Mecânica Quântica:
uma abordagem (quase) conceitual

Carlos Eduardo Aguiar

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Instituto de Física - UFRJ

IF-UFRJ, fevereiro de 2014

Sumário

- Dificuldades na aprendizagem de mecânica quântica
- Fenômenos quânticos em sistemas simples
- Uma abordagem conceitual dos princípios da mecânica quântica
- Aplicações a sistemas simples
- Comentários finais

Ensino e aprendizagem de mecânica quântica

- Dificuldades conceituais
  - Superposição quântica
  - Probabilidade subjetiva x objetiva
  - Complementaridade
  - O problema da medida
  - Realismo vs. localidade

- Dificuldades matemáticas
  - Vetores
  - Números complexos
  - Espaços vetoriais complexos
  - Operadores, autovalores, autovetores
  - Dimensão infinita, operadores diferenciais, funções especiais

Ensino e aprendizagem de mecânica quântica

- Entre os alunos as dificuldades matemáticas ganham proeminência pela necessidade de adquirir um domínio operacional da teoria, essencial a aplicações.

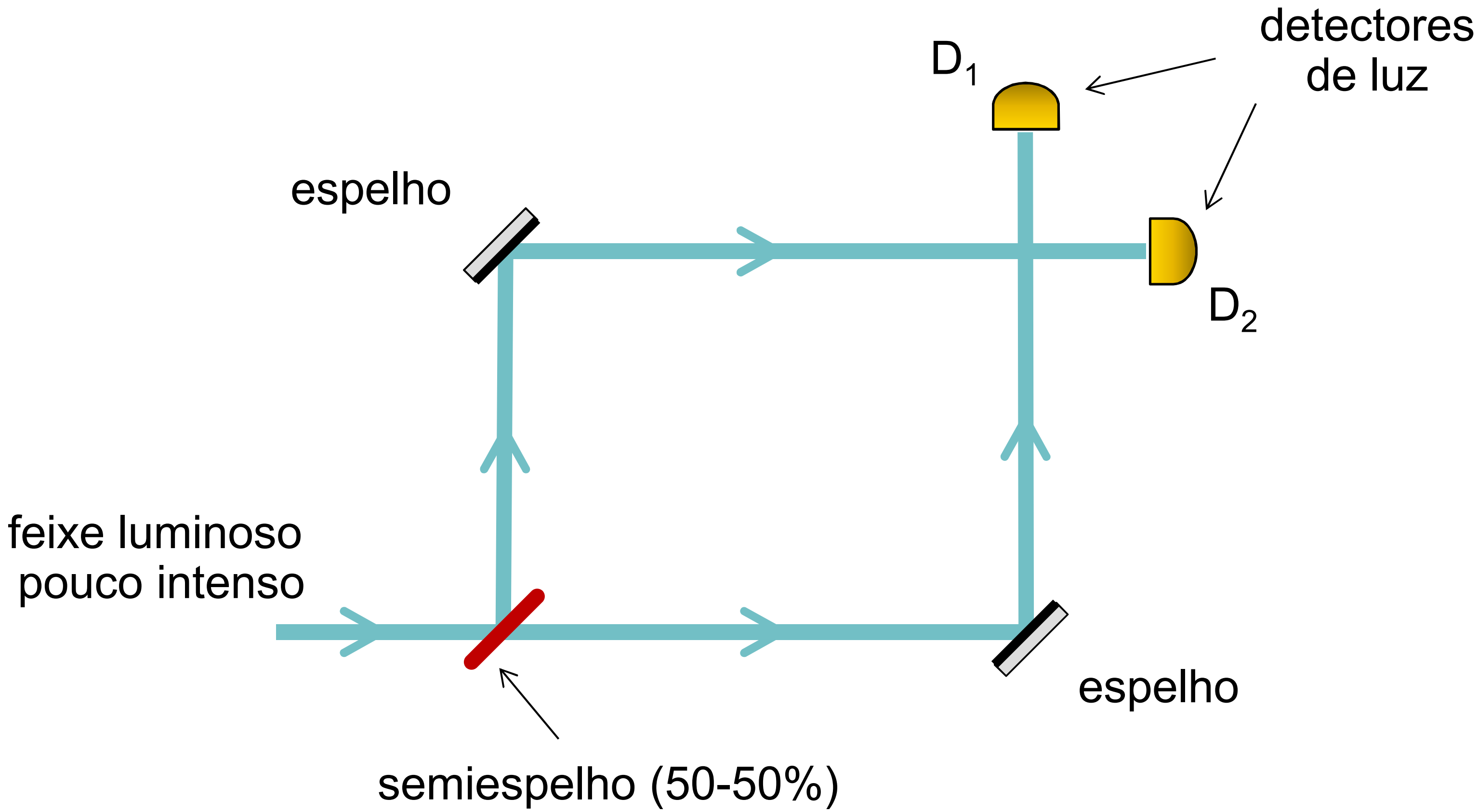
- Como veremos, é possível expor a teoria quântica – sem descaracterizá-la – reduzindo as ferramentas matemáticas a vetores e um pouco de números complexos. Com isso, torna-se viável dar mais atenção aos aspectos conceituais.

- Tal abordagem pode ser de interesse a alunos para os quais o aspecto operacional não é o mais importante (licenciandos em física, por exemplo).

Fenômenos Quânticos

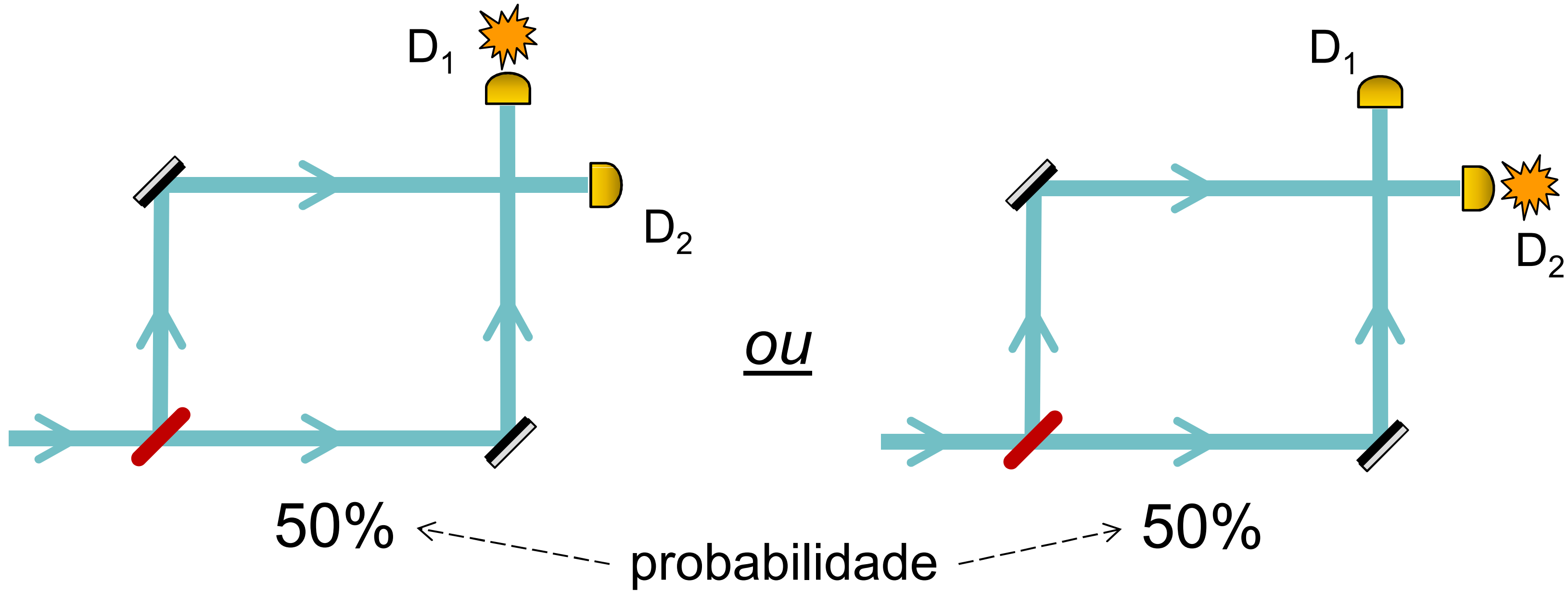
Charles Addams, New Yorker, 1940

Um experimento com a luz



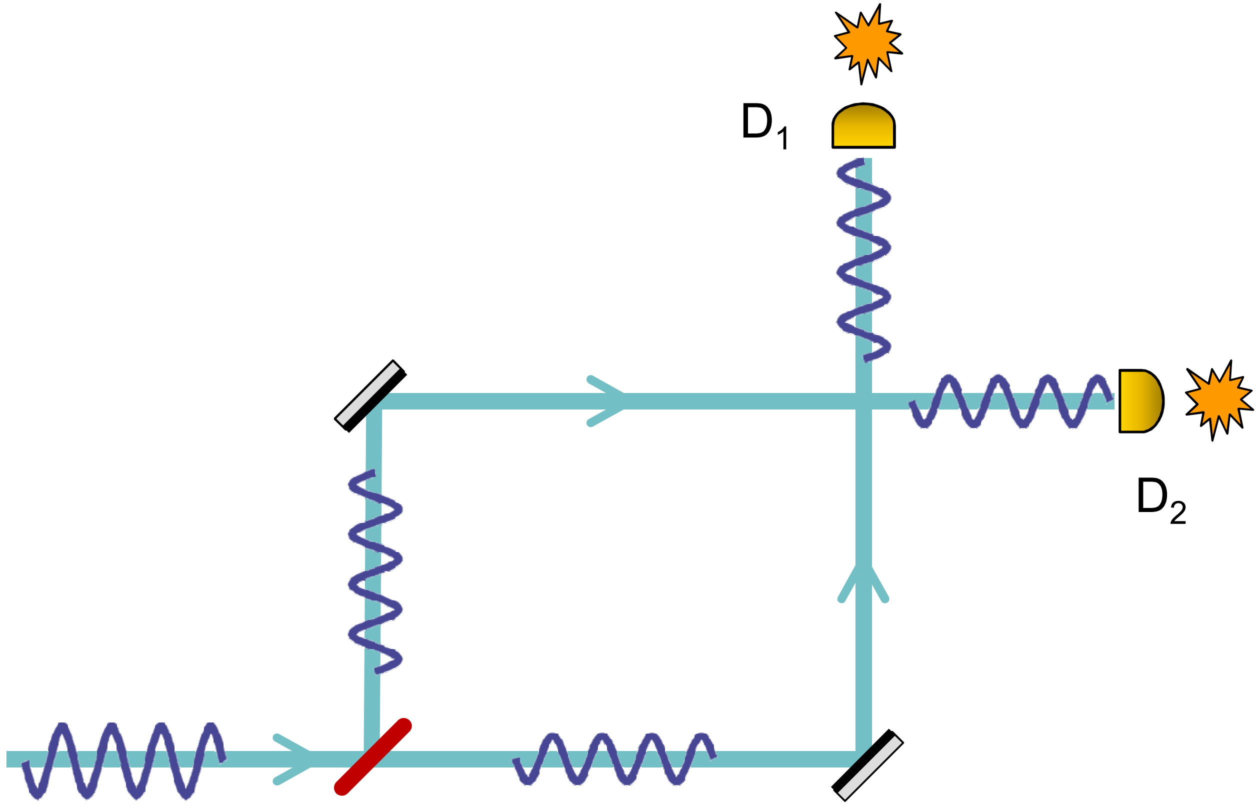
Resultado do experimento

- Os detectores nunca disparam ao mesmo tempo: apenas um, *ou* D_1 *ou* D_2, é ativado a cada vez.



