



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física

**Reverendo o debate sobre a idade da Terra:
um texto para professores do ensino
médio e universitário**

Felipe Nogarol

&

Alexandre C. Tort

Material instrucional associado à dissertação de mestrado de Felipe Nogarol, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Rio de Janeiro
2012

Sumário

1	Introdução	3
2	Kelvin e a idade do Sol	5
3	Kelvin, Fourier e a idade da Terra	7
4	A solução de Kelvin (opcional)	8
5	A idade da Terra segundo Kelvin	13
6	A crítica de John Perry	15
7	Observações finais	16
	Apêndice: a fórmula de Leibnitz	19

1 Introdução

Qual é a idade da Terra? Uma das polêmicas científicas mais fascinantes da ciência vitoriana foi o debate sobre a idade da Terra que, inicialmente, envolve quase exclusivamente cientistas britânicos. As razões para isto não são muito claras, mas pode-se pensar que a topografia peculiar das Ilhas Britânicas tenha tornado a geologia de campo o passatempo favorito de cientistas profissionais e amadores. No continente europeu, os geólogos, amadores ou não, estavam mais interessados no desenvolvimento da mineralogia, cristalografia, estratigrafia e paleontologia. A controversia teve consequências profundas sobre o desenvolvimento das ciências da Terra. A questão contrapõe o físico, engenheiro e inventor escocês William Thomson (1824-1907), posteriormente Lord Kelvin de Largs, ou simplesmente Kelvin, um dos maiores cientistas da Era Vitoriana, a uma corrente de pensamento geológico conhecida como *uniformitarismo* cujos princípios foram estabelecidos por outro importante cientista britânico, Charles Lyell (1797-1875) em seu influente livro *Principles of Geology*, publicado em 1830, e por Charles Darwin (1809-1882) e a teoria da evolução exposta na *Origem das Espécies*, publicada pela primeira vez em 1859.

A questão da duração da Terra, na verdade, a existência do mundo, foi considerada pelas sociedades antigas, a civilização babilônica, sumeriana, egípcia e, naturalmente, pela civilização grega clássica, mas não se percebe nessas sociedades esforços para efetivamente contar o tempo decorrido desde a criação do mundo. Para os gregos, por exemplo, o mundo é cíclico e contar o tempo transcorrido desde a sua criação não fazia sentido. A questão da contagem do tempo decorrido desde a criação foi considerada pelo povo judeu e introduzida no Ocidente somente com o advento do Cristianismo [1, 2]. As primeiras cronologias são fundamentadas nos textos bíblicos e se devem a Teófilo de Antióquia (c.115-c.183), a Júlio Africano (fl.200-fl.250) e a Eusébio da Cesárea (c.260-c.340). A mais influente entre elas é a de Júlio Africano que supõe a história do homem compactada em uma única semana com cada dia tendo uma duração de mil anos. Mas Júlio acreditava que Cristo havia surgido no sexto dia, e estabeleceu a duração da Terra (*i.e.*: do mundo!) em 5.500 anos, valor próximo aos obtidos por Teófilo e Eusébio. Para os cristãos da Idade Média, os textos bíblicos eram passíveis de interpretação e não deviam ser tomados literalmente, mas sim como alegorias. A interpretação era privilégio dos estudiosos e teólogos da igreja medieval. A Reforma Protestante trás a volta da interpretação literal. As novas cronologias, a de Martinho Lutero (1483-1546) e a de James Ussher (1581-1656) estabelecem as datas da criação: 4000 a.C. e 4004. a.C., respectivamente. Em 1644, John Lightfoot, vice-chanceler da Universidade de Cambridge, após uma leitura cuidadosa das escrituras e antecipando-se à cronologia de Ussher, que foi publicada seis anos mais tarde em 1650, conclui que a Terra foi criada em 3929 a. C. Em razão de uma confusão histórica provocada por uma citação errônea, a cronologia de Lightfoot é confundida com a cronologia de Ussher e alguns estudiosos a denominam *Cronologia de Ussher-Lightfoot*. A famosa citação: “de acordo

com o calendário juliano, a Terra foi criada no dia 23 de outubro de 4004 a.C., às nove horas da manhã na Mesopotâmia”, [2, 3] está associada com essa cronologia.

