais essas velocidades não precisam ser iguais.

Como Veselago notou, em um material com índice de refração negativo as velocidades de fase e de grupo estão em sentidos opostos. Surpreendentemente, enquanto o pulso se propaga para frente, as ondulações individuais que o formam se propagam “para

trás”. A energia do feixe de luz viaja para frente, com a velocidade de grupo . Outra questão que desperta interesse é que, se a lei de Snell for válida para a refração negativa, ou seja,  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ , o raio refratado se desvia mantendo o mesmo lado da normal à superfície que o raio incidente. O raio se comportaria como sofresse uma “reflexão na normal”, seguindo trajetórias diferentes daquelas que os livros didáticos retratam e que nós professores expomos aos nossos alunos no caso da refração convencional. A figura C.5 ilustra a refração da luz para um meio com índice de refração positivo (a) e para outro com índice de refração negativo (b).

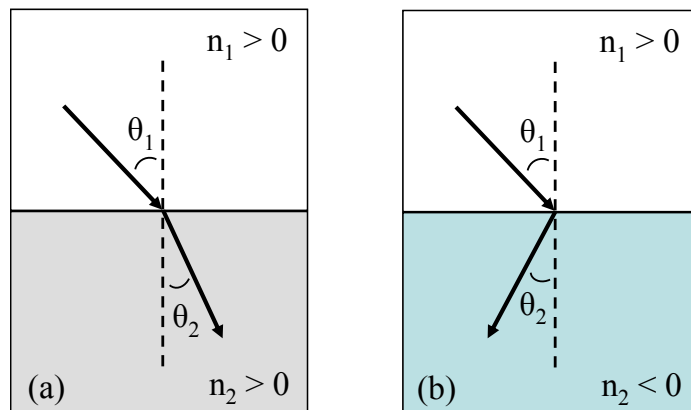


Figura C.5: (a) Refração em dois meios com índices de refração positivos. (b) Refração quando um dos meios tem índice de refração positivo e o outro tem índice de refração negativo.

As ideias de Veselago ficaram esquecidas por cerca de três décadas, pois não se conheciam na natureza materiais com índice de refração negativo. Finalmente, em meados dos anos 90 na Inglaterra, John B. Pendry, com a colaboração de cientistas da empresa britânica *Marconi Materials Technology*, concluiu que seria possível, a partir de uma estrutura metálica, criar um material artificial com índice de refração negativo.



Fig. C.6: John Pendry (esquerda) e David Smith (direita)



Por fim, em 2000, David R. Smith e colegas da Universidade da Califórnia em San Diego construíram o material proposto por Pendry. A figura C.7 mostra um pedaço das estruturas montadas por Smith e sua equipe.



Figura C.7: A estrutura metálica de um material com índice de refração negativo.

As estruturas eram uma combinação de pequenos circuitos metálicos que, num certo sentido, desempenhavam o papel das ‘moléculas’ do material de refração negativa. A estrutura ‘molecular’ desses materiais era periódica, com dimensões menores que o comprimento de onda das ondas eletromagnéticas para as quais se desejava a refração negativa. No caso dos materiais de Smith, essas eram micro-ondas de comprimentos de onda de alguns centímetros. Isso fez com que as ondas “enxergassem” o material como sendo um meio homogêneo, com índice de refração negativo. A figura C.8 mostra um material artificial criado para fornecer resposta negativa para o índice de refração numa visão tridimensional.

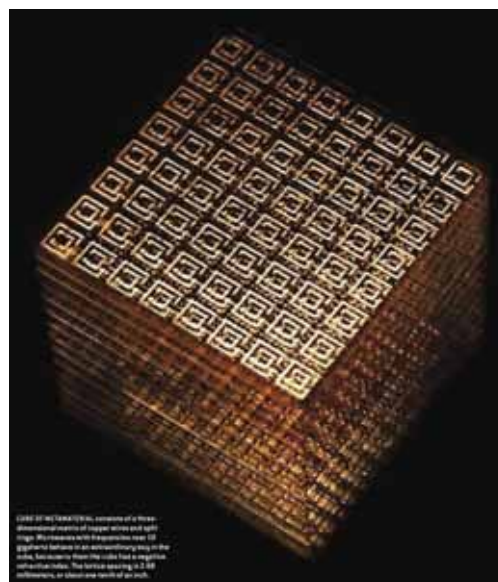
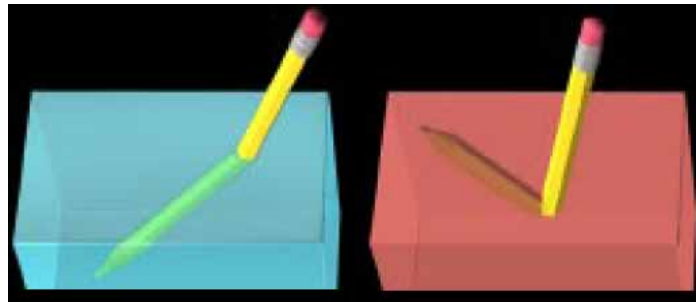


Figura C.8: Visão tridimensional de uma estrutura com índice de refração negativo.

