

# AS COMPLEXÕES DE LEIBNIZ NOS ELEMENTOS DE EUCLIDES

**APESENTAÇÃO: RAQUEL ANNA SAPUNARU**

**[raquel.sapunaru@ict.ufvjm.edu.br](mailto:raquel.sapunaru@ict.ufvjm.edu.br)**

# ***OS ELEMENTOS DE EUCLIDES***

◆ Definições

◆ Postulados

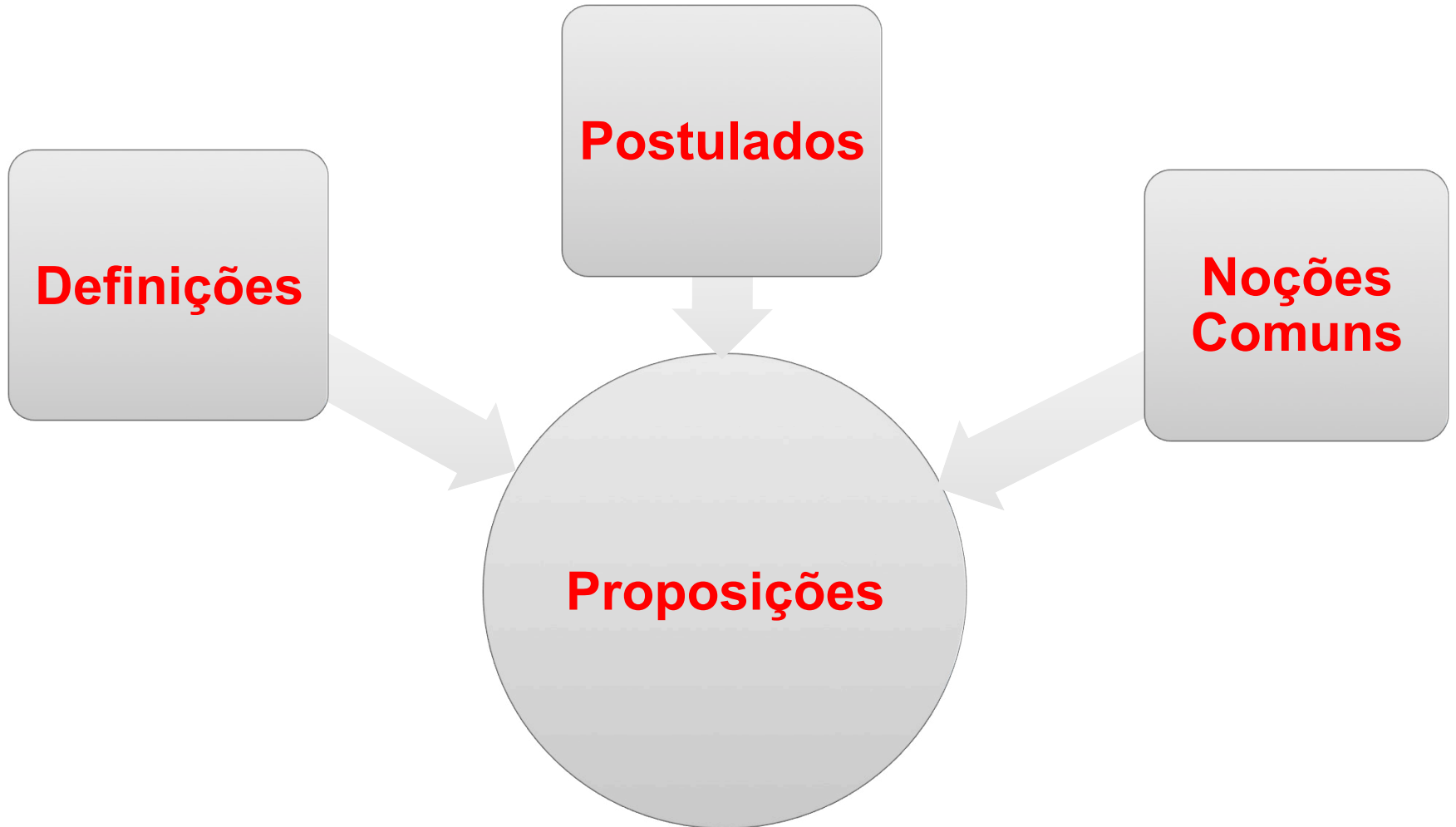
(semelhantes aos Teoremas - demonstráveis)

