O porta-aviões, o torpedo e o círculo de Apolônio

A C Tort [1] & R Lopes

[1]Mestrado Profissional em Ensino de Física
Instituto Física – Universidade Federal do Rio de Janeiro

13 de Maio de 2014

O filme

Figura : *The enemy below (1957)*.

O comandante do submarino

A solução de interceptação está pronta?

Figura : O ator alemão Curt Jürgens (1915–1982) no papel de comandante de submarino em *The enemy below (1957)*.

O imediato

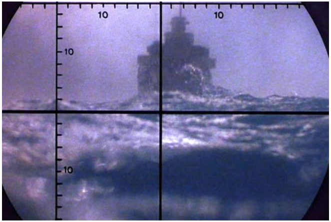


Figura : Solução de interceptação pronta, mein komandant!

Disparar torpedos 1 e 2!

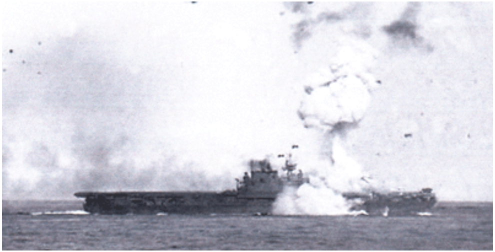


Figura : Disparar torpedo!

A solução de interceptação

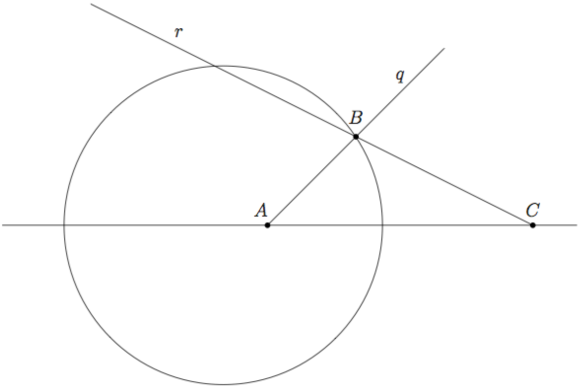


Figura : O porta-aviões em A é interceptado em B sobre a “solução de interceptação”pelo torpedo disparado pelo submarino em C.

O círculo de acordo com Apolônio

Sejam dois pontos A e C colineares e um ponto B não colinear com A e C tal que

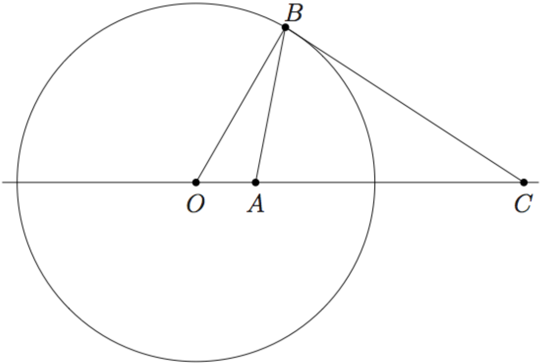
$$\frac{|BC|}{|AB|} = \kappa, \quad \text{com } \kappa > 0, \; \text{mas} \neq 1 \tag{1}$$

O círculo de acordo com Apolônio

Sejam dois pontos A e C colineares e um ponto B não colinear com A e C tal que

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \kappa, \quad \text{com } \kappa > 0, \; \text{mas} \neq 1 \tag{1}$$

O conjunto dos pontos B é o círculo de Apolônio!



Uma propriedade importante

Uma propriedade importante

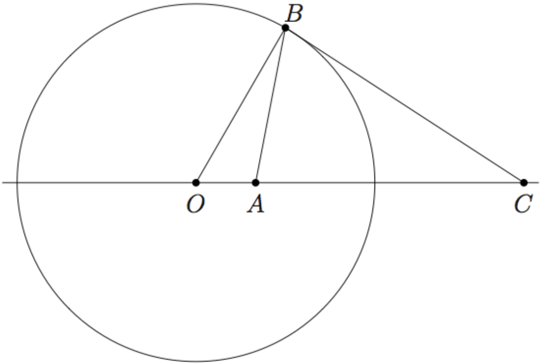
O círculo de Apolônio tem a importante propriedade:

Uma propriedade importante

O círculo de Apolônio tem a importante propriedade:

$$|OA| \cdot |OC| = |OB|^2, \qquad (2)$$

onde O é centro do círculo e a medida $|OB| = R$, é o raio.