As cronologias baseadas nos textos bíblicos predominaram até o advento do Iluminismo. Com este aparecem as primeiras tentativas de determinar a idade da Terra com o emprego de métodos científicos. Em 1779, Georges-Louis Leclerc (1707-1788), Conde de Buffon, tentou determinar experimentalmente a idade da Terra. Como estava familiarizado com grande parte das evidências geológicas disponíveis, Buffon suspeitava que a Terra era bastante antiga. Familiarizado também com os escritos de Newton sobre o arrefecimento dos cometas depois da passagem destes pelas proximidades do Sol, Buffon perguntou-se em quanto tempo uma esfera de material derretido do tamanho da esfera da Terra esfriaria até atingir uma temperatura em que a vida pudesse ser sustentada. Para responder a esta pergunta, Buffon efetuou experimentos com um grupo de esferas de diferentes tamanhos e materiais. Aquecendo as esferas ao rubro, permitia esfriassem e media o tempo de resfriamento. Buffon então usou as taxas de resfriamento das esferas de seu experimento para determinar o tempo que um modelo da Terra levaria para esfriar de um estado primordial incandescente até atingir a temperatura ambiente. Seu resultado: aproximadamente 75 mil anos para que o processo de resfriamento ficasse completo. O processo experimental empregado por Buffon prenuncia a abordagem teórica de Kelvin, um século depois. Mas o golpe mais severo nas cronologias baseadas nos textos bíblicos veio nos séculos 18 e 19 com o estudo intenso dos registros fósseis. Grandes durações temporais eram necessárias para explicar a riqueza da fauna e da flora encontradas nesses registros. É o começo da era do tempo ilimitado que tanto desagradava Kelvin, que nele via uma grosseira violação das leis da então nova ciência da termodinâmica. Para os eminentes cientistas franceses Georges Cuvier (1769-1832) e Jean-Baptiste Lamarck (1744-1829), e outros, os registros fósseis em estratos sucessivos, cada um com sua própria fauna e flora, exigiam durações temporais muito maiores do que as exigidas pelos textos bíblicos. James Hutton (1726-1797), escocês, médico, fazendeiro e geólogo amador, depois de explorar durante anos as formações geológicas da Escócia e da Inglaterra, concluiu que exceto pela criação, os relatos bíblicos não fazem parte da história natural da Terra. Em um trabalho publicado em 1788, *The Theory of Earth*, Hutton argumenta que as forças da natureza, a água e o fogo, principalmente o fogo¹, atuando lentamente, mas durante um tempo indefinido, são suficientes para explicar a acidentada geografia física da Terra. Para Hutton, mais preocupado com as forças da natureza do que com o decorso do tempo, não havia “nenhum vestígio de um começo, nenhuma perspectiva de um final”. Hutton não advogava uma duração infinita, mas sim uma duração tão grande que era melhor qualificá-la como indefinida.

¹Hutton era um *plutonista* ou *vulcanista*, como eram chamados os que defendiam a ação do fogo como principal agente transformador. Os que defendiam a ação da água como principal agente transformador eram chamados *netunistas*.

Em 1830, Charles Lyell (1797-1875) publica o primeiro volume da sua influente obra *Principles of Geology* onde adotando os pontos de vista de Hutton sobre a questão, expõe os princípios que norteavam a formação da crosta terrestre. Opondo-se aos catastrofistas que preconizavam forças naturais de grande intensidade atuando durante breves intervalos de tempo para explicar a formação da geografia física da Terra, Lyell, como Hutton o fizera anteriormente, afirma que, exceto por ações localizadas e eventuais, a superfície da Terra está em equilíbrio dinâmico, sujeita à ação de forças naturais, água, fogo, vento, que atuam ao longo de durações temporais tão grandes que é melhor considerá-las como indefinidas ou de magnitude inimaginável à mente humana. O trabalho de Lyell, o segundo volume foi publicado em 1833 e a obra completa teve doze edições, é a grande referência da escola de pensamento geológico que tornou-se dominante na ciência britânica do período: o uniformitarismo. Enquanto isto, a teoria de evolução de Darwin exigia grandes durações temporais para que as espécies pudessem evoluir e alcançar as formas que observamos hoje. Darwin, na primeira edição de seu livro faz um cálculo simples e chega a conclusão que foram necessários 300 milhões de anos para a formação do Weald², um vale escavado pela ação da erosão situado no sul da Inglaterra. É contra essas durações imensuráveis dos uniformitaristas e a visão darwiniana da evolução biológica que Kelvin decide contrapor-se. Kelvin, ele próprio um amante da geologia (entre os seus muitos outros interesses), via no pensamento uniformitarista uma grosseira violação das leis da termodinâmica que ele contribuía para estabelecer, pois em seu entendimento as perdas de energia levariam a uma diminuição da atividade natural da Terra e o calor perdido nesta atividade seria irrecuperável. No darwinismo, Kelvin via uma falta de explicação para a origem da vida³, a exigência de durações temporais enormes e a aleatoriedade que acarretava em uma ausência de propósito divino que, como homem medianamente religioso, mas leitor e admirador de William Paley (1743-1805)⁴, abominava. É contra esse pano de fundo que devemos entender a participação e a enorme influência que Kelvin teve sobre a questão da idade da Terra e o posterior desenvolvimento das ciências da Terra.

2 Kelvin e a idade do Sol

Antes de voltar sua atenção para o problema da idade da Terra, Kelvin interessou-se pela origem do calor irradiado pelo Sol. Kelvin havia aplicado a teoria da condução do calor de Fourier [9] a um sol modelado por uma esfera sólida em processo de resfriamento e concluía que deste modo não haveria energia suficiente para manter a sua temperatura superficial por muito tempo.

²Duramente criticado por Kelvin, Darwin retirou o cálculo a partir da terceira edição de *Origem*.

³Kelvin defendia a idéia de que a vida origina-se na Terra a partir de formas pré-existentes vindas do espaço a bordo de meteoros que atingiram a superfície da Terra [4].

⁴William Paley, importante pensador cristão inglês, introduziu o argumento teleológico no seu livro *Natural Theology - or Evidences of the Existence and Attributes of the Deity Collected from the Appearances of Nature*, como prova da existência de Deus. Na Era Vitoriana, sua influência intelectual era enorme.