◆ Noções Comuns

(semelhantes aos Axiomas – não demonstrável)

◆ Proposições

# ***OS ELEMENTOS DE EUCLIDES***



# OS POSTULADOS DE *OS ELEMENTOS DE EUCLIDES*

- a) Por dois pontos passa uma reta.
- b) Pode-se prolongar uma reta indefinidamente.
- c) Descreve-se um círculo com um centro e uma distância.
- d) Todos os ângulos retos são iguais.
- e) Caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, elas se encontrarão no lado onde estão os ângulos menores que dois retos.



# ENTENDENDO AS NOÇÕES COMUNS DE *OS ELEMENTOS*

Para entendermos a estrutura de *Os Elementos*, devemos voltar a *Aristóteles*: **TODA A CIÊNCIA DEDUTIVA SE CONSTRÓI COM BASE EM ALGUNS PRINCÍPIOS NÃO DEMONSTRÁVEIS, CASO CONTRÁRIO, TERÍAMOS UMA CADEIA INFINITA DE DEMONSTRAÇÕES.**

Esses princípios são de dois tipos, a saber:

- 1) **As noções comuns:** que são verdades gerais válidas em qualquer ciência dedutiva.
- 2) **As noções especiais:** que estão na base de uma ciência particular, dedutiva.

# AS NOÇÕES COMUNS DE OS *ELEMENTOS*

- Coisas iguais às mesmas coisas são iguais entre si.  
 $a=c$  e  $b=c \rightarrow a=b$
- Coisas iguais adicionadas a coisas iguais formam coisas iguais.  
 $a=b$ ;  $a+c=d$  e  $b+c=f \rightarrow d=f$   
 $a=b$  e  $c=d \rightarrow a+c=b+d$
- Coisas iguais subtraídas de coisas iguais formam coisas iguais.  
 $a=b$ ;  $a-c=d$  e  $b-c=f \rightarrow d=f$   
 $a=b$  e  $c=d \rightarrow a-c=b-d$
- Coisas que se ajustam são iguais entre si.  
 ou 
- O todo é maior que as partes.  
Se  $a$  é parte de  $A$ ,  $A > a$

# O SIMPLES E O COMPLEXO

<b>Noção ou Conceito</b>	<b>Enunciado A ou N; V ou F</b>
<b>Não Pode ser Analisado</b>	<b>Pode ser Analisado</b>
<b>Não pode ser Definido em Termos de Outros</b>	<b>Pode ser Definido em Termo de Outros</b>
<b>Participa da Existência do Complexo</b>	<b>É uma Combinação de Simples</b>
<b>Autoexplicáveis</b>	<b>Necessita de Definição</b>
<b>Não é Tecido por uma Combinação</b>	<b>É Tecido por uma Combinação</b>
<b>Indefinido e Inanalisável</b>	<b>Definido e Analisavel</b>

# A IDEIA DE LEIBNIZ

- No texto “Dissertatio”, Leibniz introduz conceitos que irão fundamentar a **COMPLEXÃO** como método genérico, visto que todas as coisas podem utiliza-lo e obter sucesso com seus resultados.
- Contudo, Leibniz não esclarece como esse método pode ser aplicado na construção das proposições de *Os Elementos* de Euclides, somente menciona isso como um fato!



# NA LETRA DE LEIBNIZ

“Nós usaríamos o mesmo método para explicar todas as definições de *Os Elementos* de Euclides, se o tempo pudéssemos superar.”

(Leibniz)

# OS OBJETIVOS DO ARTIGO

- 1) Enxergar a existência das **COMPLEXÕES** na construção de *Os Elementos* de Euclides.
- 2) Encontrar uma nova forma de ler e entender não somente *Os Elementos de Euclides*, mas qualquer outra estrutura, através dos conceitos de 'simples' e 'complexo'; e, da combinação e da complexão.

# OS PRINCIPAIS CONCEITOS DE LEIBNIZ USADOS NAS COMPLEXÕES

- a) Número: é a quantidade de coisas que devem ser combinadas.
- b) Expoente: é o número de partes de cada combinação.
- c) **COMPLEXÕES**: são o número de combinações possíveis para este expoente ou a união de números menores para formar um número maior.
- d) Situs: leva em consideração a ordem das partes.