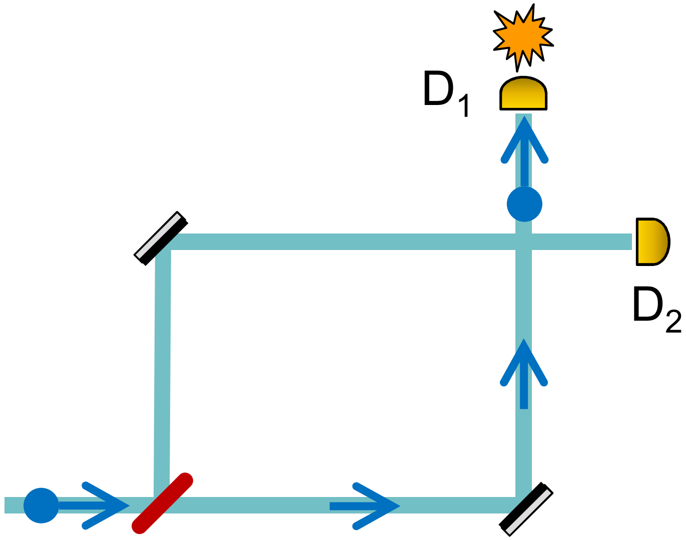
P. Grangier, G. Roger, A. Aspect, *Experimental evidence for a photon anticorrelation effect on a beam splitter: A new light on single-photon interferences*, Europhysics Letters 1, 173 (1986)

Se a luz fosse uma onda

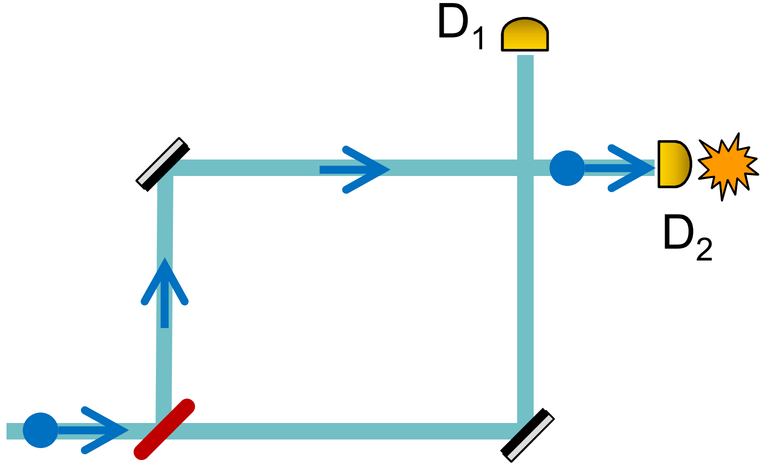


... os detectores deveriam disparar ao mesmo tempo.

Se a luz é composta por partículas



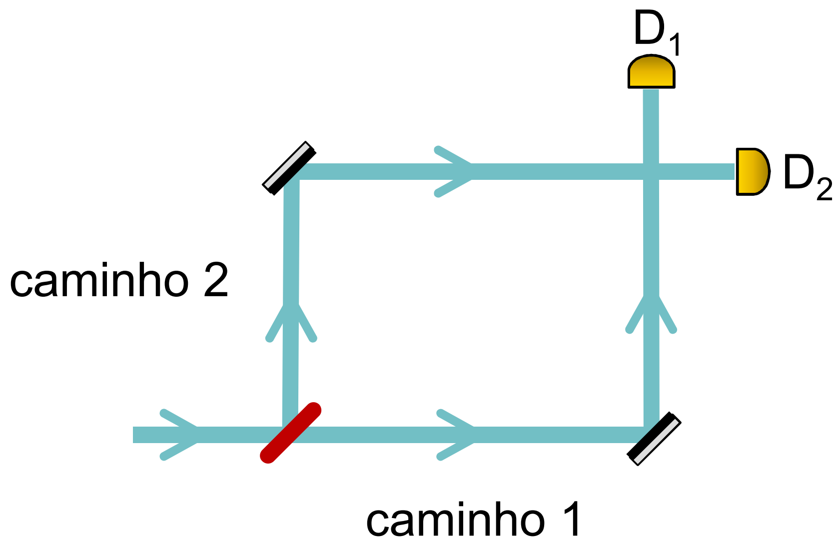
ou



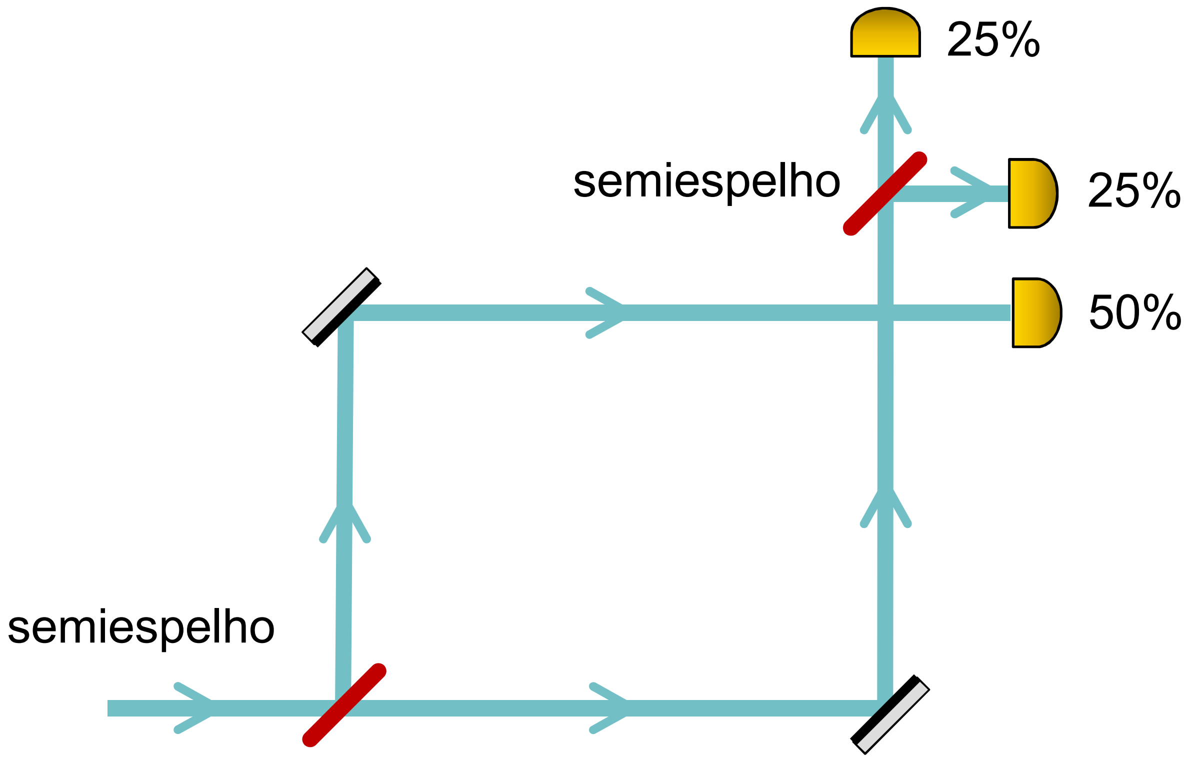
... ou D_1 dispara, ou D_2 dispara.

Conclusão

- A luz é composta por partículas: os fótons.
- O detector que dispara aponta "qual caminho" o fóton tomou.



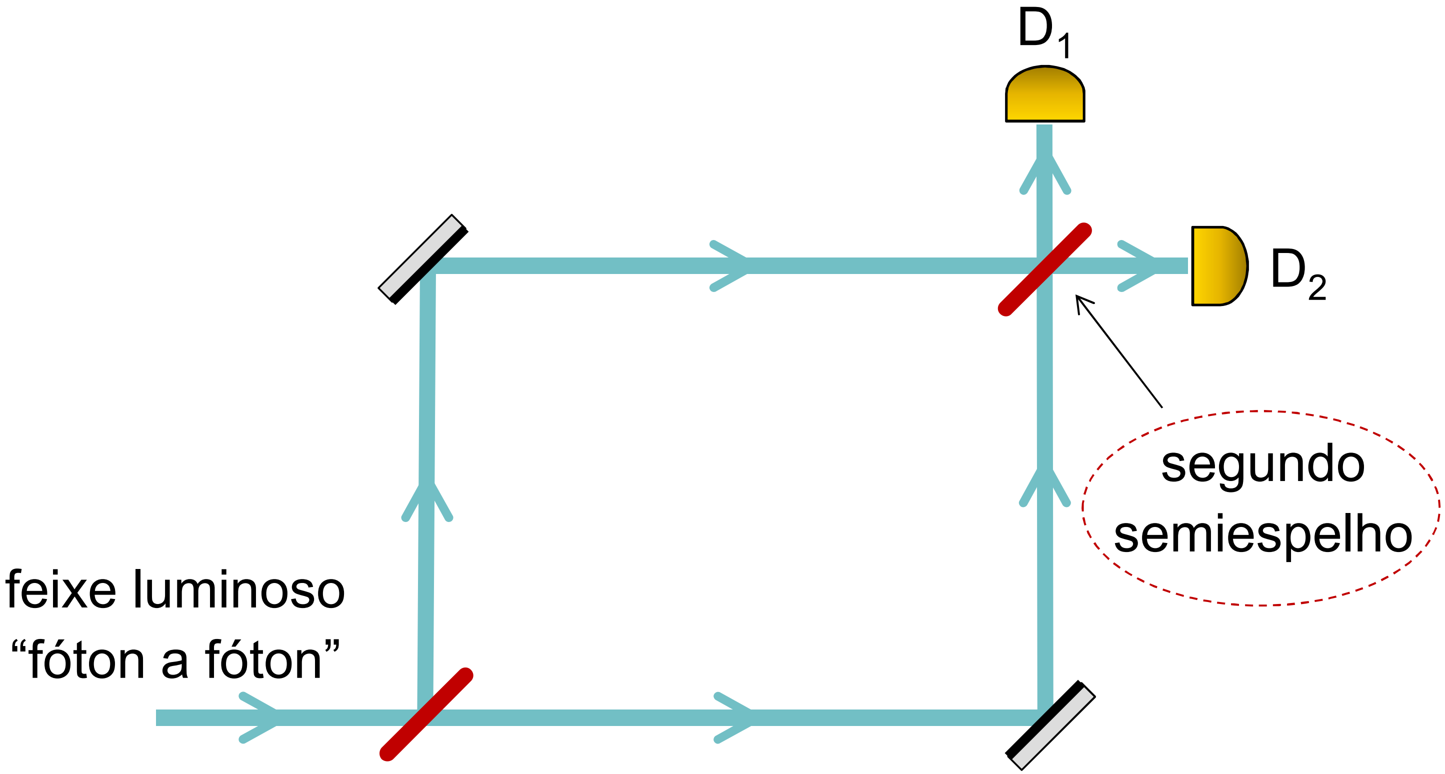
Mais um semiespelho



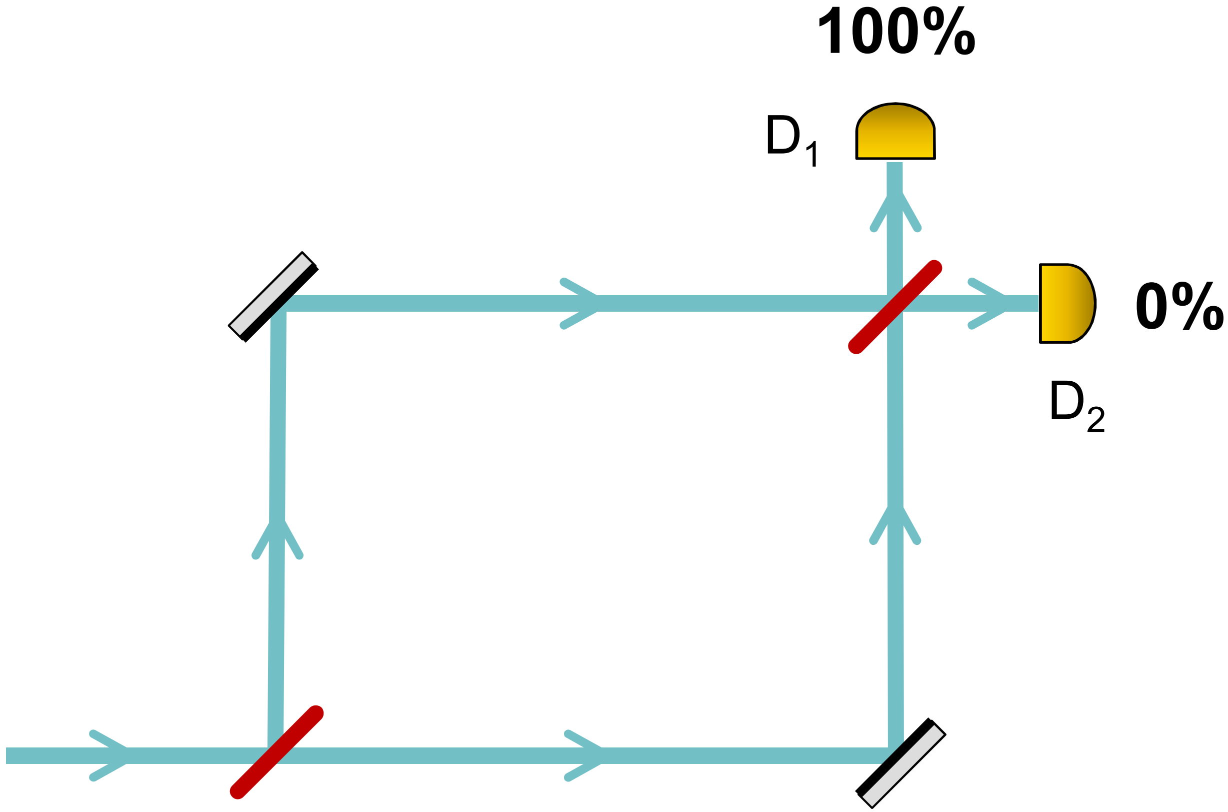
Novamente: não há coincidências no disparo dos detectores; experimento fácil de entender com os fótons.