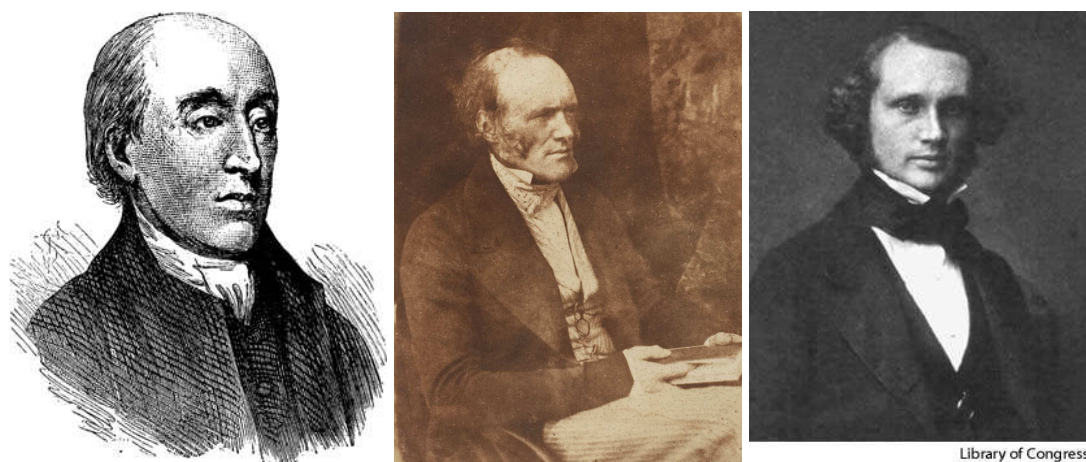


Figura 1: Da esquerda para a direita: James Hutton (1726-1797); *Sir* Charles Lyell (1797-1875); William Thomson (1824-1907), primeiro Barão Kelvin de Larg. (Ilustrações Wikipédia e Biblioteca do Congresso dos EUA).

Convencido também de que a energia solar não poderia ser de origem química, Kelvin adota a proposta de John J. Waterson (1811-1883) e James P. Joule (1818-1889) que consistia em atribuir a origem do calor do Sol ao impacto de meteoros. Kelvin refinou a idéia em mais de uma ocasião. No entanto, a constatação de que o aumento da massa do Sol em razão dos impactos levaria em um intervalo de tempo de 6 000 anos a uma variação não observada do período orbital da Terra de um mês e meio, aproximadamente, levou-o a abandonar a hipótese meteórica. Em 1862, em um artigo publicado em uma revista popular, Kelvin expõe a sua última e mais elaborada versão sobre a origem do calor solar [6]. Nela, a teoria meteórica inicial de Kelvin é substituída pela teoria de Helmholtz da contração gravitacional. Nas palavras de Kelvin [6]:

“A forma de teoria meteórica que agora parece ser a mais provável e que foi discutida pela primeira vez com base nos princípios termodinâmicos verdadeiros por Helmholtz, consiste em supor que o Sol e o calor solar originaram-se de uma coalescência de corpos menores caindo conjuntamente em razão da sua atração gravitacional mútua, e gerando, como deve ser em concordância com a lei maior demonstrada por Joule, um equivalente exato em calor ao movimento perdido na colisão. ”

Em 1856, o renomado físico alemão Hermann von Helmholtz (1821-1894) propusera um modelo simples para a formação do Sol cujo ingrediente principal era a contração gravitacional de uma nuvem de matéria gasosa em razão da atração gravitacional de uma protomassa inicial esférica e uniforme [5]. Como a protomassa era formada em primeiro lugar não estava em

questão, mas podemos pensar em algum tipo de instabilidade de uma nuvem muito rarefeita de matéria. O resultado obtido por Helmholtz para a energia gravitacional do Sol, W , em valor absoluto é:

$$W = \frac{3}{5} \frac{GM_{\odot}^2}{R_{\odot}}. \quad (1)$$

onde M_{\odot} e R_{\odot} são a massa e o raio do Sol, respectivamente. Substituindo os valores aproximados $R_{\odot} \approx 7 \times 10^8$ m, $M_{\odot} \approx 2 \times 10^{30}$ kg, obtemos:

$$W \approx 2.3 \times 10^{41} \text{ J}. \quad (2)$$

Uma estimativa da idade do Sol pode ser obtida se dividirmos este valor pelo valor atual da energia irradiada pelo Sol: $P_{\odot} \approx 3.6 \times 10^{26}$ J/s. O resultado é de aproximadamente 20 milhões de anos. O modelo de Helmholtz para a contração gravitacional do Sol é discutido em detalhe em [?].

Adotando a idéia de Helmholtz, mas levando em conta alguns aspectos que não estavam presentes no modelo original do físico alemão, como por exemplo, uma densidade de massa esfericamente simétrica, mas dependente da distância radial ao centro do Sol, Kelvin conclui que [6]: “O Sol não iluminou a Terra por 100 000 000 de anos, e quase certamente não o fez por 500 000 000 de anos”. Kelvin então volta-se para a determinação da idade da Terra.

3 Kelvin, Fourier e a idade da Terra

Para melhor entender o modelo empregado por Kelvin façamos novamente a pergunta: qual é a idade da Terra? Para Kelvin, responder a esta pergunta era determinar a partir das leis físicas, as leis da termodinâmica e da condução do calor de Fourier [9], qual a *duração geológica terrestre definida como a duração a partir da formação de uma crosta rígida*. No modelo de Kelvin, a fonte primária do calor produzido pela Terra se deve à energia gravitacional, ou por impacto de meteoros sobre um núcleo frio ou por colisão entre duas massas aproximadamente iguais. O mecanismo específico não é relevante para a determinação da idade geológica da Terra. O importante é que o resultado final seja uma esfera de matéria em estado de fusão. Mas, no modelo de Kelvin, o ponto de partida é uma esfera de rocha recém solidificada com temperatura uniforme, envolta por uma crosta fina de espessura muito menor do que o raio da Terra. Como então a Terra teria passado do estado primordial de matéria derretida para o de uma esfera sólida com temperatura inicial T_0 uniforme? Kelvin propõe três mecanismos distintos para que a Terra possa atingir este estágio [8, 1]. No primeiro, a rocha expande-se após solidificar-se formando uma crosta envolvendo o interior da Terra ainda em estado de fusão. No entanto, um interior líquido era incompatível com as evidências físicas e astronômicas da rigidez da Terra. No