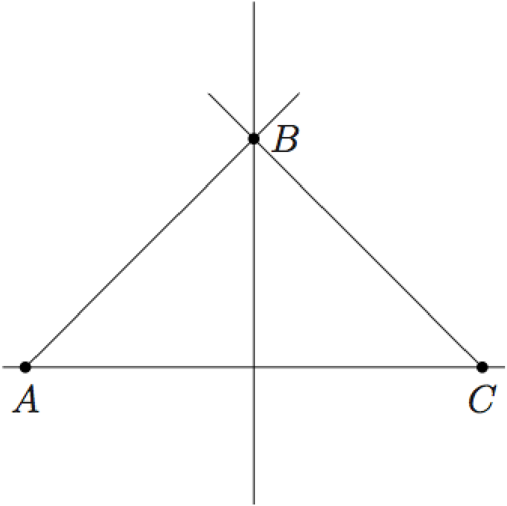
Se $\kappa = 1$...

Se $\kappa = 1$...

Para $\kappa = 1$, o círculo de Apolônio transforma-se na mediana de *AC*

Se $\kappa = 1$...

Para $\kappa = 1$, o círculo de Apolônio transforma-se na mediana de AC



O problema da interceptção

O problema da interceptção

O torpedo só atinge o porta-aviões se ambos estiverem no ponto B, no mesmo instante de tempo t:

O problema da intercepção

O torpedo só atinge o porta-aviões se ambos estiverem no ponto B, no mesmo instante de tempo t:

$$t = \frac{\text{distância}}{\text{velocidade}} = \frac{|AB|}{V_{\text{p.a.}}} = \frac{|BC|}{V_{\text{t}}}, \qquad (3)$$

$V_{\text{p.a.}}$ e V_{t}, velocidades constantes!

O problema da interceptação

O torpedo só atinge o porta-aviões se ambos estiverem no ponto B, no mesmo instante de tempo t:

$$t = \frac{\text{distância}}{\text{velocidade}} = \frac{|AB|}{V_{\text{p.a.}}} = \frac{|BC|}{V_{\text{t}}}, \tag{3}$$

$V_{\text{p.a.}}$ e V_{t}, velocidades constantes!

Definindo $\kappa = V_{\text{t}}/V_{\text{p.a.}}$, segue que

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{V_{\text{t}}}{V_{\text{p.a.}}} = \kappa, \tag{4}$$

O problema da intercepção

O torpedo só atinge o porta-aviões se ambos estiverem no ponto B, no mesmo instante de tempo t:

$$t = \frac{\text{distância}}{\text{velocidade}} = \frac{|AB|}{V_{\text{p.a.}}} = \frac{|BC|}{V_{\text{t}}}, \tag{3}$$

$V_{\text{p.a.}}$ e V_{t}, velocidades constantes!

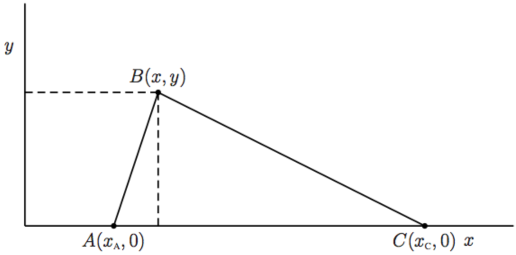
Definindo $\kappa = V_{\text{t}}/V_{\text{p.a.}}$, segue que

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{V_{\text{t}}}{V_{\text{p.a.}}} = \kappa, \tag{4}$$

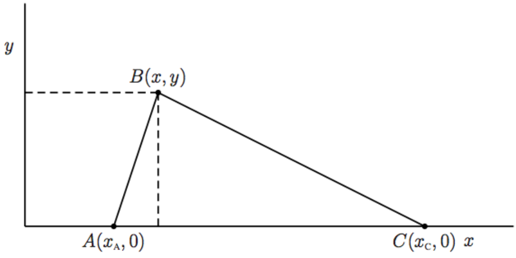
Determina o círculo de Apolônio dos pontos A e C