Entretanto, se o segundo semiespelho for colocado na intersecção dos feixes, algo novo e surpreendente acontece.

O interferômetro de Mach-Zehnder



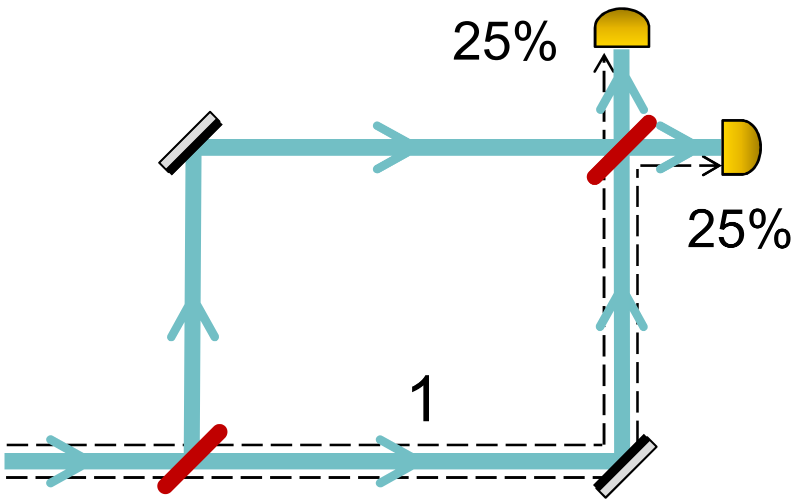
Resultado do experimento:



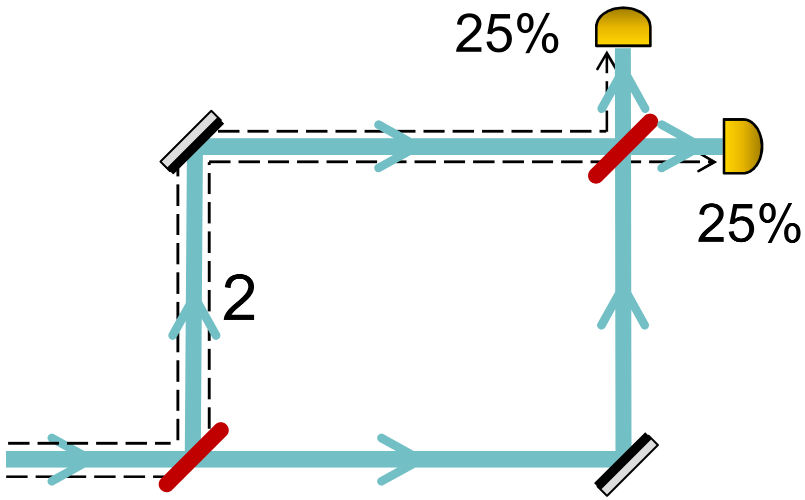
P. Grangier, G. Roger, A. Aspect, *Experimental evidence for a photon anticorrelation effect on a beam splitter: A new light on single-photon interferences*, Europhysics Letters 1, 173 (1986)

Difícil de entender se os fótons seguem caminhos definidos

caminho 1



caminho 2



Se o fóton segue um caminho definido, ele deveria ser capaz de chegar a qualquer um dos dois detectores.

Por onde vai o fóton?

- Experimentalmente, a resposta "por um dos dois caminhos" é falsa.

- Se os dois caminhos forem fechados, os fótons não chegam aos detectores. Logo, "nenhum dos dois caminhos" também não é aceitável.

- Parece restar apenas a opção "pelos dois caminhos": o fóton segue *os dois caminhos ao mesmo tempo*.

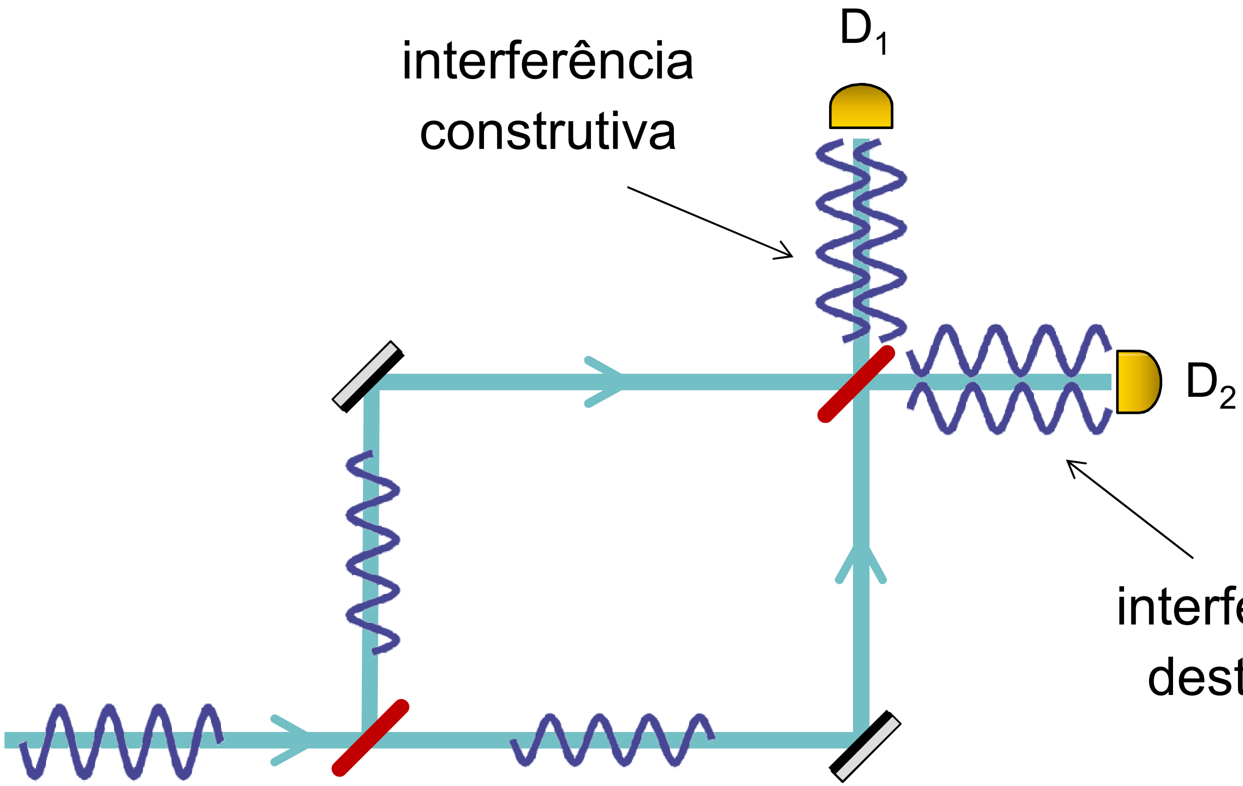
Uma resposta melhor

- Não faz sentido falar sobre o caminho do fóton no interferômetro, pois a montagem experimental não permite distinguir os caminhos 1 e 2.

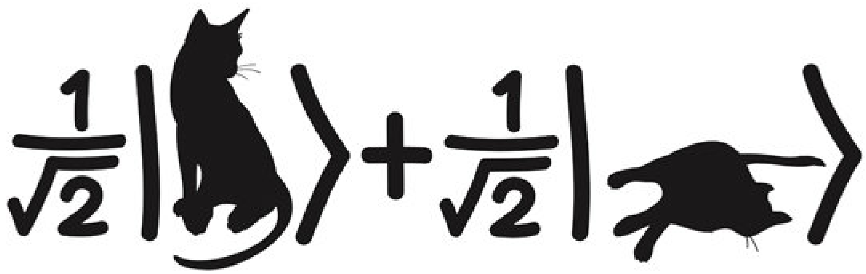
- A pergunta “qual o caminho do fóton?” só faz sentido frente a um aparato capaz de produzir uma resposta.

> Quando alguém deseja ser claro sobre o que quer dizer com as palavras “posição de um objeto”, por exemplo do elétron (em um sistema de referência), ele deve especificar experimentos determinados com os quais pretende medir tal posição; <u>do contrário essas palavras não terão significado</u>.
>
> -W. Heisenberg,
> *The physical content of quantum kinematics and mechanics*
> (*o artigo de 1927 sobre o princípio da incerteza*)

Fácil de entender num modelo ondulatório



Princípios da Mecânica Quântica



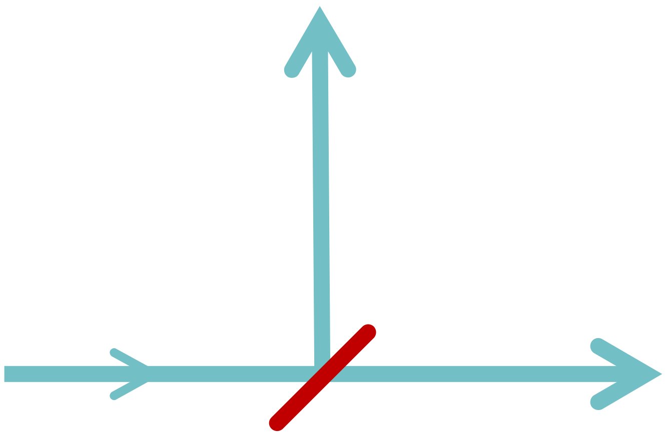
Princípios da Mecânica Quântica

- Vetores de estado e o princípio da superposição
- A regra de Born
- Complementaridade e o princípio da incerteza
- Colapso do vetor de estado
- Evolução unitária