segundo, levando em conta que a rocha sólida é mais densa do que a rocha derretida, pedaços de rocha próximos à superfície ao solidificarem-se mergulham em direção ao centro da Terra criando um núcleo sólido com uma estrutura intersticial preenchida com matéria derretida, mas capaz de suportar a crosta. O terceiro é o seu preferido: a matéria rochosa em estado de fusão ao esfriar-se próximo à superfície afunda em direção ao centro criando correntes de convecção que terminam por termalizar todo o globo até que este atinge uma temperatura uniforme T_0 e a solidificação começa. A Terra solidifica-se do centro para a superfície e na época em que a crosta se forma, a Terra já é uma esfera sólida com temperatura uniforme em todos os pontos do seu interior. Mas esta Terra sólida perde calor, pois em todos os sítios em que foi possível fazer medições, por exemplo nas minas, constatou-se um aumento da temperatura à medida em que a profundidade a partir da superfície aumentava, enquanto que a temperatura média na superfície terrestre não se altera significativamente. No interior da Terra sólida, agora o único mecanismo de propagação para o calor é o da condução. Uma vez que a camada superior da Terra não se torna mais quente de ano para ano, deve haver uma perda secular de calor por parte da Terra. Os parâmetros físicos que Kelvin necessitava eram: (a) o gradiente de temperatura na superfície da Terra; (b) o calor específico e, (c) o coeficiente de condução térmica da crosta terrestre. Como o processo de resfriamento por condução ocorre principalmente nas camadas superficiais, isto é, na crosta terrestre, pode-se considerar o problema como unidimensional.

Kelvin dominava com maestria a teoria do calor de Fourier⁵ e a aplicou ao problema como é mostrado na seção seguinte⁶.

4 A solução de Kelvin (opcional)

Para refazer o cálculo de Kelvin (em notação atual) comecemos por escrever a equação unidimensional que controla a evolução do campo de temperatura:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, \quad (3)$$

onde, no caso, x é coordenada associada com a profundidade da Terra, Figura 2, e D é o coeficiente de difusão térmica do meio que se supõe ser uniforme. A solução da Eq.(3) pelo método da transformada de Fourier é dada por [10]

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{D\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy T(y, 0) e^{-(x-y)^2/(4Dt)}, \quad (4)$$

⁵A frase de seu amigo pessoal e colaborador P. G. Tait (1831-1901) nos diz tudo: *Fourier fez Kelvin!* [4].

⁶O leitor pode se assim o desejar omitir a leitura dessa seção e passar para a seguinte onde se discute somente a solução.

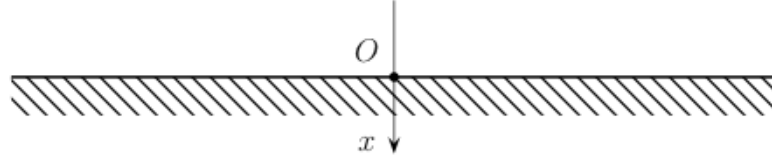


Figura 2: O problema de Kelvin.

onde y é uma variável muda de integração e $T(x, 0)$ é a distribuição inicial do campo de temperaturas. O problema de Kelvin é definido pela Eq. (4) e as condições de contorno

$$T(x, t) = \begin{cases} 0, & x = 0; \quad \forall t, \\ T_0, & x \rightarrow \infty; \quad \forall t, \end{cases} \quad (5)$$

conjuntamente com a distribuição inicial de temperatura

$$T(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ T_0, & x > 0. \end{cases} \quad (6)$$

Em princípio, podemos inserir a Eq. (6) na Eq. (4) e escrever

$$T(x, t) = \frac{T_0}{2\sqrt{D\pi t}} \int_0^{+\infty} dy e^{-(x-y)^2/(4Dt)}. \quad (7)$$

Mas essa solução não satisfaz à condição de contorno $T(0, t) = 0$, embora satisfaça à condição $T(x, t) = T_0$ quando $x \rightarrow \infty$. Para verificar isto fazemos a transformação de variáveis

$$y - x = 2\sqrt{Dt} z, \quad dy = 2\sqrt{Dt} dz. \quad (8)$$

Substituindo em (7) temos:

$$T(x, t) = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} dz e^{-z^2}. \quad (9)$$

Fazendo $x = 0$

$$T(0, t) = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dz e^{-z^2}. \quad (10)$$

Como esta a integral vale $\sqrt{\pi}/2$, obtemos

$$T(0, t) = \frac{T_0}{2} \neq 0. \quad (11)$$

Por outro lado, se fizermos $x \rightarrow \infty$, temos

$$T(0, t) = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2}. \quad (12)$$

a integral vale $\sqrt{\pi}$ e, neste caso, obtemos a condição de contorno correta no limite $x \rightarrow 0$. É necessário construir uma solução que seja solução da equação unidimensional do calor e satisfaça às condições impostas por Kelvin em seu modelo. Com esta finalidade em mente, observemos que, para $x > 0$, a Eq. (9) — ou a Eq.(7) — satisfaz à equação unidimensional do calor. De fato, escrevendo por conveniência $T(x, t) = T^+(x, t)$ e fazendo uso da fórmula de Leibniz (veja o Apêndice) obtemos

$$\frac{\partial T^+(x, t)}{\partial t} = -\frac{T_0 x}{4\sqrt{\pi Dt}} \frac{e^{-x^2/(4Dt)}}{t}, \quad (13)$$

e

$$\frac{\partial T^+(x, t)}{\partial x} = +\frac{T_0 x}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-x^2/(4Dt)}. \quad (14)$$