O círculo de Apolônio em coordenadas cartesianas

O círculo de Apolônio em coordenadas cartesianas



O círculo de Apolônio em coordenadas cartesianas



$$\frac{\sqrt{(x - x_C)^2 + y^2}}{\sqrt{(x - x_A)^2 + y^2}} = \kappa, \tag{5}$$

Um pouco de álgebra permite rescrever a equação anterior na forma

$$\left| x - \frac{\left(\kappa^2 x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{C}}\right)}{\kappa^2 - 1} \right|^2 + y^2 = \left[\frac{\kappa \left(x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{A}}\right)}{|1 - \kappa^2|} \right]^2, \quad \kappa \neq 1, \tag{6}$$

Um pouco de álgebra permite rescrever a equação anterior na forma

$$\left|x - \frac{\left(\kappa^2 x_A - x_C\right)}{\kappa^2 - 1}\right|^2 + y^2 = \left[\frac{\kappa\left(x_C - x_A\right)}{|1 - \kappa^2|}\right]^2, \quad \kappa \neq 1, \qquad (6)$$

que a equação de um circulo de raio R com centro no ponto (x_0, y_0), onde

Um pouco de álgebra permite rescrever a equação anterior na forma

$$\left| x - \frac{\left(\kappa^2 x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{C}}\right)}{\kappa^2 - 1} \right|^2 + y^2 = \left[\frac{\kappa \left(x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{A}}\right)}{|1 - \kappa^2|} \right]^2, \quad \kappa \neq 1, \tag{6}$$

que a equação de um circulo de raio R com centro no ponto (x_0, y_0), onde

$$x_0 = \frac{\left(\kappa^2 x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{C}}\right)}{\kappa^2 - 1}, \quad y_0 = 0, \quad R = \frac{\kappa \left(x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{A}}\right)}{|1 - \kappa^2|}, \quad \kappa \neq 1. \tag{7}$$

Caso $\kappa > 1$, vel. do torpedo $>$ vel. do porta-aviões

Caso $\kappa > 1$, vel. do torpedo $>$ vel. do porta-aviões

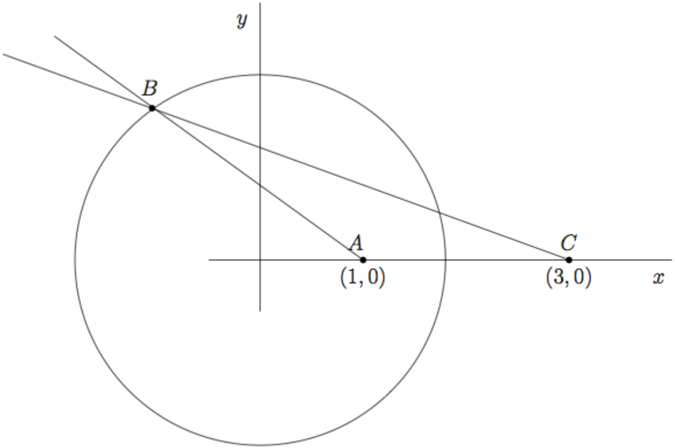


Figura : $\kappa = 2$. Uma possibilidade apenas.

Caso $0 < \kappa < 1$, vel. do torpedo $<$ vel. do porta-aviões

Caso $0 < \kappa < 1$, vel. do torpedo < vel. do porta-aviões

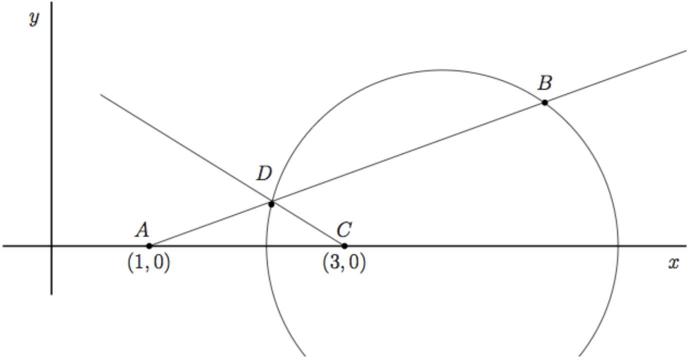
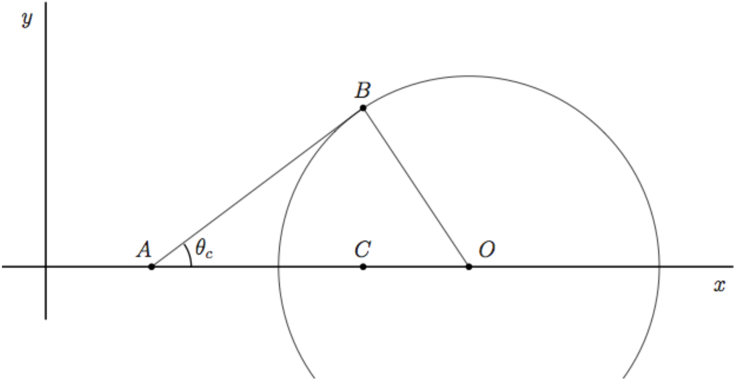