Vetores de Estado
e o
Princípio da Superposição

Sistemas de dois estados

cara *coroa*

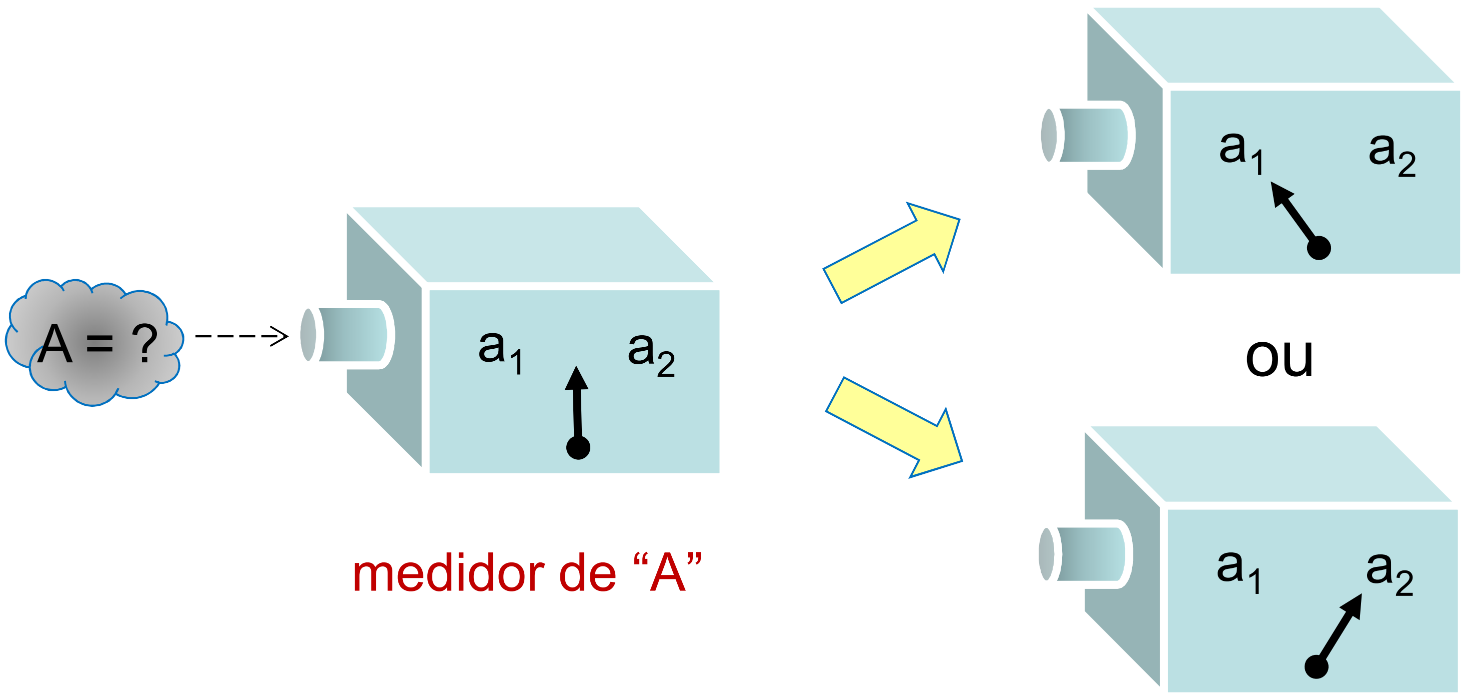


fóton refletido

fóton transmitido

Sistemas de dois estados

grandeza física observável: $A = \begin{cases} a_1 \\ a_2 \end{cases}$

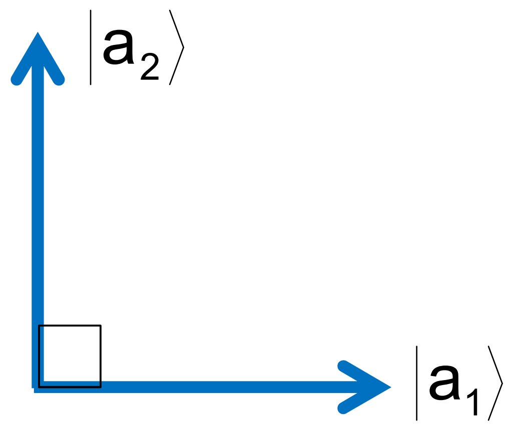


Sistemas clássicos

- Sistema clássico de dois estados, $A = a_1$ e $A = a_2$.
- Representação dos estados: pontos no "eixo A"

Sistemas quânticos: vetores de estado

- Sistema quântico de dois estados, $A = a_1$ e $A = a_2$.
- Representação dos estados: vetores ortogonais em um espaço de duas dimensões



A notação de Dirac

vetor $\leftrightarrow$ $|\cdots\rangle$

$\uparrow$ identificação

exemplos:

$$|a_1\rangle \quad |a_2\rangle$$

$$|0\rangle \quad |1\rangle$$

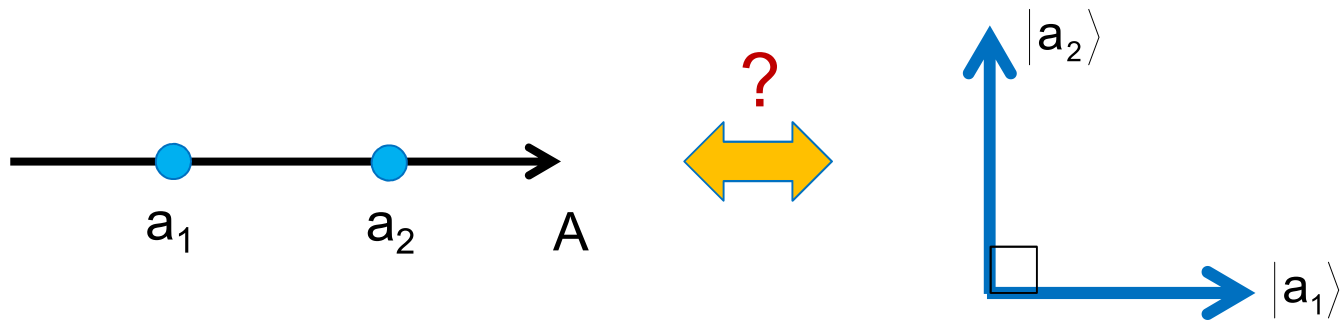
$$|\uparrow\rangle \quad |\downarrow\rangle$$

$$|\leftrightarrow\rangle \quad |\updownarrow\rangle$$

$$|\text{esquerda}\rangle \quad |\text{direita}\rangle$$

O que muda?

Passar de dois pontos em uma reta para dois vetores perpendiculares não parece ser mais do mudar o sistema de “etiquetagem” dos estados.

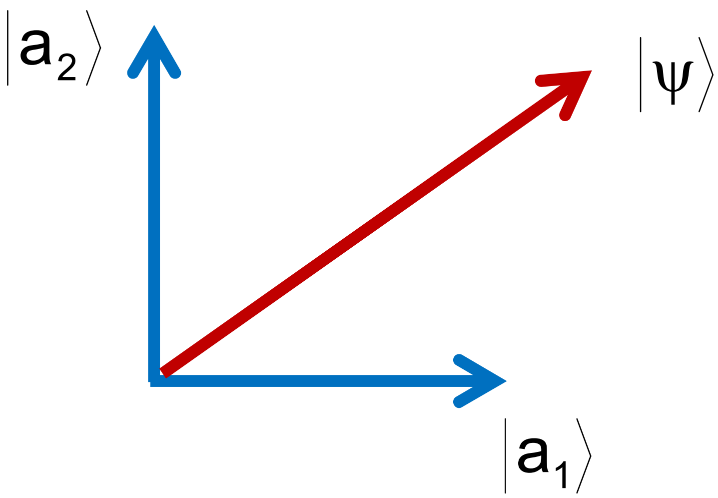


O que muda é o seguinte:

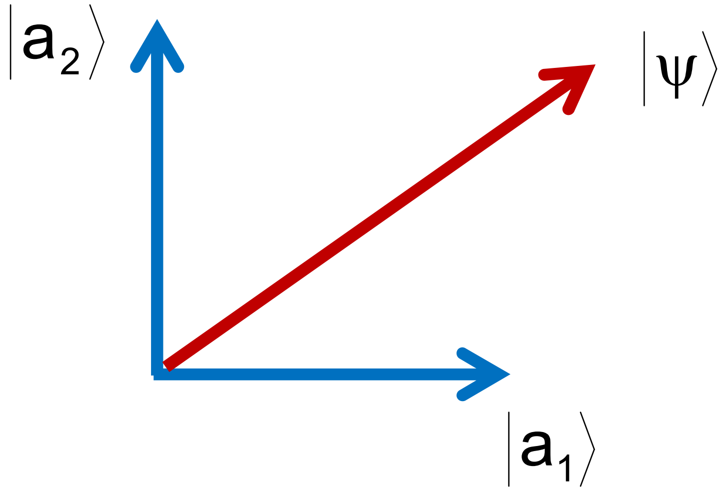
O Princípio da Superposição

Qualquer combinação linear dos vetores $|a_1\rangle$ e $|a_2\rangle$ representa um estado físico do sistema.

$$|\psi\rangle = c_1|a_1\rangle + c_2|a_2\rangle$$



Significado de $|\psi\rangle$



- $A = a_1$ <u>e</u> $A = a_2$?
- esquerda <u>e</u> direita?
- horizontal <u>e</u> vertical?
- sim <u>e</u> não?
- 0 <u>e</u> 1?

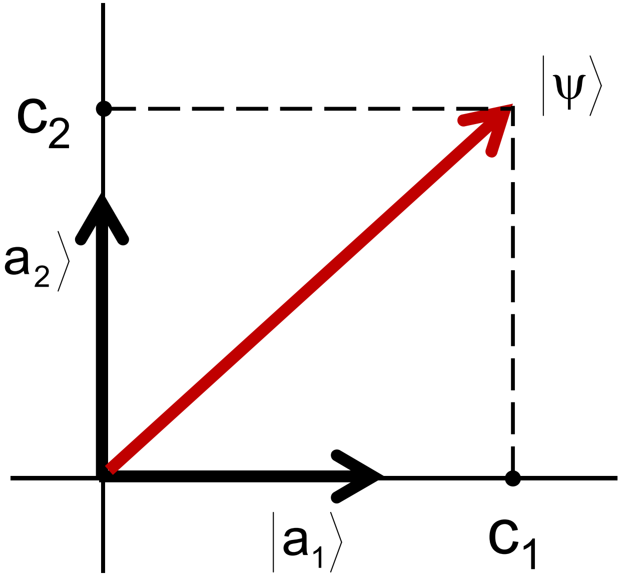
Alguns detalhes ‘técnicos’

- As constantes c_1 e c_2 podem ser números complexos.
- O espaço de estados é um *espaço vetorial complexo*.
- Os vetores $|a_1\rangle$ e $|a_2\rangle$ são uma base do espaço de estados (bidimensional, no caso).
- Precisamos de um *produto escalar* para tornar precisa a noção de ortogonalidade (e norma).

A Regra de Born

A Regra de Born

$$|\psi\rangle = c_1|a_1\rangle + c_2|a_2\rangle$$



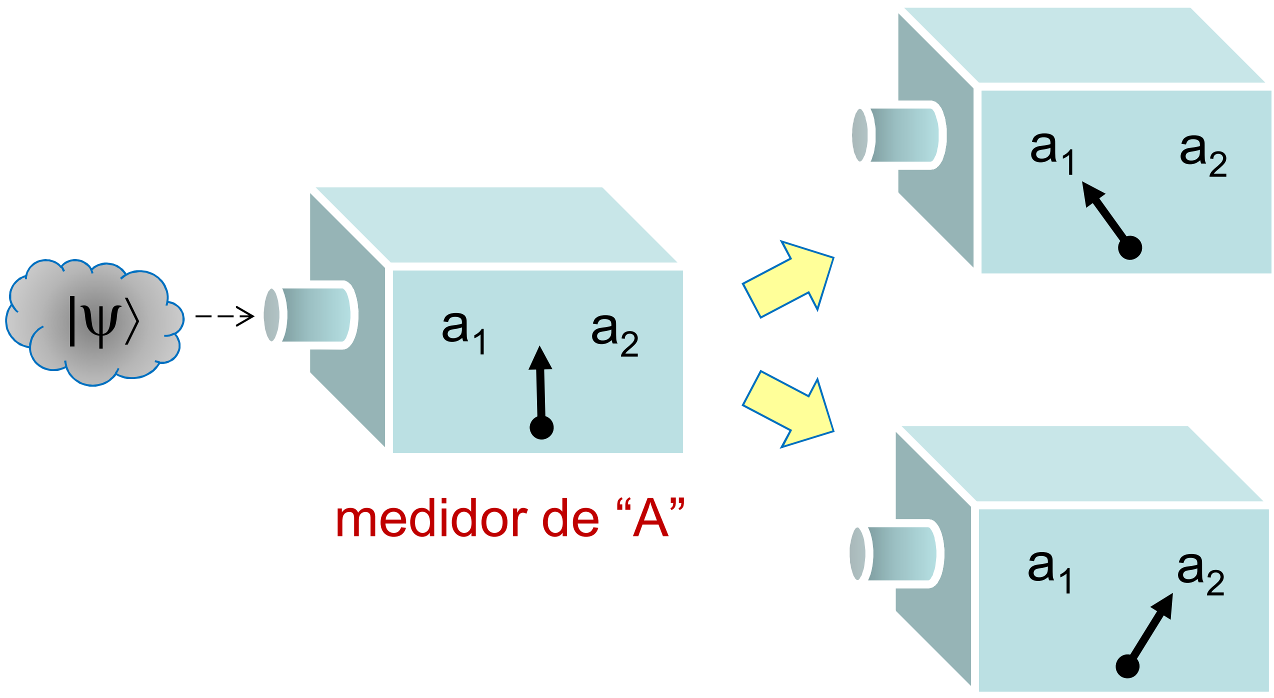
A probabilidade de uma medida da grandeza física *A* resultar em *A* = a_n é

$$P(a_n) = \frac{|c_n|^2}{|c_1|^2 + |c_2|^2}$$

(n = 1, 2)