Os materiais artificiais de Pendry e Smith foram chamados de *metamateriais*. Smith e sua equipe notaram que o ângulo de refração das micro-ondas em seus metamateriais obedecia à lei de Snell, sendo que o raio refratado permanecia do mesmo lado da normal à

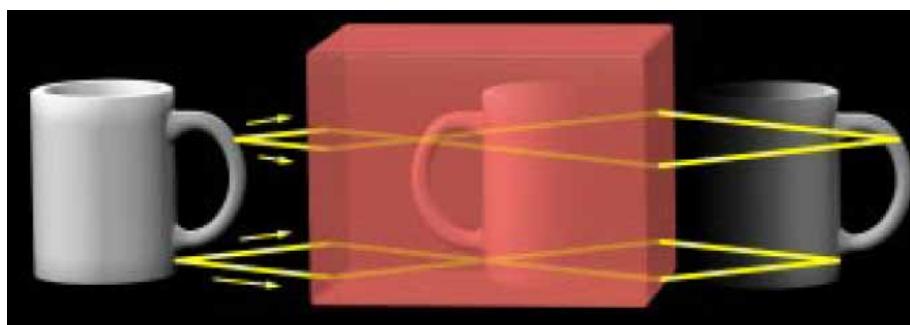
superfície de separação dos dois meios que o raio incidente. Pesquisas mais recentes já produziram metamateriais com um índice de refração negativo na faixa do infravermelho, chegando quase ao visível.

Um índice de refração negativo pode criar efeitos surpreendentes. A figura C.9 compara um lápis imerso em um líquido de índice de refração positivo com outro imerso em um líquido com índice negativo. Pode-se perceber que o segundo parece “quebrado” para cima do líquido.



*Figura C.9: Lápis mergulhado num material com índice de refração positivo (esquerda) e negativo (direita).*

A figura C.10 mostra uma placa retangular com índice de refração negativo (uma superlente). Do objeto à esquerda, partem raios luminosos que incidem na placa e, ao serem refratados, formam uma imagem invertida no interior da mesma. Ao sofrerem uma nova refração, voltando ao meio exterior, produzem uma segunda imagem à direita da placa.



*Figura C.10: Superlente formada por uma placa com índice de refração negativo.*

Outra simulação interessante é vista na figura C.11. Pode-se observar uma piscina, com água de índice positivo normal e em seguida, uma piscina cheia com “água” de índice de refração negativo.

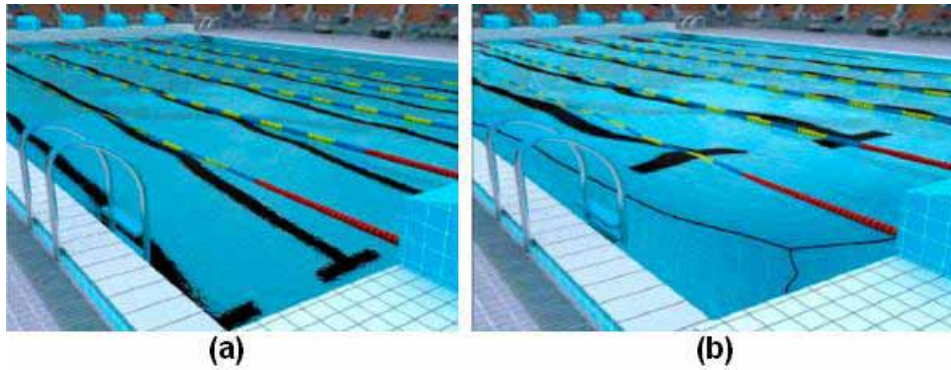


Figura C.11: (a) Piscina com água normal; (b) com “água” de índice negativo.

Finalmente, na figura C.12, uma vareta é colocada dentro de um líquido e parece “quebrada”. Como na figura C.12 (c) o líquido possui índice de refração negativo  $n = -1,3$ , a haste se quebra para o lado “errado”.