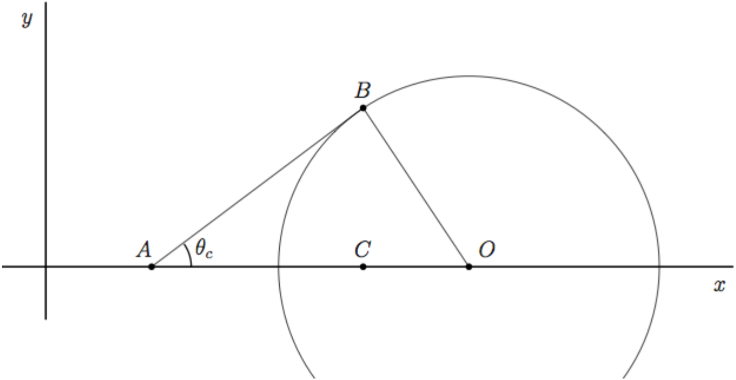
Figura : $\kappa = 1/2$. Duas possibilidades!

O ângulo crítico no caso $0 < \kappa < 1$

O ângulo crítico no caso $0 < \kappa < 1$



O ângulo crítico no caso $0 < \kappa < 1$



$$\theta_c = \arcsin(\kappa) \tag{8}$$

Caso $\kappa = 1$

A equação (5) tem duas soluções. Ambas significam que os pontos A e C são equidistantes de um ponto arbitrário da mediana AC.

Caso $\kappa = 1$

A equação (5) tem duas soluções. Ambas significam que os pontos A e C são equidistantes de um ponto arbitrário da mediana AC. Primeira solução:

$$x = \frac{x_A + x_C}{2}, \tag{9}$$

que implica em

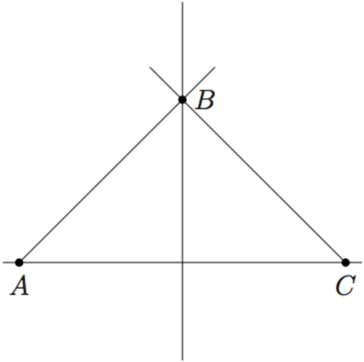
$$|x - x_A| = |x - x_C| = \frac{|x_c - x_A|}{2}. \tag{10}$$

Haverá interceptação sobre um ponto da mediana.

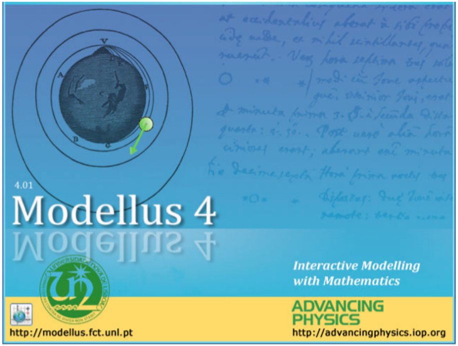
$\kappa = 1$, segunda solução

$$x_A = x_C, \quad \forall x, y \tag{11}$$

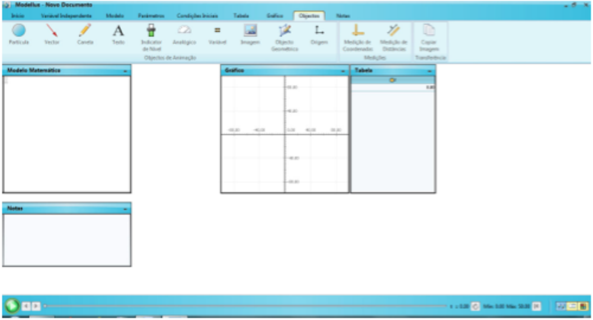
Na segunda solução, os pontos A e C concidem sobre a mediana. O porta-aviões e o torpedo seguem trajetórias paralelas coincidentes.