A Regra de Born

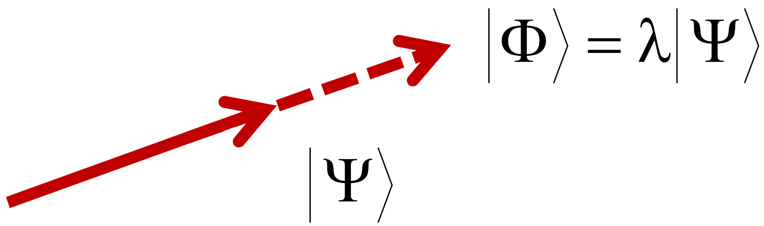
$$|\psi\rangle = c_1|a_1\rangle + c_2|a_2\rangle$$



$$P(a_1) = \frac{|c_1|^2}{|c_1|^2 + |c_2|^2}$$

$$P(a_2) = \frac{|c_2|^2}{|c_1|^2 + |c_2|^2}$$

Normalização do vetor de estado

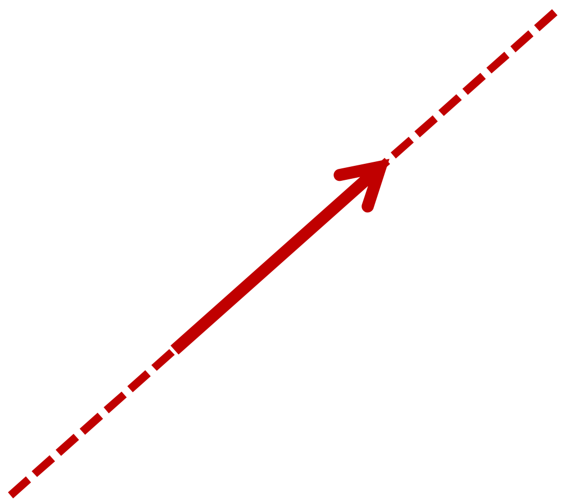


$$|\Psi\rangle = c_1|a_1\rangle + c_2|a_2\rangle \quad \Rightarrow \quad |\Phi\rangle = \lambda c_1|a_1\rangle + \lambda c_2|a_2\rangle$$

$$\Rightarrow \quad P_\Phi(a_n) = \frac{|\lambda c_n|^2}{|\lambda c_1|^2 + |\lambda c_2|^2} = \frac{|c_n|^2}{|c_1|^2 + |c_2|^2} = P_\Psi(a_n)$$

$|\Phi\rangle$ e $|\Psi\rangle$ têm normas diferentes mas representam o mesmo estado físico!

Normalização do vetor de estado



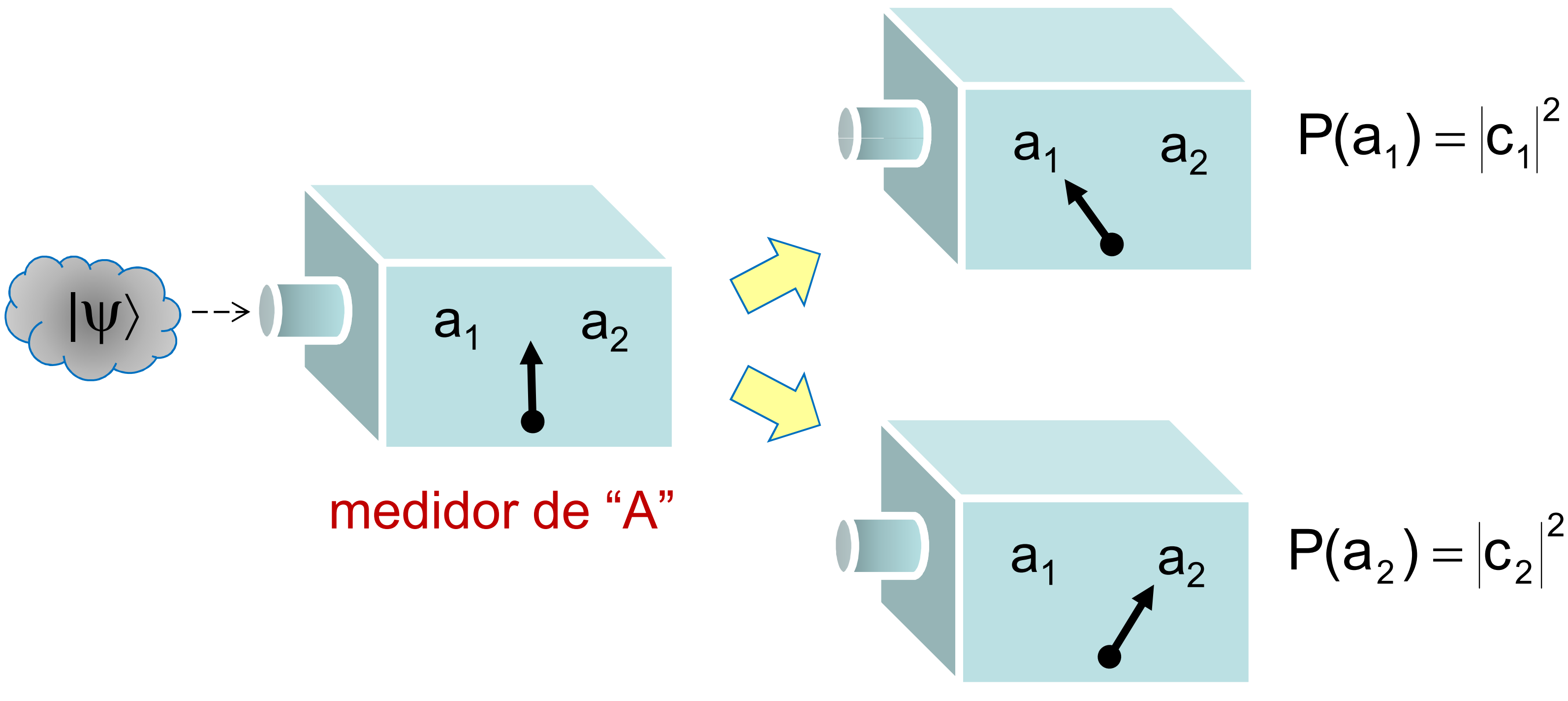
Todos os vetores ao longo de uma dada direção representam o mesmo estado físico.

Podemos trabalhar apenas com vetores "normalizados":

$$|\Psi\rangle = c_1|a_1\rangle + c_2|a_2\rangle, \quad |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$$

Vetores normalizados: a Regra de Born

$$|\psi\rangle = c_1|a_1\rangle + c_2|a_2\rangle \quad \text{(normalizado)} \quad \Rightarrow \quad P(a_n) = |c_n|^2$$



Amplitude de probabilidade

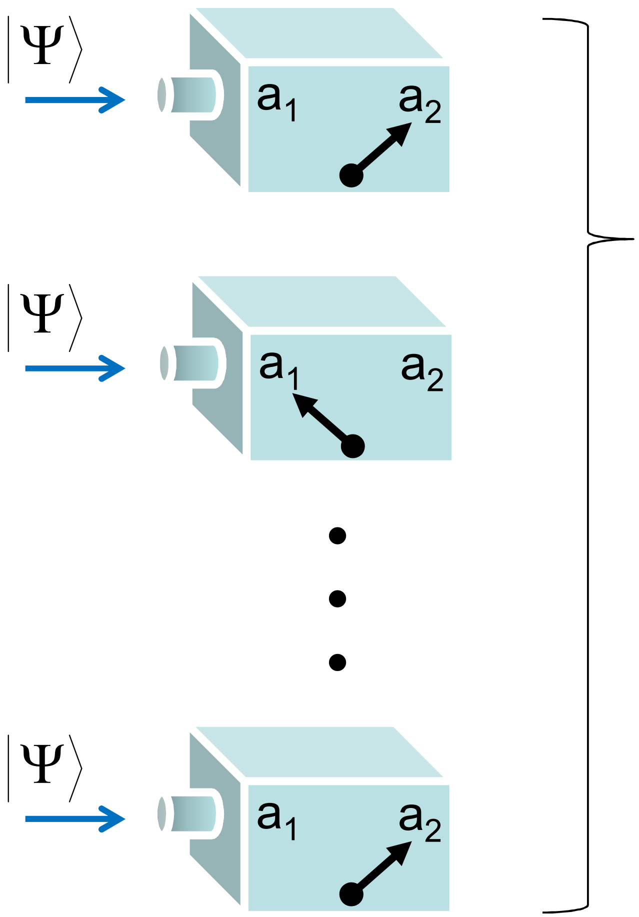
$c_n \Leftrightarrow$ *amplitude de probabilidade*

probabilidade = |*amplitude de probabilidade*|^2

"função de onda": $\Psi(a_n) = c_n$

$$P(a_n) = \left|\Psi(a_n)\right|^2$$

Valor médio



N medidas de A ($N \rightarrow \infty$)

$$N_1 \leftrightarrow a_1 \; , \; N_2 \leftrightarrow a_2$$

valor médio de *A* no estado $|\Psi\rangle$

$$\langle A \rangle = \frac{N_1 a_1 + N_2 a_2}{N}$$

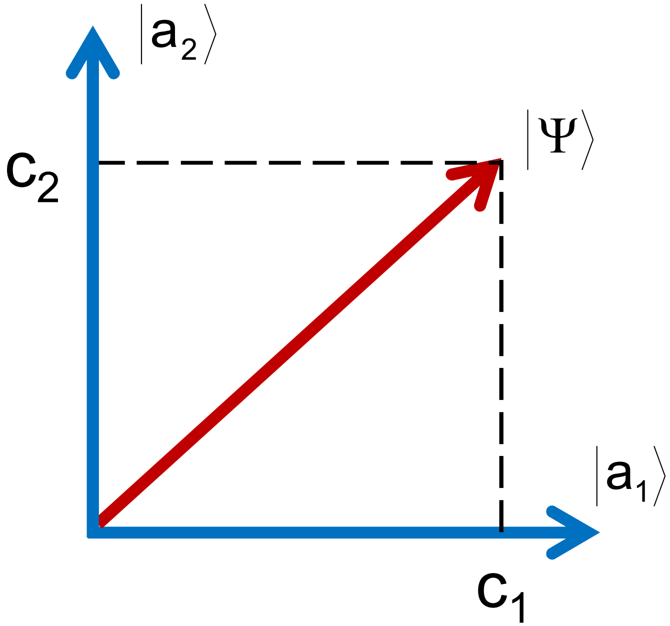
Valor médio

$$\text{probabilidades:} \begin{cases} P(a_1) = \dfrac{N_1}{N} \\[2ex] P(a_2) = \dfrac{N_2}{N} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \langle A \rangle = \frac{N_1 a_1 + N_2 a_2}{N} = P(a_1)\,a_1 + P(a_1)\,a_2$$

$$|\Psi\rangle = c_1 |a_1\rangle + c_2 |a_2\rangle \quad \Rightarrow \quad \boxed{\langle A \rangle = |c_1|^2 a_1 + |c_2|^2 a_2}$$

Incerteza



$$|\Psi\rangle = c_1|a_1\rangle + c_2|a_2\rangle$$

$$c_1,\ c_2 \neq 0$$

⇩

impossível prever o resultado de uma medida

$$\text{Se} \begin{cases} |\Psi\rangle = |a_1\rangle \ \leftrightarrow \ c_1 = 1, c_2 = 0 \\ \qquad \textit{ou} \\ |\Psi\rangle = |a_2\rangle \ \leftrightarrow \ c_1 = 0, c_2 = 1 \end{cases}$$

⇨

possível prever o resultado (probabilidade = 100%):

valor de *A* “bem definido”

