

Potenciais cisalhados em mecânica clássica e mecânica quântica

Carlos Farina

Instituto de Física - UFRJ

Mestrado Profissional em Ensino de Física

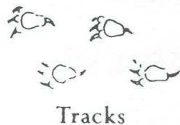
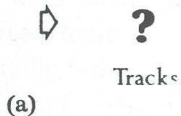
Instituto de Física - UFRJ

(16 de abril de 2013)

Roteiro da apresentação

1. Problema direto *versus* Problema inverso
2. Objetivos e motivações
3. Movimentos periódicos em 1 dimensão: cálculo do período
4. Problema inverso em 1 dimensão
5. Potenciais cisalhados: definição e exemplos simples
6. Potenciais cisalhados em mecânica quântica
7. Comentários finais e perspectivas

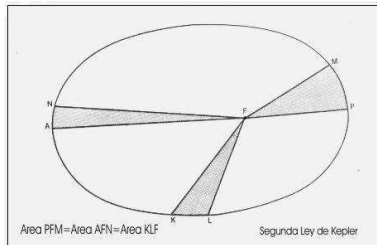
Problema direto versus Problema inverso



- (a) Conhecido o dragão, determinar suas pegadas
- (b) Conhecidas as pegadas, determinar o dragão

Exemplos de problemas inversos

- **Gravitação universal:** conhecidos os **movimentos planetários**, encontrar a lei de **força gravitacional**.



Problema resolvido por Isaac Newton
na 2^a metade do século XVII.

Movimentos planetários

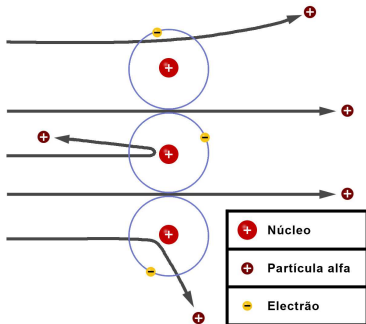
$$\mathbf{F} = -\frac{k}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$



Exemplos de problemas inversos

- **Modelo atômico de Rutherford:** concebido a partir do do espalhamento de partículas α por núcleos de ouro.

Algumas partículas α eram desviadas com ângulos bem superiores a 90° (~ 1 em 8000).



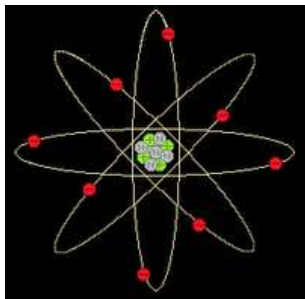
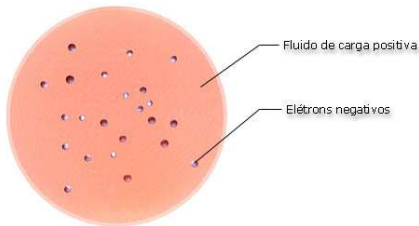
Descoberta feita em (1909) por **Geiger** (à esquerda) e **Marsden**, ambos alunos de **Rutherford** (à direita).



Exemplos de problemas inversos

pudim de passas \implies **modelo planetário**

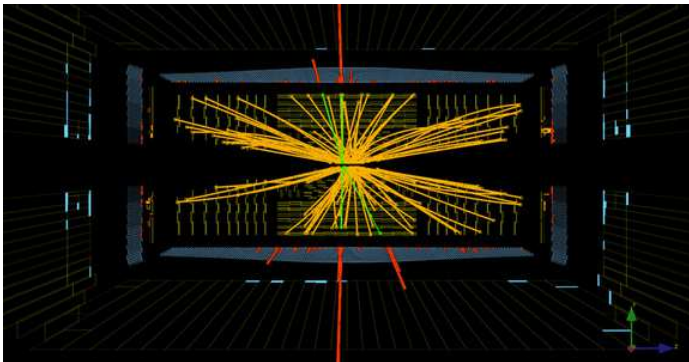
Modelo "Pudim de Passas"



- **Estimativa de Rutherford para o raio nuclear:**
 $< 2,7 \times 10^{-14}m$ (raio do núcleo do ouro $\approx 7,3 \times 10^{-15}m$)
- **Raio atômico:** da ordem de $\approx 10^{-10}m$;
 \implies **há muito mais espaço vazio do que cheio!**