Segue também derivando esta última equação em relação a x que

$$\frac{\partial^2 T^+(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{1}{4} \frac{T_0}{\sqrt{\pi Dt}} \frac{x}{Dt} e^{-x^2/(4Dt)}. \quad (15)$$

Substituindo na equação unidimensional do calor verificamos a identidade desejada. Considere agora $x < 0$ e a distribuição de temperatura inicial auxiliar:

$$T(x, 0) = \begin{cases} T_0, & x < 0; \\ 0, & x > 0. \end{cases} \quad (16)$$

É fácil verificar que

$$T^-(x, t) = \frac{T_0}{2\sqrt{D\pi t}} \int_{-\infty}^0 dy e^{-(x-y)^2/(4Dt)} \quad (17)$$

é a solução da equação unidimensional do calor no eixo negativo. Para demonstrar que $T^-(x, t)$ é a solução apropriada para $x < 0$ podemos proceder como antes. Definindo primeiramente a nova variável $y = -\tilde{y}$, e $dy = -d\tilde{y}$, podemos escrever:

$$T^-(x, t) = \frac{T_0}{2\sqrt{D\pi t}} \int_0^{\infty} d\tilde{y} e^{-(x+\tilde{y})^2/(4Dt)}. \quad (18)$$

Agora definimos:

$$x + \tilde{y} = 2\sqrt{Dt} z, \quad d\tilde{y} = 2\sqrt{Dt} dz. \quad (19)$$

Segue então que:

$$T^-(x, t) = \frac{T_0}{2\sqrt{D\pi t}} \int_x^{+\infty} \frac{dy}{2\sqrt{Dt}} e^{-z^2/(4Dt)}. \quad (20)$$

Usando a fórmula de Leibniz mais uma vez obtemos:

$$\frac{\partial T^-(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial T^+(x, t)}{\partial t} = \frac{T_0 x}{4\sqrt{\pi Dt}} \frac{e^{-x^2/(4Dt)}}{t}, \quad (21)$$

e.

$$\frac{\partial T^-(x, t)}{\partial x} = -\frac{\partial T^+(x, t)}{\partial x} = -\frac{T_0 x}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-x^2/(4Dt)}. \quad (22)$$

Segue também, derivando esta última equação em relação a x , que:

$$\frac{\partial^2 T^-(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 T^+(x, t)}{\partial x^2} = +\frac{1}{4} \frac{T_0}{\sqrt{\pi Dt}} \frac{x}{Dt} e^{-x^2/(4Dt)}. \quad (23)$$

Substituindo na equação unidimensional do calor obtemos novamente a identidade desejada. Portanto, $T^+(x, t)$ e $T^-(x, t)$ são soluções válidas da equação do calor, e mais ainda, a combinação linear

$$T(x, t) = T^+(x, t) - T^-(x, t), \quad (24)$$

satisfaz à equação unidimensional do calor e é a solução do problema de Kelvin, pois

$$T(0, t) = T^+(0, t) - T^-(0, t) = 0, \quad (25)$$

como pode ser facilmente verificado e, no limite $x \rightarrow \infty$, a solução $T^-(x, t)$ é nula e, como vimos antes, $T^+(x, t) = T_0$. Portanto, a solução do problema de Kelvin é dada explicitamente por

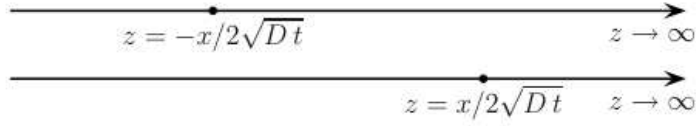


Figura 3: Domínios de integração para a Eq. (26) .

$$T(x, t) = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\frac{x}{2\sqrt{Dt}}}^{+\infty} dz e^{-z^2} - \int_{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}}^{+\infty} dz e^{-z^2} \right), \quad (26)$$

ou ainda (veja a Figura 3):

$$T(x, t) = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{Dt}}}^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} dz e^{-z^2}. \quad (27)$$

Como o integrando é uma função par, obtemos finalmente:

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \frac{2T_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} dz e^{-z^2} \\ &= T_0 \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right), \end{aligned} \quad (28)$$

onde o símbolo erf indica a função erro. A Eq. (28) é a solução em notação moderna do modelo de Kelvin para o resfriamento da Terra a partir de uma temperatura inicial T_0 .