Incerteza

$$|\Psi\rangle = c_1|a_1\rangle + c_2|a_2\rangle$$

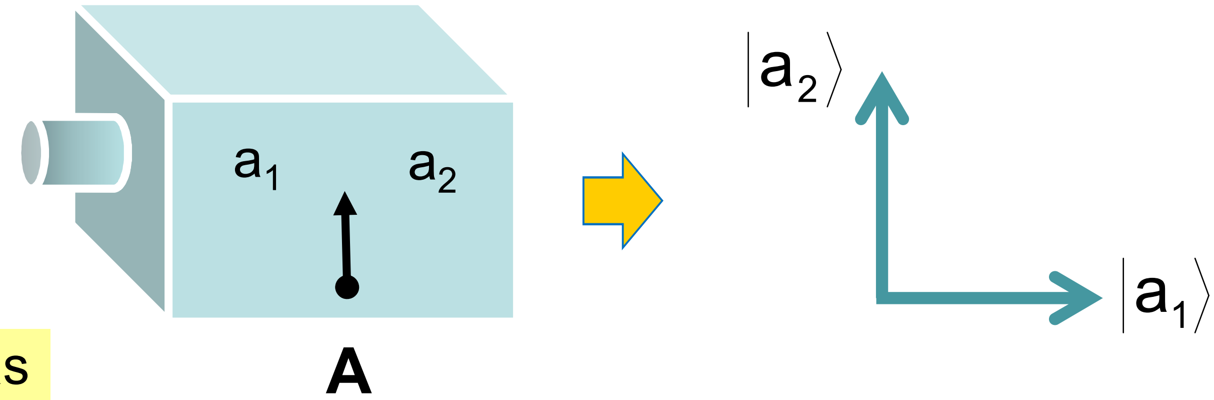
ΔA = incerteza de *A* no estado $|\Psi\rangle$

$$(\Delta A)^2 = \left\langle \left(A - \langle A\rangle\right)^2 \right\rangle = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2$$

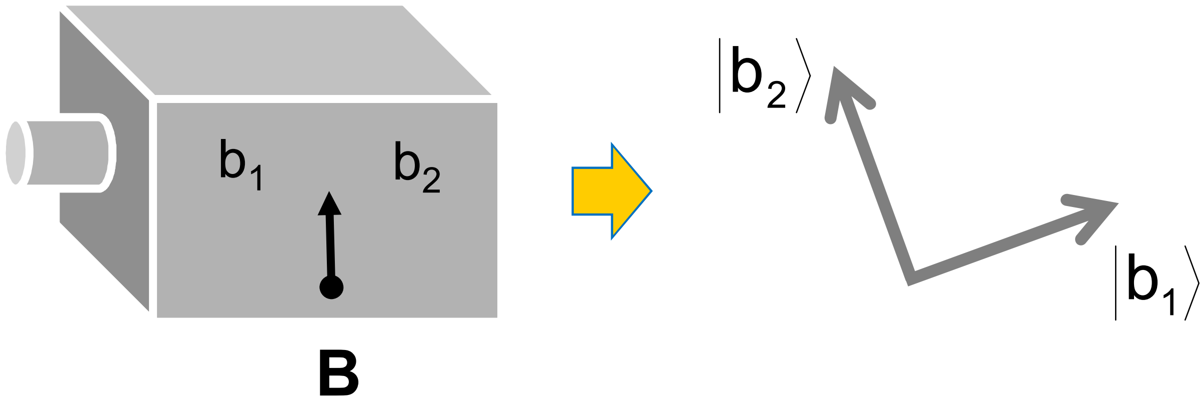
$$\Delta A = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} |\Psi\rangle = |a_1\rangle \\ \quad ou \\ |\Psi\rangle = |a_2\rangle \end{cases}$$

Complementaridade
e o
Princípio da Incerteza

Complementaridade

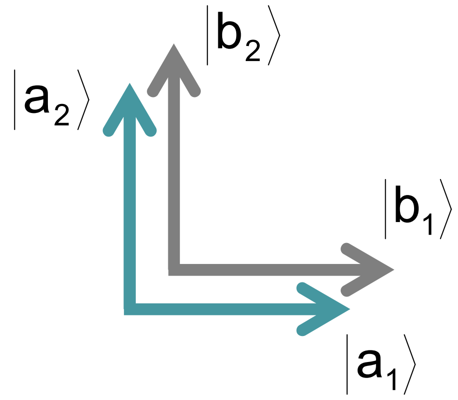


duas grandezas físicas: A e B

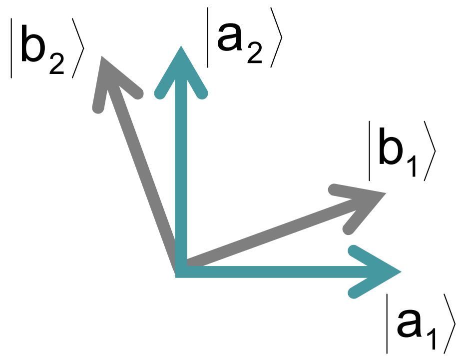


Grandezas compatíveis e incompatíveis

A e B *compatíveis*



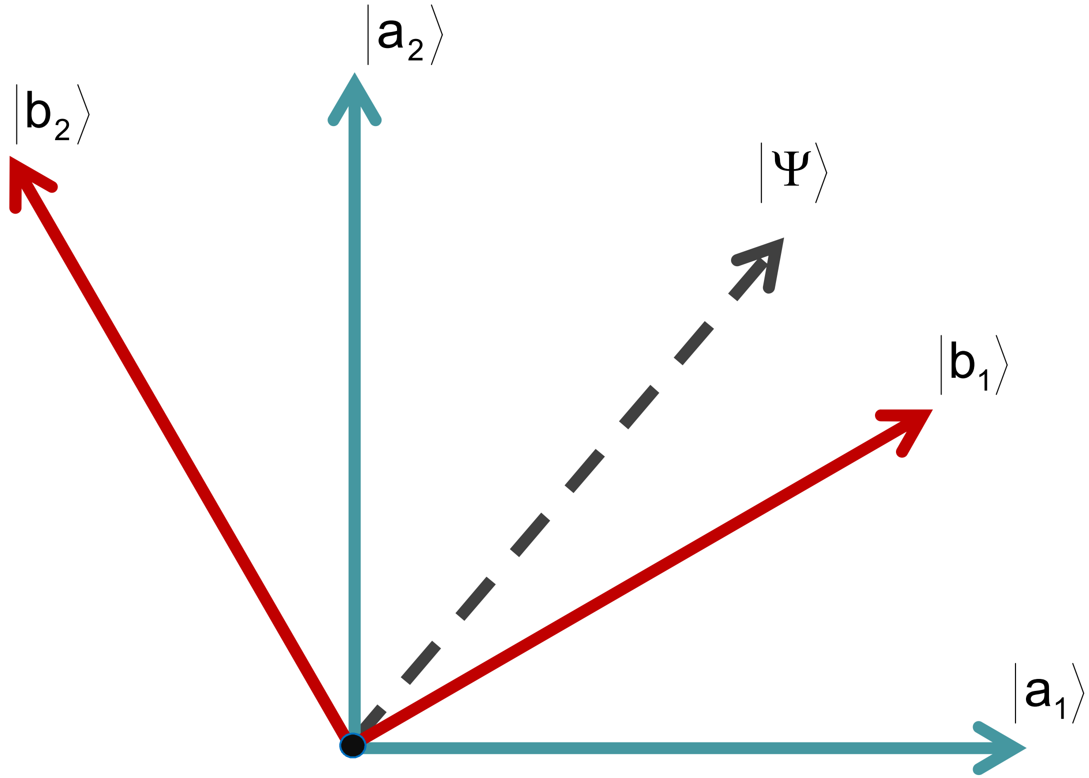
A e B *incompatíveis*



A e B *complementares*: incompatibilidade "máxima"

O Princípio da Incerteza

A e B incompatíveis $\Rightarrow$
nenhum estado $|\Psi\rangle$ com $\Delta A = 0$ e $\Delta B = 0$

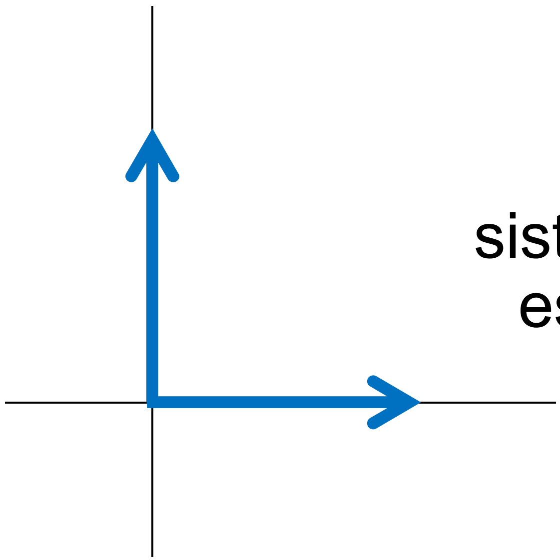


Resumo da “cinemática” quântica

estado físico

vetor no espaço
de estados

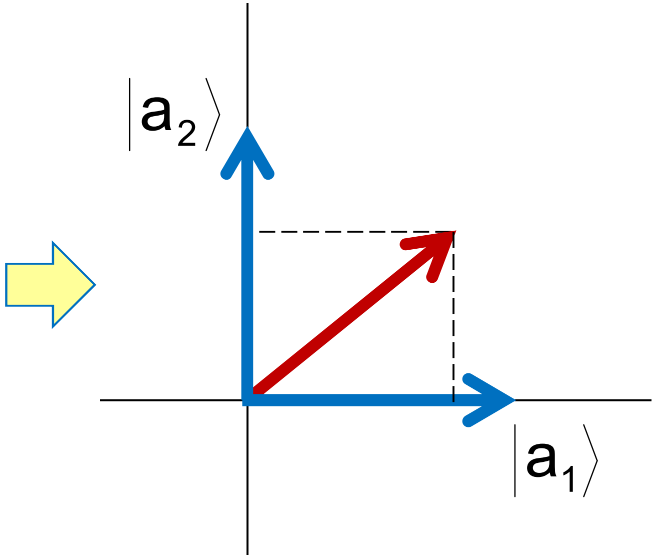
grandeza física



sistema de “eixos” no
espaço de estados

Resumo da "cinemática" quântica

probabilidade de uma medida da grandeza *A* resultar em $A = a_1$ ou $A = a_2$

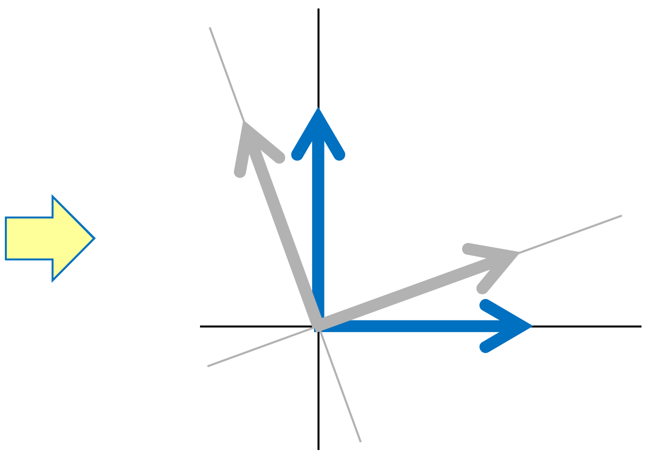


projeção do vetor de estado no eixo $|a_n\rangle$

$\Downarrow$

probabilidade da medida resultar em $A = a_n$

grandezas físicas incompatíveis (complementares)



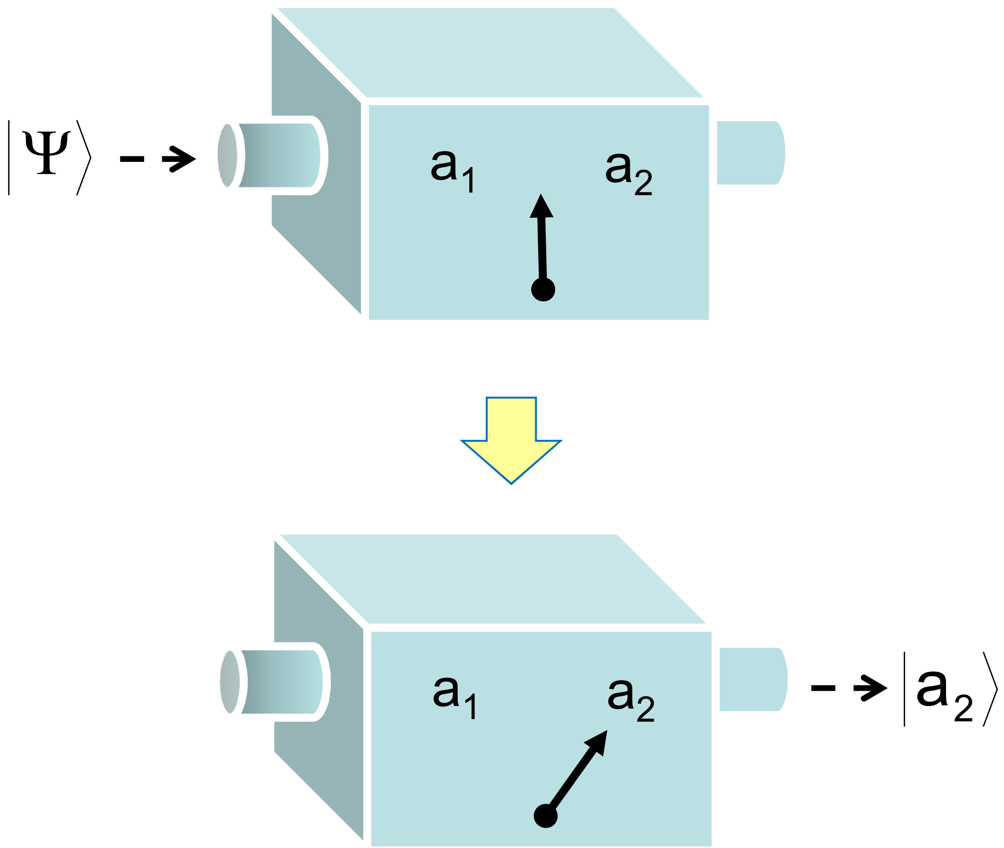
diferentes sistemas de eixos no espaço de estados

Como o vetor de estado muda com o tempo?