A simulação com o *Modellus* I



A simulação com o *Modellus* II



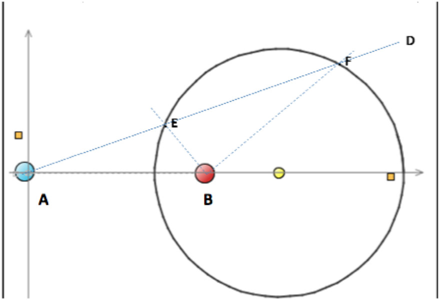
A simulação com o *Modellus* III

Usar equações paramétricas para o círculo:

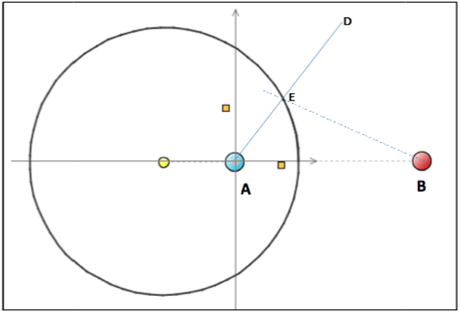
$$x = x_0 + R\cos t \quad y = y_0 + R\sin t. \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
&vax\\
&vay\\
&xa = vax \times t\\
&ya = vay \times t\\
&vbx\\
&vby\\
&d\\
&xb = vbx \times t + d\\
&yb = vby \times t\\
&vb = \mathrm{sqrt}\left(vbx^2 + vby^2 \right)\\
&va = \mathrm{sqrt}\left(vax^2 + vay^2 \right)\\
&k = \frac{vb}{va}\\
&xcentro = \frac{(-d)}{\left(k^2 - 1\right)}\\
&ycentro = 0\\
&raio = \frac{(k \times d)}{\mathrm{abs}\left(1 - k^2\right)}\\
&xcirculo = xcentro + raio \times \cos(t)\\
&ycirculo = ycentro + raio \times \sin(t)\\
&vaa = \frac{vay}{vax}\\
&xmais = \frac{\left((2 \times xcentro) + \mathrm{sqrt}\left((2 \times xcentro)^2 - 4 \times \left(vaa^2 + 1\right) \times \left(xcentro^2 - raio^2\right)\right)\right)}{\left(2 \times \left(vaa^2 + 1\right)\right)}\\
&xmenos = \frac{\left((2 \times xcentro) - \mathrm{sqrt}\left((2 \times xcentro)^2 - 4 \times \left(vaa^2 + 1\right) \times \left(xcentro^2 - raio^2\right)\right)\right)}{\left(2 \times \left(vaa^2 + 1\right)\right)}\\
&ymais = vaa \times xmais\\
&ymenos = vaa \times xmenos
\end{aligned}$$

A simulação da interceptação I



A simulação da interceptação II



A simulação com o *Modellus*: Material instrucional

Problemas e curvas de perseguição no ensino médio
(texto para o professor)

Reynaldo L. de Oliveira Jr

Material instrucional associado à dissertação de mestrado de Reynaldo L. de Oliveira Jr, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Rio de Janeiro
2011

Observações finais

Observações finais

- Os problemas de perseguição são muitos e variam muito em complexidade.

Observações finais

- Os problemas de perseguição são muitos e variam muito em complexidade.
- Podem ser simulados com o Modellus e discutidos no EM.

Observações finais

- Os problemas de perseguição são muitos e variam muito em complexidade.
- Podem ser simulados com o Modellus e discutidos no EM.
- Ainda há muitos para simular!

Bibliografia

- R. Lopes de Oliveira Júnior: *Problemas e curvas de perseguição no Ensino Médio: usando o Modellus como ferramenta alternativa*. Dissertação de mestrado, MPEF-IF-UFRJ (2011).
- P. J. Nahin: *Chases and Escapes*. Princeton University Press, Princeton (2007).
- A. C. Tort: *Algumas observações sobre o círculo de Apolônio e o seu emprego no método das imagens*. Revista Brasileira de Ensino de Física **33** n. 1 1704 (2011).
- M. B. Partenskii e P. C. Jordan: *The Circle of Apollonius and its Applications in Introductory Physics*. The Physics Teacher 46 104-108 (2008).