5 A idade da Terra segundo Kelvin

A partir da solução dada pela Eq. (28) podemos calcular o gradiente de temperatura na superfície da Terra e inserir os dados experimentais. De fato, o gradiente da Eq. (28) também pode ser calculado com a fórmula de Leibniz para a derivada de uma integral, veja o Apêndice anexo, e o resultado é

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = \frac{T_0}{\sqrt{\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt}. \quad (29)$$

Em $x = 0$, o gradiente se lê:

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} \equiv G(0, t) = \frac{T_0}{\sqrt{\pi Dt}}. \quad (30)$$

Identificando nessa fórmula t com a idade da Terra, $t \rightarrow \Delta t_{\text{Terra}}$, temos:

$$\Delta t_{\text{Terra}} = \frac{T_0^2}{G^2(0, \Delta t_{\text{Terra}}) \pi D}. \quad (31)$$

Os dados que Kelvin utilizou eram: $D = 1,2 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} = 400 \text{ pés}^2/\text{ano}$, $G(0, \Delta t_{\text{Terra}}) = 0,037 \text{ }^\circ\text{C}/\text{m} = 37 \text{ }^\circ\text{C}/\text{km} = \frac{1}{50} \text{ }^\circ\text{F}/\text{pé}$. Com estes dados, se $T_0 = 10\,000 \text{ }^\circ\text{F}$, então $\Delta t_{\text{Terra}} = 200$ milhões de anos, e se $T_0 = 7000 \text{ }^\circ\text{F}$, segue que $\Delta t_{\text{Terra}} = 97$ milhões de anos. Para visualizar melhor a solução definimos o comprimento de penetração λ_p para $t = \Delta t_{\text{Terra}}$, como o valor de x tal que quando $x = \lambda_p$, o gradiente vale 1/e do valor do gradiente na superfície $x = 0$.

Neste caso, vemos que:

$$\lambda_p = 2\sqrt{D \Delta t_{\text{Terra}}} \quad (32)$$

Na Figura 4 mostra-se os gráficos das razões $T(x, \Delta t_{\text{Terra}})/T_0$, e $G(x, \Delta t_{\text{Terra}})/G(0, \Delta t_{\text{Terra}})$. Pode-se ver também que a aproximação unidimensional de Kelvin fica plenamente justificada.

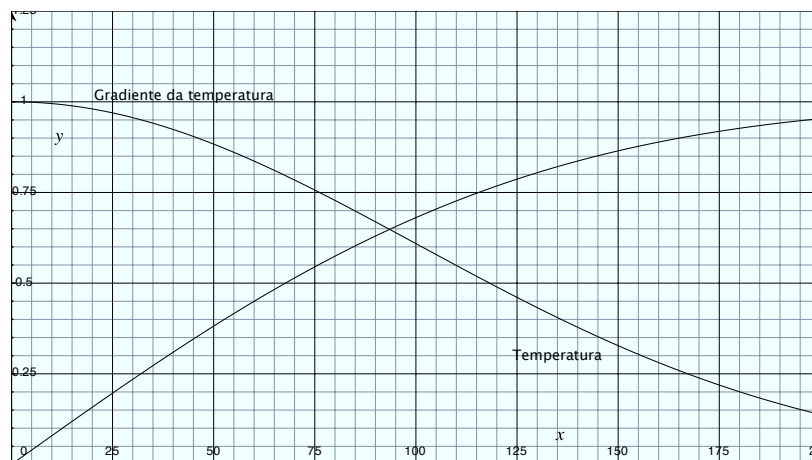


Figura 4: A Figura mostra os gráficos das funções e^{-x^2/λ_p^2} e $\text{erf}(x/\lambda_p)$, para $\Delta t_{\text{Terra}} = 97$ milhões de anos e $D = 1,2 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Nesse caso $\lambda_p \approx 142 \text{ km}$. As curvas representam o gradiente de temperatura e a temperatura adimensional como funções da profundidade da Terra medida em km.

Esse cálculo sustenta o forte ataque que Kelvin lança contra os uniformitaristas. Em 1868, em um encontro da Geological Society de Glasgow, Kelvin afirma:

“Uma grande reforma na especulação geológica parece agora ter-se tornada necessária.”

Um ano mais tarde, em 1869, Thomas H. Huxley (1825-1895), darwinista convicto e presidente da Geological Society de Londres responde ao ataque, mas contra a matemática de Kelvin não tem condições de apresentar argumentos convincentes. Aos poucos, o resultado de Kelvin impõe-se entre os geólogos que só manifestam-se contrariados quando revisões posteriores do resultado reduziram mais ainda a idade da Terra.

6 A crítica de John Perry

A autoridade científica de Kelvin era enorme e o desconhecimento de métodos matemáticos avançados por parte dos geólogos e evolucionistas também. Conseqüentemente, esses últimos ficaram sem argumentos quantitativos para fazer frente à abordagem de Kelvin, embora pudessem apresentar argumentos qualitativos em contrario. Mas, em 1895, três anos após sua publicação, os resultados de Kelvin receberam a primeira crítica quantitativa séria. Eles foram criticados por seu antigo assistente e aluno, John Perry (1850-1920) que chamou a atenção para o fato de que o único ponto fraco no cálculo Kelvin era seu modelo da Terra [11, 12, 13, 14].

“Tenho dito repetidamente que é inútil esperar que Lord Kelvin tenha cometido um erro de cálculo [...] Mas as maiores autoridades da geologia e da paleontologia estão satisfeitas com as evidências apresentadas por suas respectivas ciências que indicam uma idade muito maior do que os 100 milhões de anos de Lord Kelvin, e se elas estiverem corretas, deve haver algo errado com as condições de Lord Kelvin .”