- “Colapso” durante uma medida
- Evolução unitária (equação de Schroedinger)

Colapso do Vetor de Estado

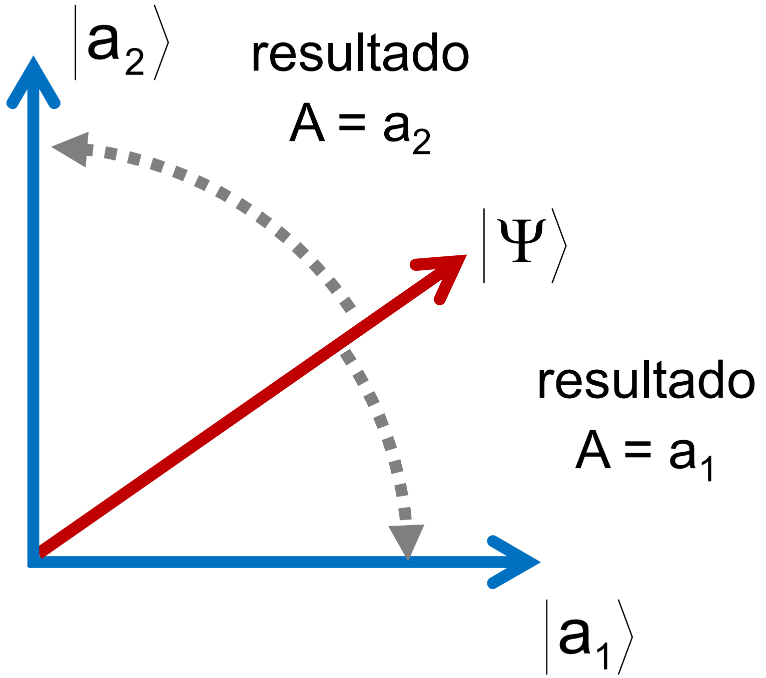
Colapso do vetor de estado



antes da medida

depois da medida

Colapso do vetor de estado



medida de A resulta em $a_n \Rightarrow$ logo após a medida o vetor de estado do sistema é $|a_n\rangle$

Evolução Unitária

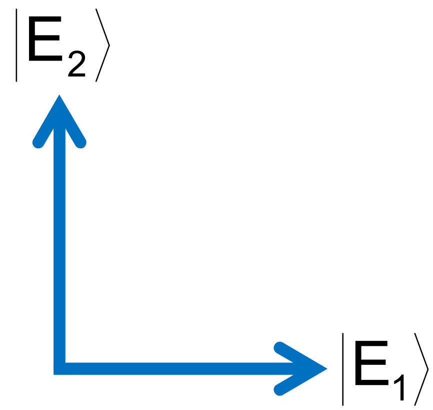
A equação de Schroedinger

- Evolução temporal do vetor de estado:

$$|\Psi(0)\rangle \;\rightarrow\; |\Psi(t)\rangle$$

- Dinâmica quântica: determinada pela energia do sistema (o conceito de força é pouco relevante).

A (solução da) equação de Schroedinger



Sistema de dois estados

Dois níveis de energia: E_1, E_2

$$|\Psi(t=0)\rangle = c_1|E_1\rangle + c_2|E_2\rangle$$

$$\boxed{|\Psi(t)\rangle = c_1 e^{-iE_1 t/\hbar}|E_1\rangle + c_2 e^{-iE_2 t/\hbar}|E_2\rangle}$$

A (solução da) equação de Schroedinger

- $\hbar$ = constante de Planck ($\div\ 2\pi$) $\approx 1\times10^{-34}$ Js

- Números complexos são inevitáveis. Mesmo que as componentes do vetor de estado sejam reais em t = 0, para t $\neq$ 0 elas serão complexas:

$$c_n(t) = c_n e^{-iE_n t/\hbar}$$

- A evolução $|\Psi(0)\rangle \ \rightarrow \ |\Psi(t)\rangle$ ditada pela equação de Schroedinger é <u>contínua</u> (sem 'saltos quânticos') e <u>determinista</u> (sem elementos probabilísticos).

Propriedades da equação de Schroedinger

- Determinismo
- Continuidade
- Linearidade
- Conservação da norma
- Conservação de ângulos

“evolução unitária”

Eq. de Schroedinger x Processos de medida

- Equação de Schroedinger:
  - contínua
  - determinista
  - válida enquanto não se faz uma medida

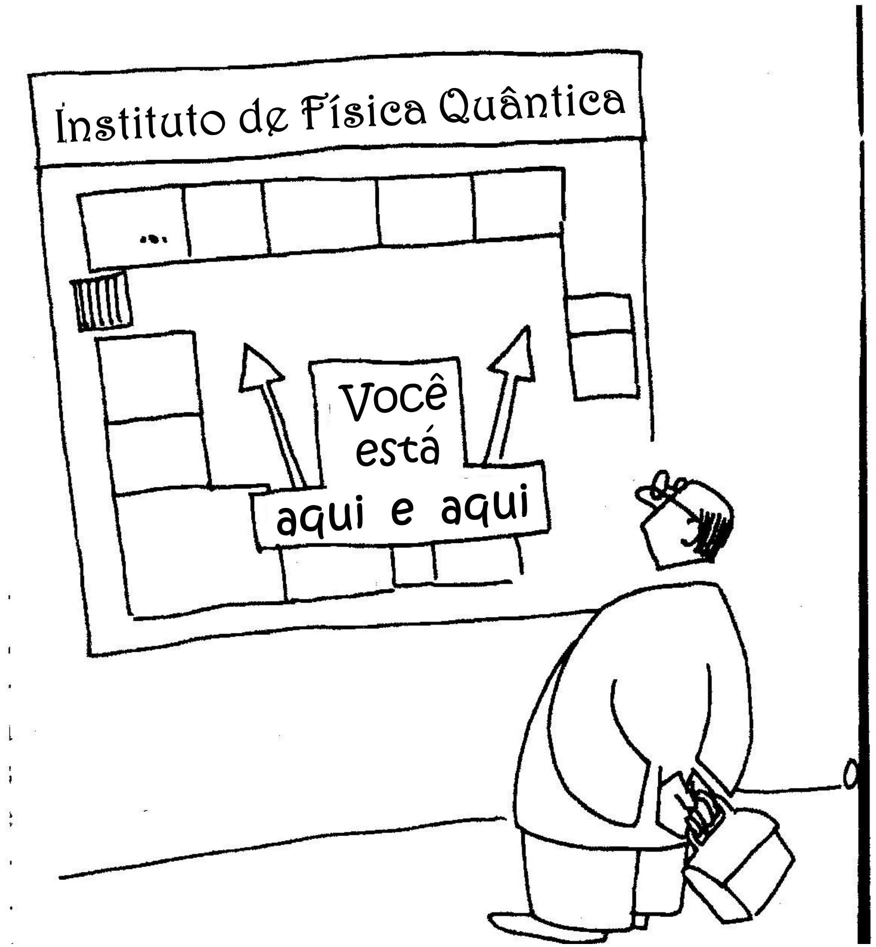
- Colapso do vetor de estado:
  - descontínuo
  - probabilístico
  - ocorre durante a medida

Eq. de Schroedinger x Processos de medida

Duas dinâmicas?

- Equação de Schroedinger:
  - interação do sistema quântico com outros sistemas quânticos.
  - $A = a_1$ <u>e</u> $A = a_2$
- Colapso do vetor de estado:
  - interação do sistema quântico com um **aparato clássico**, o aparelho de medida (o “observador”).
  - $A = a_1$ <u>ou</u> $A = a_2$

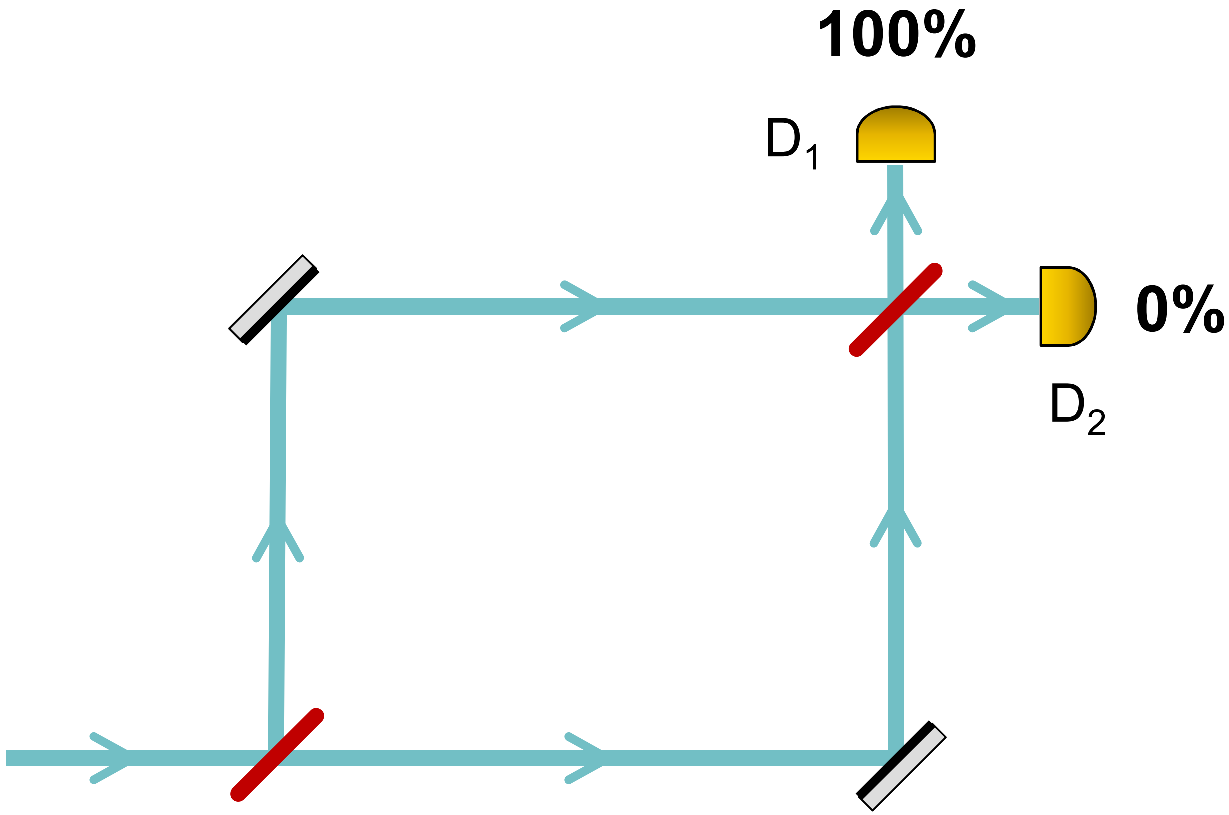
Aplicações a sistemas simples



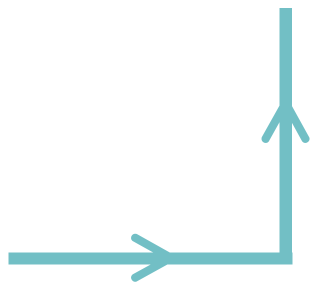
Aplicações a sistemas simples

- Interferômetro de Mach-Zehnder
  - Interferência de uma partícula
  - Medida sem interação
  - O problema de Deutsch
- Química quântica
  - Molécula de H_2^+
  - Benzeno, amônia
- Polarização do fóton
- Oscilação de neutrinos
- Spin ½
- Sistemas de 2x2 níveis: estados emaranhados
  - Criptografia quântica
  - O experimento de Hardy (realismo x localidade)