# UM EXEMPLO

Em outras palavras, Leibniz chama de **COMPLEXÃO** a variabilidade de um complexo, pois **4** coisas quaisquer podem ser colocadas juntas de **15** modos distintos.

Assim, dados A, B, C e D, então:

**Uma Coisa:** A, B, C, D = 4

**Duas Coisas:** AB, AC, AD, BD, BC, CD = 6

**Três Coisas:** ABC, ABD, ADC, DBA = 4

**Quatro Coisas:** ABCD = 1

**TOTAL:** 15 combinações sem repetições!

# HIPÓTESE 1/MÉTODO 1

- a) Toda proposição seria identificada pela complexão de proposições independentes.
- b) Porém, há somente **2** proposições independentes.

# HIPÓTESE 2/MÉTODO 2

- a) Considerar cada proposição como a **COMPLEXÃO** de elementos pertencentes às definições.
- b) Pensando assim, há duas formas de fazer:
- Olhar apenas o enunciado da proposição procurando quais definições foram necessárias.
  - Olhar para toda a demonstração, procurando quais definições foram necessárias.

# TABELA 1: DEFINIÇÕES

1) Ponto	11) Ângulo reto	21) Semicírculo	31) Triângulos obtusângulos
2) Linha	12) Reta perpendicular	22) Centro de semicírculo	32) Triângulos acutângulos
3) Extremidade de linha	13) Ângulo obtuso	23) Figuras retilíneas	33) Quadrado
4) Linha reta	14) Ângulo agudo	24) Triláteros	34) Oblongo
5) Extremidade de linha reta	15) Fronteira	25) Quadriláteros	35) Losângulo
6) Superfície	16) Figura	26) Mutiláteros	36) Rombóide
7) Extremidade de superfície	17) Círculo	27) Triângulos equiláteros	37) Trapézio
8) Superfície plana	18) Circunferência	28) Triângulos isósceles	38) Paralelas
9) Ângulo plano	19) Centro de círculo	29) Triângulos escaletos	
10) Ângulo retilíneo	20) Diâmetro de círculo	30) Triângulos retângulos	

# AS DEFINIÇÕES USADAS NAS PROPOSIÇÕES

**Ver Tabela 2 do *Handout***



# OS AJUSTES NECESSÁRIOS

- ✓ Dada a extensão de *Os Elementos* de Euclides, usamos como exemplo somente a Proposição 47 do Livro 1.
- ✓ No caso específico de nosso exemplo, estamos considerando as **COMPLEXÕES** em um âmbito mais geral, abrangendo também estruturas mais complexas, como a estrutura de “árvore”.
- ✓ Vale ressaltar que para Leibniz, as **COMPLEXÕES** dizem respeito somente às combinações propriamente ditas, ou seja, a ordem dos fatores não importa.

# A PROPOSIÇÃO 47: O TEOREMA DE PITÁGORAS

***Ver verso do Handout***

# CONCLUSÃO

A construção de *Os Elementos* de Euclides pode **SIM** ser vista como proposto por Leibniz, ou seja, baseada no conceito de **COMPLEXÕES**.

Porém, para tal, é preciso lançar mão de um entendimento mais amplo do conceito de **COMPLEXÃO** que envolvem outras estruturas, como a de “árvore”.

# PERSPECTIVA

- ✓ Criar um modelo semelhante ao criado para a Proposição 47 (Teorema de Pitágoras) do Livro I, para a Proposição 22 do Livro V.
- ✓ Esse livro é conhecido por tratar a teoria das proporções, atribuído a Eudoxo de Cnidos, de modo puramente geométrico.
- ✓ Ele é conhecido como “o livro das magnitudes e proporções” e difere dos livros anteriores por utilizar, sem parcimônia, o Método da Exaustão, também de autoria de Eudoxo.

# O MÉTODO DA EXAUSTÃO

- Consiste em preencher uma figura geométrica qualquer cuja área queremos calcular com polígonos regulares.
- Quanto maior for número de lados do polígono regular, mais perto da área da figura geométrica estará sua área.
- Por exemplo: a área do quilógono está mais perto da área do círculo do que a área do quadrado!

# REFERÊNCIAS

ARISTÓTELES. Analíticos Posteriores. In: **Organon**. São Paulo: Edipro, 2005.