Ou seja, Perry não questiona os métodos de Kelvin fundamentados na teoria do calor de Fourier, mas sim os parâmetros e o modelo da Terra empregados por este. Perry propõe então que examinemos os efeitos nos resultados finais de uma fina camada esférica envolvendo a Terra constituída por um material distinto da esfera semi-sólida do modelo de Kelvin. Refazendo o cálculo de Kelvin fazendo uso dos mesmos métodos, isto é, da teoria do calor de Fourier, Perry obtém a seguinte relação entre a idade da Terra calculada por ele, Δt_{Terra}^{Perry} , e a idade da Terra calculada por Kelvin:

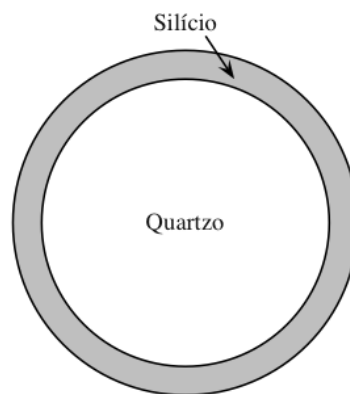


Figura 5: John Perry (1850-1920) e uma ilustração de seu argumento.

$$\Delta t_{\text{Terra}}^{\text{Perry}} = \Delta t_{\text{Terra}}^{\text{Kelvin}} \left(\frac{D_{\text{camada}}}{D_{\text{esfera}}} \right)^2, \quad (33)$$

onde D_{camada} e D_{esfera} são, respectivamente, as constantes de difusão da camada externa e da esfera interior. Se, por exemplo, considerarmos a camada externa feita de óxidos de silício, $D_{\text{camada}} \approx 8,3 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$, e a esfera interior feita de quartzo, $D_{\text{camada}} \approx 1,4 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, teríamos;

$$\left(\frac{D_{\text{camada}}}{D_{\text{esfera}}} \right)^2 \approx 3. \quad (34)$$

Dependendo da estimativa da temperatura inicial, a idade da Terra estaria entre 300 e 600 milhões de anos. Circunstancialmente, a Terra poderia ser ainda mais antiga. O grande mérito do cálculo de Perry foi mostrar como o resultado final depende do modelo que se faz da Terra e poderíamos pensar que houvesse dado um novo alento aos partidários das grandes durações temporais. Infelizmente, a repercussão da crítica de Perry não foi a que esperaríamos. Para uma análise mais detalhada da contribuição de Perry ao debate veja [14].

7 Observações finais

A questão da idade da Terra foi resolvida somente após a descoberta da radioatividade e dos métodos de datação radiométrica, A Terra tem a aproximadamente 4,5 bilhões de anos, valor que também não foi obtido sem uma grande controvérsia que por si só merece a nossa atenção, mas que foge aos nossos objetivos presentes. As nossas idéias sobre a estrutura interna do nosso planeta avançaram muito graças aos trabalhos conjuntos de físicos e geólogos e às técnicas sísmográficas e de prospecção modernas. *Grosso modo*, sabemos hoje que a Terra possui um núcleo interno sólido de ferro e níquel, um núcleo externo líquido, também de ferro e níquel, duas camadas intermedárias, o manto inferior e o manto superior, onde encontramos, silício, manganês, ferro, alumínio, cálcio, sódio e potássio, que combinados com o oxigênio formam diversos tipos de óxidos, e uma fina crosta cuja espessura varia entre 5 e 70 quilômetros, aproximadamente. É na crosta e no manto que se concentram os elementos radioativos responsáveis pela maior parte do calor da Terra. A Figura 6 representa esquematicamente a estrutura interior da Terra como a concebemos atualmente.

Que se pode dizer hoje em dia a respeito do papel desempenhado por Kelvin nessa grande controvérsia? Podemos afirmar com segurança que a grande contribuição de Kelvin foi estabelecer limites físicos sobre as exigências temporais de geólogos e evolucionistas. As restrições que Kelvin impôs às durações temporais, a última restringia a idade da Terra a apenas 20 milhões de anos, eram consequência de melhores resultados experimentais para os parâmetros do modelo e,

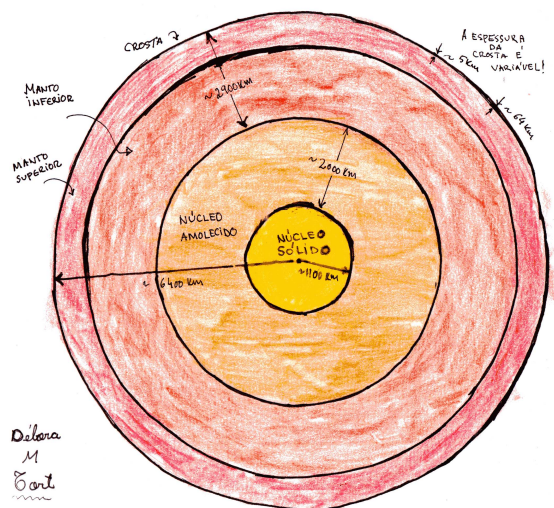


Figura 6: A estrutura interna da Terra. (Débora M. Tort, 10 anos) .

naturalmente, do seu desconhecimento à época das fontes adicionais de calor que o decaimento radioativo engendra. Entretanto, sua atitude sobranceira em relação às críticas ao seu cálculo provocou ressentimentos que ainda hoje não foram esquecidos. Mesmo com a descoberta da radioatividade (que por si só não invalida a abordagem de Kelvin), Kelvin nunca admitiu publicamente a possibilidade de seus cálculos estarem superados, embora admitisse isto em privado, e tenha afirmado na época da publicação dos seus cálculos que estes eram válidos desde que novas fontes de calor não fossem descobertas.