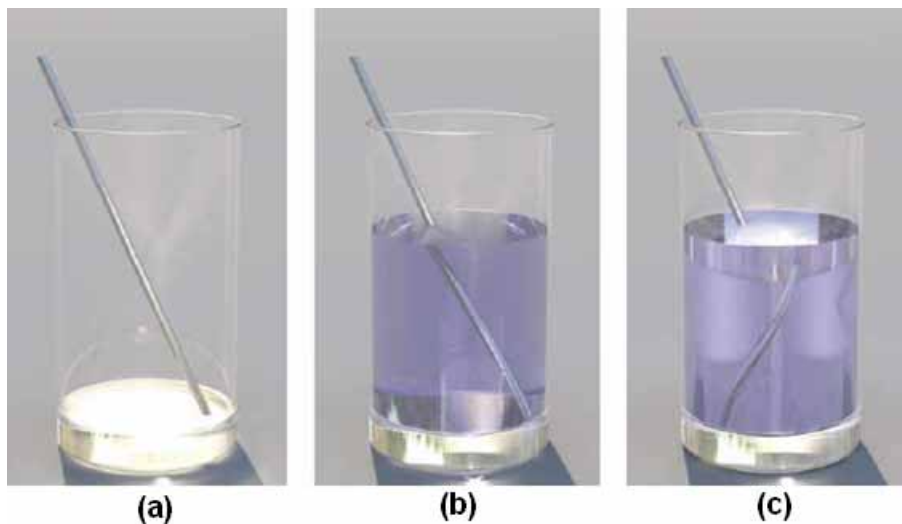


Figura C.12: (a) Copo vazio; (b) copo com água de índice  $n = 1,3$ ; (c) copo com “água” de índice  $n = -1,3$ .

É fato que a luz, em geral, muda a sua direção de propagação à medida que vai encontrando meios com índices de refração diferentes. A variação do índice de refração pode ter as mais diversas causas e conduz a muitos fenômenos interessantes. Por exemplo, a variação da densidade do ar devido ao seu aquecimento próximo a superfícies quentes, como o asfalto de uma rodovia exposto ao Sol, faz com que os raios sofram um desvio ao passarem da camadas de ar mais frias (maior índice de refração) para as mais quentes (menor índice de refração) próximas à superfície, provocando a reflexão total da luz e fazendo com que o solo funcione como um espelho. Esta variação do índice de refração ocasiona o que chamamos de miragem. A figura C.13 à esquerda é uma foto indicando a formação de uma aparente “poça d’água”, apesar do dia seco, que funciona como um espelho onde é possível ver refletida a

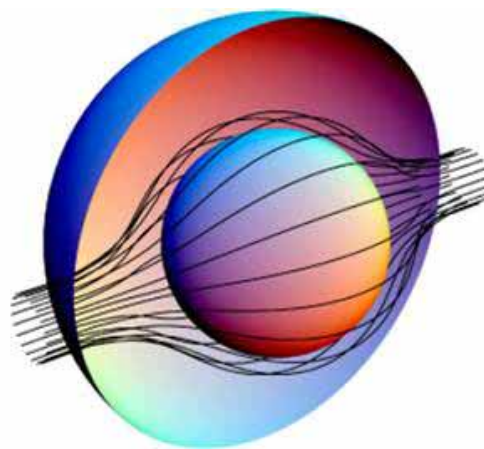
imagem do automóvel. Na figura C.13, à direita, temos uma representação simplificada da formação de miragem.



*Figura C.13: Esquerda: foto com um automóvel refletido no asfalto.*

*Direita: ilustração simples da formação de miragem.*

Com a tecnologia de metamateriais, o homem está sendo capaz de manipular a refração da radiação eletromagnética de uma maneira completamente nova, controlando os desvios sofridos pela luz através da criação de metamateriais com índice de refração ‘projetados por encomenda’, sejam negativos ou positivos. Por exemplo, a figura C.14 mostra as trajetórias que os raios luminosos seguiriam através de um metamaterial especialmente projetado para tornar invisível a região no interior da esfera, criando um “manto da invisibilidade”.



*Figura C.14: O metamaterial distribui os raios de luz em torno da esfera, formando o “manto de invisibilidade”.*