EUCLIDES. **Os Elementos**. São Paulo: UNESP, 2009.

\_\_\_\_\_. **The Thirteen Books of Euclid's Elements**. Chicago: University of Chicago, 1952.

\_\_\_\_\_. **Elementos de Geometria**. Lisboa: Edições Cultura, 1944.

KATZ, V. J. **História da Matemática**. Lisboa: Fundação Calouste-Gulbekian, 2010.

# REFERÊNCIAS

LEIBNIZ, G. W. Dissertation on the art of combinations. In: LOEMKER, L. E. (org.) **G. W. Leibniz Philosophical papers and letters**. Dordrecht: Kluwer Academics Publishers, 1989, p. 73-84.

\_\_\_\_\_. Dissertatio de arte combinatoria. In: GERHARDT, C. I. (GM) (org.) **G.W. Leibniz Die Mathematische Schriften**. Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1971, GM V, p.7-87.

\_\_\_\_\_. Introductio ad encyclopoediam arcanam. In: COUTURAT, T, L. (org.) **Opuscules et fragments inédits**. Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1988.

SAPUNARU, R. A.; SANTIAGO, D.; LIMA, M. T.; SOUZA, M.; SOUZA, B. As complexões de Leibniz nos elementos de Euclides. **Revista Ipseitas**. 2ª. edição. UFSC. 2015. No Prelo.

# AGRADECIMENTOS

- CAPES e FAPEMIG, pelas bolsas “Jovens Talentos” e “Iniciação científica”.
- Equipe do projeto “Euclides para os Vales” (segmento pesquisa), pela dedicação.
- Equipe do projeto “Determinação das origens histórico-filosóficas dos cálculos diferencial e integral de Leibniz” , pela dedicação.
- Aos presentes, pelo interesse.