Exemplos de problemas inversos

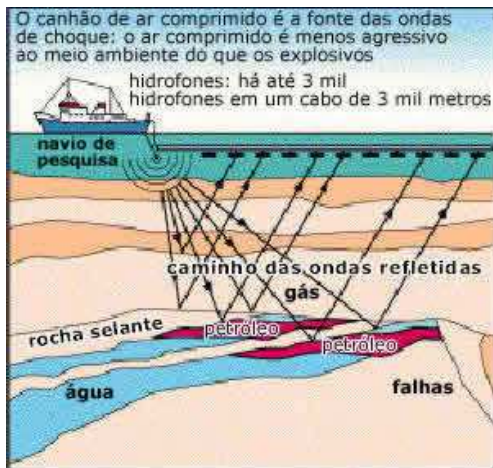
- **Física das partículas elementares:** nos grandes aceleradores, os **resultados de colisões** a altíssimas energias revelam propriedades das interações fundamentais



$\frac{d\sigma}{d\Omega}, \dots \implies$ interação eletromagnética, fraca, forte, ...

Exemplos de problemas inversos

- **Prospecção de petróleo:** analisando-se as reflexões de ondas mecânicas provocadas por uma fonte pode-se inferir onde existem **bolsões de óleo** e quais as suas dimensões.



Exemplos de problemas inversos

- **Arqueologia:** do grego, *arqué* (antigo) + *logos* (estudo).
Disciplina científica que estuda as **culturas do passado**
a partir da análise de **vestígios materiais do presente**.



Estudo de ruínas nos permite inferir o nível atingido em tecnologia, matemática, escrita, ...

Observatório astronômico na cidade maia de *Chichen Itzá*.



Juego de pelota maia.

Era mais que um simples jogo, era um cerimonial religioso envolvendo **sacrifícios**, ...

Seu estudo fornece informações valiosas dos costumes maias.

Objetivos e motivações

Objetivo

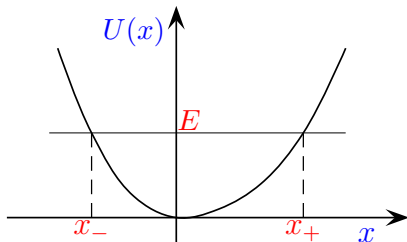
- estudar um **problema direto** e um **problema inverso** em **movimentos periódicos unidimensionais**
 - **problema direto**: dada a energia potencial U , calcular o período τ para uma dada energia mecânica E
 - **problema inverso**: conhecida a função τ estudar sob que condições podemos obter U

Motivações

- compreender mais profundamente as leis do movimento
- entender as propriedades dos **potenciais cisalhados** em **Mecânica Clássica** e em **Mecânica Quântica**
- Entender a **correlação entre $\tau(E)$** na Mecânica Clássica e **espectros de energia** na Mecânica Quântica

Movimentos periódicos em 1 dimensão

- Partícula de massa m sob a ação da força $F(x) = -\frac{dU}{dx}$



- **Pontos de retorno** x_- e x_+ : raízes da equação $E = U(x)$
- **Cálculo do período**: da conservação da energia temos

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - U(x)}$$

donde
$$\tau(E) = \sqrt{2m} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

- A função U **determina univocamente** a função τ !
- **Em geral**, o período τ depende da energia mecânica E

Exemplos

- **Oscilador harmônico:** $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$

$$\tau(E) = \sqrt{2m} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{1}{2}kx^2}}, \quad \text{onde } x_{\pm} = \pm\sqrt{\frac{2E}{k}}.$$

Fazendo a transformação de variáveis

$$\xi = x\sqrt{\frac{k}{2E}} \quad \Rightarrow \quad \xi_{\pm} = \pm 1 \quad \text{e} \quad dx = \sqrt{\frac{2E}{k}} d\xi$$

obtemos

$$\begin{aligned} \tau(E) &= 2\sqrt{\frac{m}{k}} \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \end{aligned}$$

Note que o período é independente de E !