Em princípio, os metamateriais podem ser usados para formar diversas estruturas de “camuflagem”, que conseguem “dobrar” as ondas eletromagnéticas, como a luz, fazendo com que contornem um objeto. A curva dos raios luminosos em torno de um objeto, como a esfera central da figura C.14, dão a um observador a impressão de que este é completamente transparente, ou seja, invisível. Dispositivos como o “manto de invisibilidade do Harry Potter” podem se tornar realidade.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [Aguiar 2009] C. E. Aguiar, “Óptica e geometria dinâmica”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 31, art. 3302, (2009).
- [Bloch 1977] S. C. Bloch. ‘Eighth velocity of light’, *American Journal of Physics*, v. 45, p. 538-549 (1977).
- [Bohren 2009] C. F. Bohren, “Physics textbook writing: Medieval, monastic mimicry”, *American Journal of Physics*, v. 77, p. 101-103 (2009).
- [Boyd 2009] R. W. Boyd, D. J. Gauthier, “Controlling the Velocity of Light Pulses”, *Science*, v. 326, p. 1074-1077 (2009).
- [Brillouin 1960] L. Brillouin, *Wave Propagation and Group Velocity* (Academic Press, N.Y., 1960).
- [Burgos 2010] S. P. Burgos, R. deWaele, A. Polman, H. A. Atwater, “A single-layer wide-angle negative-index metamaterial at visible frequencies”, *Nature Materials*, v. 9, p. 407-412 (2010).
- [Danner 2009] A. Danner, “Photorealistic ray tracing aids understanding of metamaterials”, SPIE Newsroom, DOI: 10.1117/2.1200903.1525 (2009).
- [Dolling 2006] G. Dolling, M. Wegener, S. Linden, C. Hormann, “Photorealistic images of objects in effective negative-index materials”, *Optics Express*, v. 14, p. 1842-1849 (2006).
- [Feynman 2009] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *Lições de Física*, vol. II (Bookman, 2009).
- [Fonseca 2007] P. Fonseca, A. C. F. Santos, E. C. Montenegro, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 29, p. 373-375 (2007).
- [Grbic 2004] A. Grbic, G. V. Eleftheriades, “Overcoming the diffraction limit with a planar left-handed transmission-line lens”, *Physical Review Letters*, v. 92, art. 117403 (2004).
- [Hecht 2002] E. Hecht, *Óptica*, 2ª edição (Fundação Calouste Gulbekian, 2002).
- [Hormann 2007] Christoph Hormann, “Raytracing Metamaterials with POV-Ray”, <http://www.imagico.de/pov/metamaterials.html> . Acessado em dez./2010.
- [Jackson 1999] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3a edição (Wiley, 1999).

- [Kraus 1999] J. D. Kraus e D. A. Fleisch, *Electromagnetics with Applications*, 5<sup>a</sup> edição (McGraw-Hill, Boston, 1999).
- [Lezec 2007] H. J. Lezec, J. A. Dionne, H. A. Atwater, “Negative refraction at visible frequencies”, *Science*, v. 316, p. 430-432 (2007).
- [McDonald 2001] K. T. McDonald, “Negative group velocity”, *American Journal of Physics*, v. 69, p. 607–614 (2001).
- [Milonni 2005] P. W. Milonni, *Fast Light, Slow Light and Left-Handed Light* (Taylor and Francis, NY, 2005).
- [Pendry 1996] J. B. Pendry et al., “Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures”, *Physical Review Letters*, v. 76, p. 4773-4776 (1996).
- [Pendry 1999] J. B. Pendry et al., “Magnetism from Conductors and Enhanced Nonlinear Phenomena”, *IEEE Transactions on Microwave Theory And Techniques*, v. 47, p.2075-2084 (1999).
- [Pendry 2000] J. B. Pendry, “Negative Refraction Makes a Perfect Lens”, *Physical Review Letters*, v, 85, p. 3966-3969 (2000).
- [Pendry 2003] J. B. Pendry, S. A. Ramakrishna, “Focusing light using negative refraction”, *Journal of Physics: Condensed Matter*, v. 15, p. 6345-6364 (2003).
- [Pendry 2006] J. B. Pendry, D. R. Smith, “The quest for the superlens”, *Scientific American*, p.61-67, julho de 2006.
- [Pinheiro 2009] F. A. Pinheiro, “Manto da invisibilidade: mais próximo da realidade”, *Ciência Hoje*, v. 44, n. 260, p. 10-11 (2009).
- [Rogers 1960] E. M. Rogers, *Physics for the Inquiring Mind: The Methods, Nature, and Philosophy of Physical Science* (Princeton U. Press, Princeton, 1960)
- [Shelby 2001] R. A. Shelby, D. R. Smith, S. Schultz, “Experimental verification of a negative index of refraction”, *Science*, v. 292, p.77-79 (2001).
- [Smith 1970] R. L. Smith, “The velocities of light”, *American Journal of Physics*, v. 38, p. 978-984 (1970).
- [Smith 2000] D. R. Smith et al., “Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity”, *Physical Review Letters*, v. 84, n. 18, p. 4184-4187 (2000).

[Veselago 1968] V. Veselago, “The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$ ”, Soviet Physics Uspekhi, v. 10, p. 509-514 (1968)

[Wang 2000] L. J. Wang, A. Kuzmich, A. Dogariu, “Gain-assisted superluminal light propagation”, Nature, v. 406, p. 277-279 (2000).