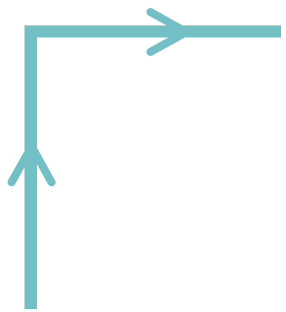
O interferômetro de Mach-Zehnder



Descrição quântica do interferômetro

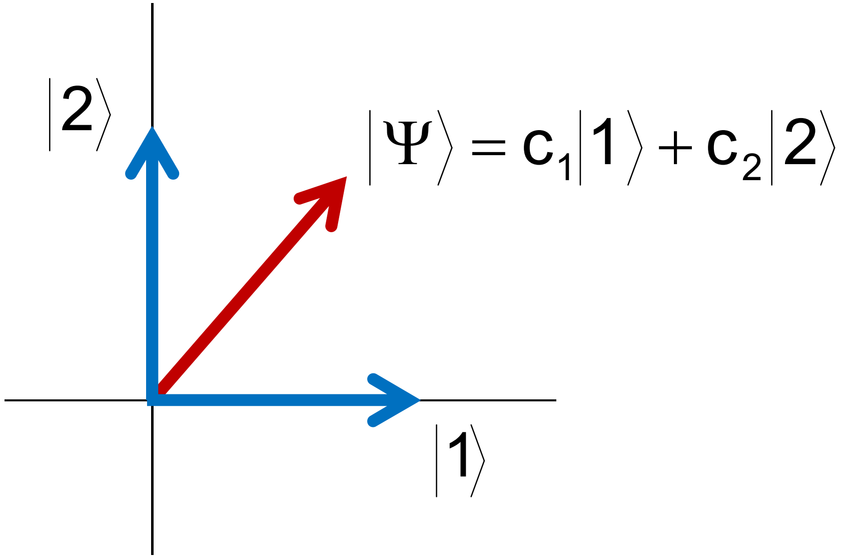


$\Leftrightarrow$ $|1\rangle$ (caminho 1)



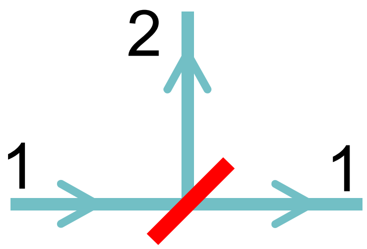
$\Leftrightarrow$ $|2\rangle$ (caminho 2)

Espaço de estados



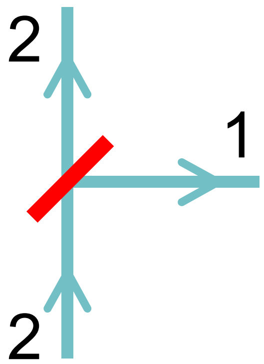
probabilidades: $\begin{cases} P_1 = |c_1|^2 \\ P_2 = |c_2|^2 \end{cases}$

Semiespelho



$$|1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle$$

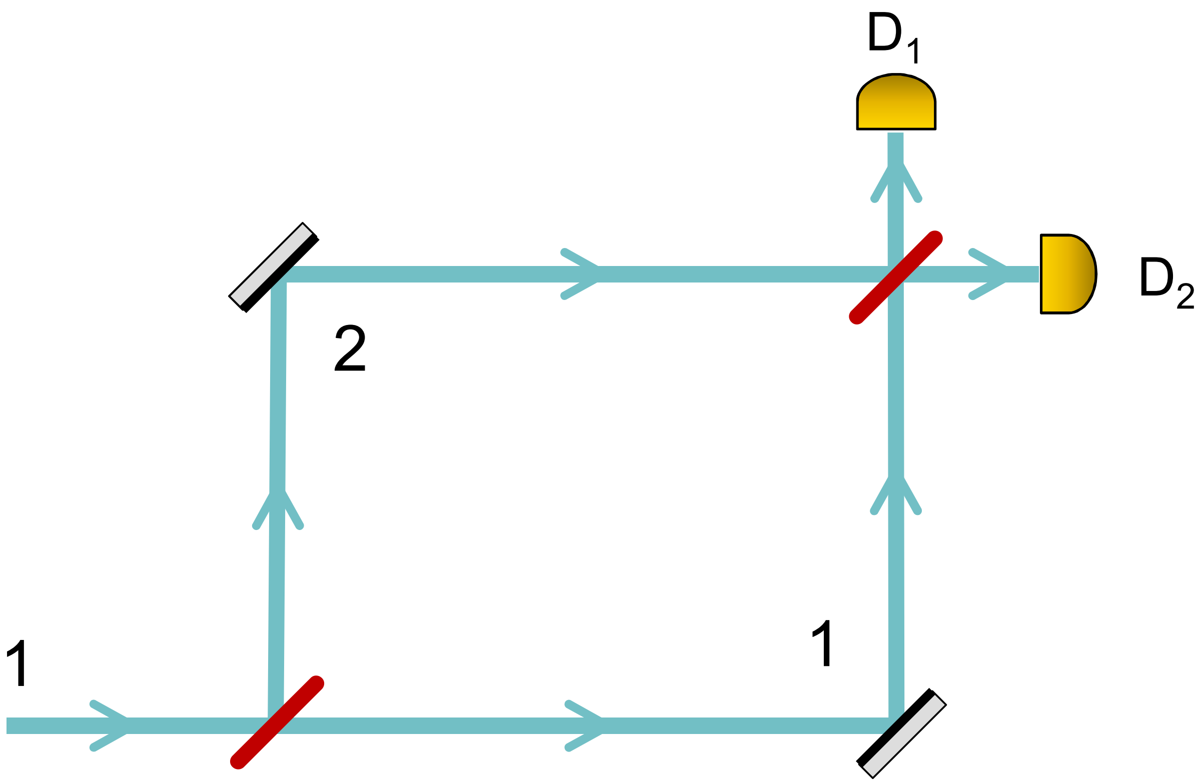
evolução unitária



$$|2\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle$$

- probabilidade de reflexão = probabilidade de transmissão = ½
- o sinal de menos garante a ortogonalidade dos estados finais

Interferômetro



Interferômetro

Estado inicial: $|1\rangle$

Primeiro semiespelho: $|1\rangle \rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \dfrac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle$

Interferômetro

Segundo semiespelho:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle\right)$$

ou seja, o estado final é

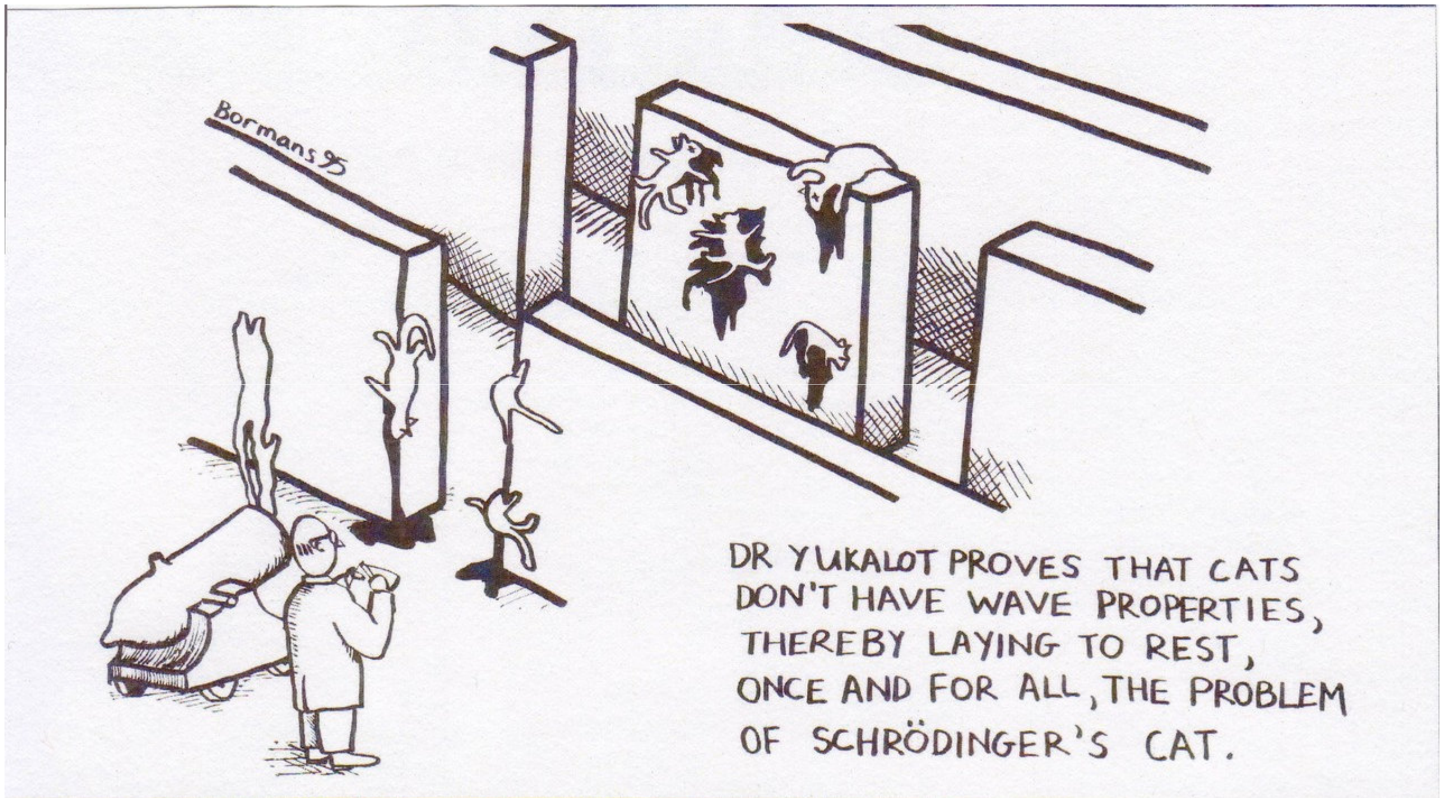
$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)|1\rangle + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)|2\rangle = |1\rangle$$

interferência construtiva

interferência destrutiva

$P_1 = 100\%$
$P_2 = 0\%$

Comentários Finais



Conexão com os operadores

- Produto escalar: $\langle\Phi|\Psi\rangle$
- Projetores: $|\Psi\rangle\langle\Psi|$
- Operador associado à grandeza A:

$$A = a_1 |a_1\rangle\langle a_1| + a_2 |a_2\rangle\langle a_2|$$

- Autovalores e autovetores de A:

$$A|\Psi\rangle = \lambda|\Psi\rangle \iff \begin{cases} |\Psi\rangle = |a_1\rangle, \quad \lambda = a_1 \\ \text{ou} \\ |\Psi\rangle = |a_2\rangle, \quad \lambda = a_2 \end{cases}$$

É mais fácil encontrar (postular) o operador A do que os “eixos” $|a_n\rangle$ e valores a_n.

Passos seguintes:

- Simetrias
- Posição e momentum
- Partícula em 1 dimensão: aplicações
  - Partícula livre
  - Potenciais constantes por partes: estados ligados, tunelamento, etc.
  - Oscilador harmônico
- Partículas idênticas
- Soma sobre caminhos (?)
- Descoerência (?)
- Muitos-mundos, de Broglie-Bohm (?)

Concluindo

- É possível apresentar alguns dos princípios básicos da mecânica quântica utilizando apenas matemática acessível a professores (e alunos?) do ensino médio.
- Essa abordagem permite descrever apropriadamente a mecânica quântica de sistemas simples.
- Aspectos pouco (ou nada) intuitivos da mecânica quântica podem ser discutidos sem interferência de dificuldades adicionais associadas à matemática.
- “Experimento didático” em desenvolvimento. Críticas e sugestões são bem-vindas.