Exemplos

- **Potencial linear:** $U(x) = \alpha|x|$

$$\tau(E) = \sqrt{2m} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{E - \alpha|x|}}, \quad \text{onde } x_{\pm} = \pm \frac{E}{\alpha}.$$

Fazendo a transformação de variáveis

$$\xi = x \frac{\alpha}{E} \quad \Rightarrow \quad \xi_{\pm} = \pm 1 \quad \text{e} \quad dx = \frac{E}{\alpha} d\xi$$

obtemos

$$\tau(E) = \frac{\sqrt{2mE}}{\alpha} \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - |\xi|}} = 4 \frac{\sqrt{2mE}}{\alpha}$$

Note que, nesse exemplo, o **período depende** de E .

Exemplos

- **Potência genérica:** $U(x) = \alpha|x|^n$ ($\alpha > 0$, $n \geq 1$)

$$\tau(E) = \sqrt{2m} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{E - \alpha|x|^n}}, \quad \text{onde } x_{\pm} = \pm \left(\frac{E}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Fazendo a transformação de variáveis

$$\xi = x \left(\frac{\alpha}{E}\right)^{1/n} \implies \xi_{\pm} = \pm 1 \quad \text{e} \quad dx = \left(\frac{E}{\alpha}\right)^{1/n} d\xi$$

obtemos

$$\tau(E) = \frac{\sqrt{2m}}{\alpha^{1/n}} E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}} \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-|\xi|^n}}}_{\text{fator numérico}} \implies \tau(E) \sim E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}$$

Dentre esses infinitos potenciais, apenas aquele com $n = 2$ (OH) tem seu período independente de E !

Exemplos

- **OH com barreira centrífuga:** $U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{g}{2x^2}$ ($x > 0$)

$$\tau(E) = \sqrt{2m} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{E - \left(\frac{1}{2}kx^2 + \frac{g}{2x^2}\right)}},$$

onde

$$x_{\pm} = \sqrt{\frac{E}{k}} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{kg}{E^2}} \right\}^{1/2}.$$

Fazendo a transformação de variáveis

$$u = x^2 \quad \Longrightarrow \quad u_{\pm} = x_{\pm}^2 \quad \text{e} \quad dx = \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

obtemos, após completar o quadrado,

$$\tau(E) = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{u_-}^{u_+} \frac{du}{\sqrt{\frac{E^2}{k^2} - \frac{g}{k} - \left(u - \frac{E}{k}\right)^2}} = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

O período não depende de E ! E vale $1/2$ de τ_{OH} !

Problema inverso em 1 dimensão

- **Pergunta:** a função τ determina univocamente a função U ?
- Ou seja, o conhecimento do período ($\forall E$) nos permite determinar **univocamente** a força que atua sobre a partícula?
- **Resposta: NÃO!** Há uma infinidade de potenciais que levam à mesma função período!

Demonstração

- **Procedimento:** inverter de algum modo a expressão de τ .
- Inicialmente, faremos a **mudança de variáveis** $x \mapsto U$, tomando o cuidado de definir a inversa de U separadamente para $x < 0$ (**função x_1**) e para $x > 0$ (**função x_2**)

$$\tau(E) = \sqrt{2m} \int_E^0 \frac{dx_1}{dU} \frac{dU}{\sqrt{E-U}} + \sqrt{2m} \int_0^E \frac{dx_2}{dU} \frac{dU}{\sqrt{E-U}}$$

- Invertendo o limite de integração da 1ª integral, temos

$$\tau(E) = \sqrt{2m} \int_0^E \left[\frac{dx_2}{dU} - \frac{dx_1}{dU} \right] \frac{dU}{\sqrt{E-U}}$$

Dividindo ambos os membros desta equação por $\sqrt{\alpha - E}$, onde α é um parâmetro e integrando em E de 0 a α , obtemos

$$\int_0^\alpha \frac{\tau(E) dE}{\sqrt{\alpha - E}} = \sqrt{2m} \int_0^\alpha \frac{dE}{\sqrt{\alpha - E}} \int_0^E \left[\frac{dx_2}{dU} - \frac{dx_1}{dU} \right] \frac{dU}{\sqrt{(E-U)}}$$