A questão da idade da Terra é claramente uma questão interdisciplinar envolvendo a física, a geologia e a biologia, e como tal é uma excelente oportunidade pedagógica. Com a omissão dos aspectos técnicos mais difíceis, a questão em si pode ser discutida no ensino médio como, por exemplo, o faz Stinner em [16], e como propõe que se faça em nosso país com as adaptações necessárias um dos autores (F. Nogarol) do presente trabalho [17]. A questão da idade da Terra é também claramente uma questão social e ideológica e remete ao problema do papel do cientista na sociedade e sua influência na formação do público leigo. Este importante aspecto do problema permite o emprego da dramatização como instrumento pedagógico como exposto, no caso do ensino de física, em [18]. No caso da idade da Terra, o debate foi dramatizado por Stinner e Teichmann em [19]. Evidentemente, não é factível, ou mesmo desejável, desenvolver um curso de física no ensino médio fundamentado apenas em tópicos similares ao que expu-

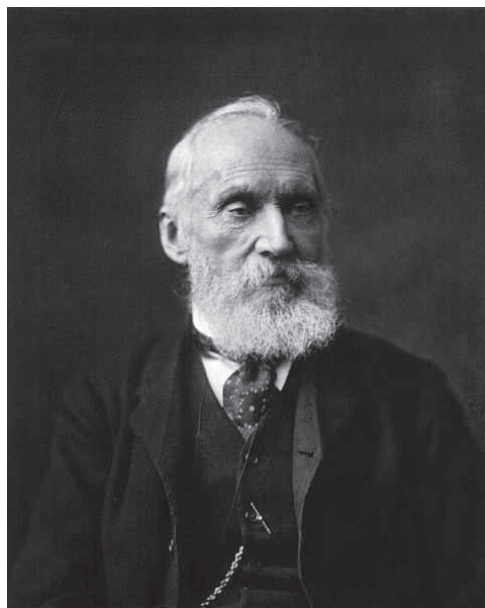


Figura 7: Lord Kelvin, o cientista de maior prestígio da Era Vitoriana fotografado já no ocaso de sua carreira. (Ilustração Wikipédia.)

semos aqui, isto é, com fortes aspectos interdisciplinares e implicações sociais, mas podemos pensar em desenvolvê-los na forma de atividades complementares aos tópicos tradicionais e/ou palestras. Temas deste tipo são ideais para fazer com que estudantes e professores reflitam o importante papel que as ciências desempenham na construção da sociedade moderna.

A questão da idade da Terra é um tema fascinante e o presente trabalho naturalmente serve apenas como uma introdução ao tema. A literatura pertinente é extensa e nossa bibliografia é representativa, não exaustiva. O livro de Burchfield [1] é uma excelente introdução ao assunto. Uma introdução curta, mas esclarecedora é o artigo de Badash [2]. Os aspectos técnicos e mais modernos da questão como por exemplo, os métodos de datação por decaimento radioativo são discutidos por Dalrymple [3]. Finalmente, uma biografia de William Thomson, Lord Kelvin, escrita para o público em geral é a de Lindley [4].

Apêndice: a fórmula de Leibniz

O teorema ou fórmula de Leibniz para a diferenciação de uma integral se lê [20]:

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, z) dz = f(x, v(x)) \frac{dv(x)}{dx} - f(x, u(x)) \frac{du(x)}{dx} + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, z) dz.$$

Referências

- [1] J.D. Burchfield: *Lord Kelvin and the Age of the Earth* (New York: Science History Publications), 1975.
- [2] L. Badash: *The Age-of-the-Earth Debate*, Sci. Am. (**262**) 90-96 (August) 1989.
- [3] G. B. Dalrymple: *The Age of the Earth* (Stanford: Stanford University Press), 1994.
- [4] D. Lindley: *Degrees Kelvin* (Washington: Joseph Henry Press), 2004.
- [5] Helmholtz H von 1856 *Philos. Mag.* **11** 489-578.
- [6] W. Thomson (Lord Kelvin): *On the Age of the Sun's Heat*, Macmillan's Magazine **5** (March 5) 388-393, 1862.
- [7] A. C. Tort e F. Nogarol : *Another look at Helmholtz' model for the gravitational contraction of the Sun*. Eur. J. of Phys. **32** 1679-1685, 2011.
- [8] W.Thomson: *On the secular cooling of the Earth*, Trans. R. Soc. Edinburgh **23** 157-170, 1863.
- [9] J. B. Fourier: *Théorie analytique de la chaleur*, (Paris: Académie des Sciences) 1822.
- [10] E. Kreyszig 1993 *Advanced Engineering*, 7th edn, (New York: John Wiley).
- [11] J. Perry *On the age of the Earth*, Nature **51** 224-227, 1895.
- [12] J. Perry *On the age of the Earth*, Nature **51** 341-342, 1895.
- [13] J. Perry *On the age of the Earth*, Nature **51** 582-583, 1895.
- [14] P. England, P. Molnar, F. Richter: *John Perry's neglected critique of Kelvin's age for the Earth: a missed opportunity in geodynamics* , GSA Today **17** 4-9 2007.
- [15] F. D. Stacey J. GeoPhys. Research **105**, 13155-13158, 2000.
- [16] A. Stinner 2002 *Phys. Edu.* **37** 296
- [17] F. Nogarol: *O debate sobre a idade da Terra no Ensino Médio*, tese de mestrado, Mestrado Profissional em Ensino de Física, IF-UFRJ.
- [18] R. L. Ponting: *Combining Physics and Drama*, Phys. Teacher **16** (7), 482-483, 1978.

- [19] A. Stinner e J. Teichmann: *Lorde Kelvin and the Age-of-the-Earth Debate: A Dramatization*, Sci. Educ. **12** 213-328, 2003.
- [20] M. Abramowitz e I. Stegun (editori): *Handbook of Mathematical Functions* (New York: Dover), 1965.