**Handout**  
**As Complexões de Leibniz nos Elementos de Euclides**

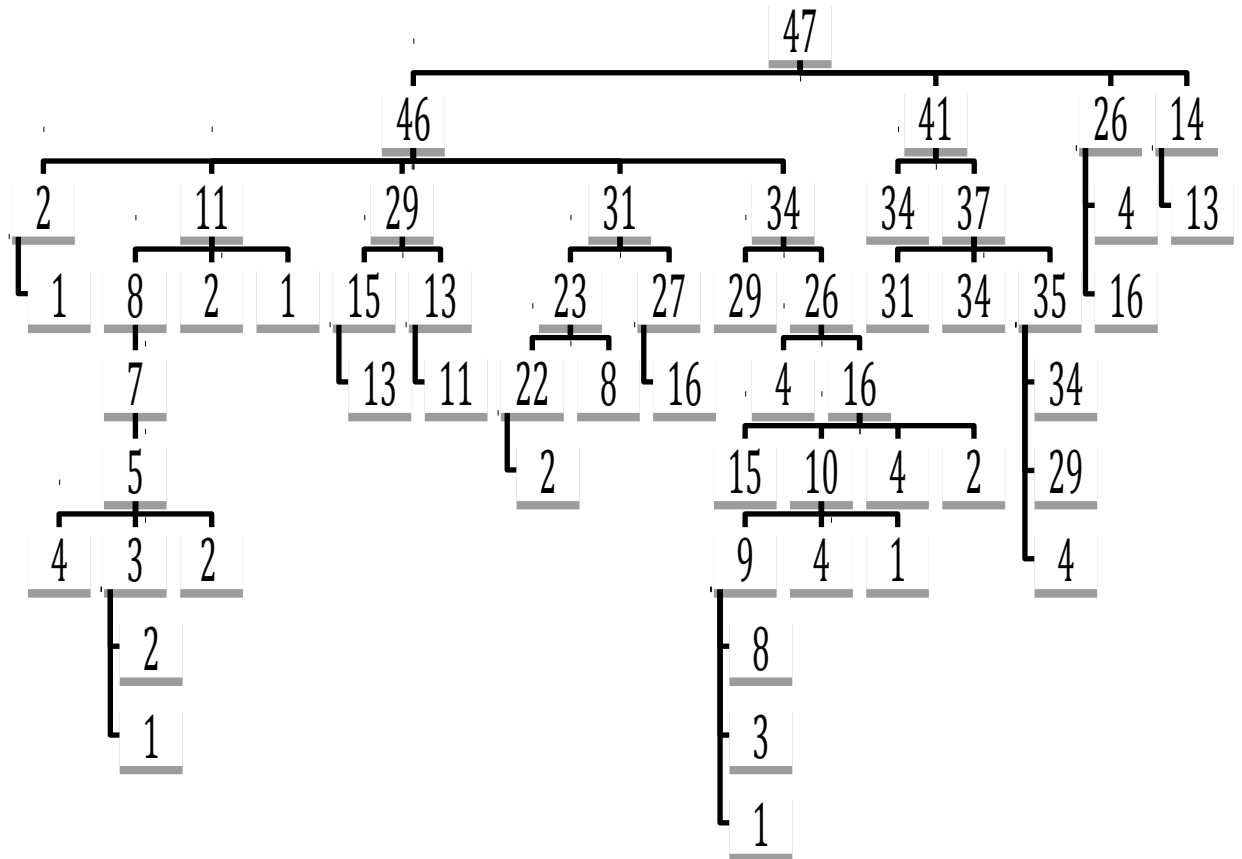
**Tabela 1: Definições**

1) Ponto	2) Linha	3) Extremidade de linha	4) Linha reta
5) Extremidade de linha reta	6) Superfície	7) Extremidade de superfície	8) Superfície plana
9) Ângulo plano	10) Ângulo retilíneo	11) Ângulo reto	12) Reta perpendicular
13) Ângulo obtuso	14) Ângulo agudo	15) Fronteira	16) Figura
17) Círculo	18) Circunferência	19) Centro de círculo	20) Diâmetro de círculo
21) Semicírculo	22) Centro de semicírculo	23) Figuras retilíneas	24) Triláteros
25) Quadriláteros	26) Multiláteros	27) Triângulos equiláteros	28) Triângulos isósceles
29) Triângulos escalenos	30) Triângulos retângulos	31) Triângulos obtusângulos	32) Triângulos acutângulos
33) Quadrado	34) Oblongo	35) Losângulo	36) Rombóide
37) Trapézio	38) Paralelas		

**Tabela 2: Definições/Elementos usados nas proposições**

Proposição	Definições/Elementos	Proposição	Definições/Elementos
1 (a)	1, 5, 17, 19, 27	25 (c)	5, 10, 24
2 (a)	1, 5, 17, 19, 27	26 (c)	5, 10, 24
3	1, 5, 17, 19	27 (g)	1, 5, 10, 38
4 (b)	1, 5, 10, 24	28	5, 10, 11, 38
5	1, 5, 10, 24, 29	29	4, 5, 10, 11, 38
6 (c)	5, 10, 24	30	5, 10, 38
7 (d)	1, 5, 10	31 (g)	1, 5, 10, 38
8 (b)	1, 5, 10, 24	32	1, 5, 10, 11, 24, 38
9 (e)	1, 5, 10, 27	33	5, 10, 24, 38
10 (e)	1, 5, 10, 27	34	5, 10, 24, 25, 38
11	1, 5, 11, 27	35	5, 10, 24, 25, 37
12	1, 4, 10, 11, 17, 19	36	5, 25, 38
13 (f)	1, 5, 10, 11	37 (h)	1, 5, 24, 25, 38
14 (f)	1, 5, 10, 11	38 (h)	1, 5, 24, 25, 38
15 (f)	1, 5, 10, 11	39 (i)	1, 5, 24, 38
16 (b)	1, 5, 10, 24	40 (i)	1, 5, 24, 38
17	1, 5, 10, 11, 24	41	5, 24, 25, 38
18 (c)	5, 10, 24	42	1, 5, 10, 24, 25, 38
19 (c)	5, 10, 24	43	5, 24, 25
20 (b)	1, 5, 10, 24	44 (j)	1, 5, 10, 11, 24, 25, 38
21 (b)	1, 5, 10, 24	45 (j)	1, 5, 10, 11, 24, 25, 38
22	1, 4, 5, 17, 19, 24	46	1, 5, 11, 25, 33, 38
23 (d)	1, 5, 10	47	1, 5, 10, 11, 24, 25, 30, 33, 38
24 (b)	1, 5, 10, 24	48	1, 5, 11, 24, 33

*Handout*  
**As Complexões de Leibniz nos Elementos de Euclides**



**Figura 1** Árvore da complexão de proposições para construção da proposição 47