É conveniente mudar a ordem de integração (note a mudança nos limites de integração):

$$\int_0^\alpha \frac{\tau(E) dE}{\sqrt{\alpha - E}} = \sqrt{2m} \int_0^\alpha \left[\frac{dx_2}{dU} - \frac{dx_1}{dU} \right] dU \underbrace{\int_U^\alpha \frac{dE}{\sqrt{(E-U)(\alpha - E)}}}_{\pi}$$

- A integral em E vale π e a integração em U é imediata:

$$\int_0^\alpha \frac{\tau(E) dE}{\sqrt{\alpha - E}} = \pi\sqrt{2m}[x_2(\alpha) - x_1(\alpha)]$$

onde usamos o fato de que $x_2(0) = x_1(0) = 0$. Temos então

$$x_2(U) - x_1(U) = \frac{1}{\pi\sqrt{2m}} \int_0^U \frac{\tau(E) dE}{\sqrt{U - E}}$$

- A função τ determina **apenas** a diferença $x_2(U) - x_1(U)$. As funções x_2 e x_1 permanecem indeterminadas.
- Há infinitas funções U associadas à mesma função τ .
- Se exigirmos que U seja **simétrica**, $x_2(U) = -x_1(U) =: x(U)$, a equação anterior nos dá uma forma unívoca para $x(U)$:

$$x(U) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}} \int_0^U \frac{\tau(E) dE}{\sqrt{U - E}}$$

Exemplos da fórmula anterior

- **Período independente da energia:** $\tau(E) = C$, ($C = Cte$)

$$\begin{aligned}x(U) &= \frac{C}{2\pi\sqrt{2m}} \int_0^U \frac{dE}{\sqrt{U-E}} \\&= \frac{C}{2\pi\sqrt{2m}} \left[-2\sqrt{U-E} \right] \Big|_0^U \\&= \frac{C}{\pi\sqrt{2m}} \sqrt{U}\end{aligned}$$

Invertendo a equação anterior, obtemos o potencial desejado:

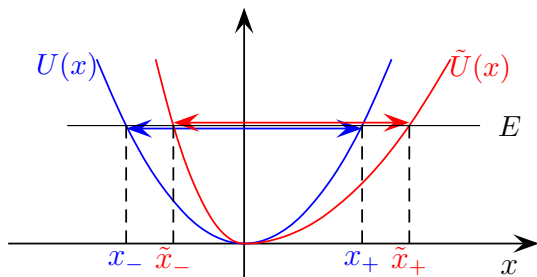
$$U(x) = \frac{2m\pi^2}{C^2} x^2; \quad \text{para } C = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \implies U(x) = \frac{1}{2} kx^2,$$

como esperado.

- **Outros exemplos:** $\tau(E) = C E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}$

Potenciais cisalhados: exemplos e aplicações

- Seja U um poço de potencial e sejam x_- e x_+ os pontos de retorno associados a **uma dada energia** E .
- Seja \tilde{U} um outro poço de potencial e sejam \tilde{x}_- e \tilde{x}_+ seus pontos de retorno associados à **mesma energia** E .

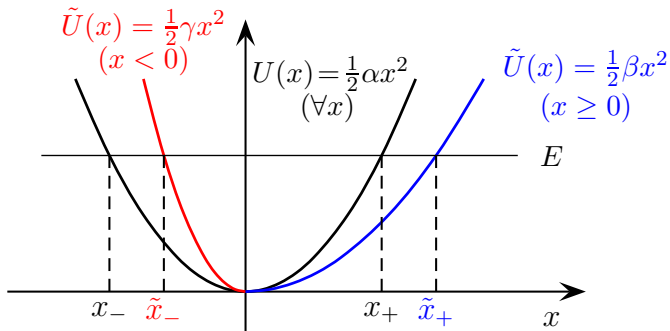


Dizemos que U e \tilde{U} são cisalhados se, e somente se, $x_+ - x_- = \tilde{x}_+ - \tilde{x}_-$ para qualquer valor de E .

- **POTENCIAIS CISALHADOS:** têm a mesma função período!

Exemplo de potenciais cisalhados

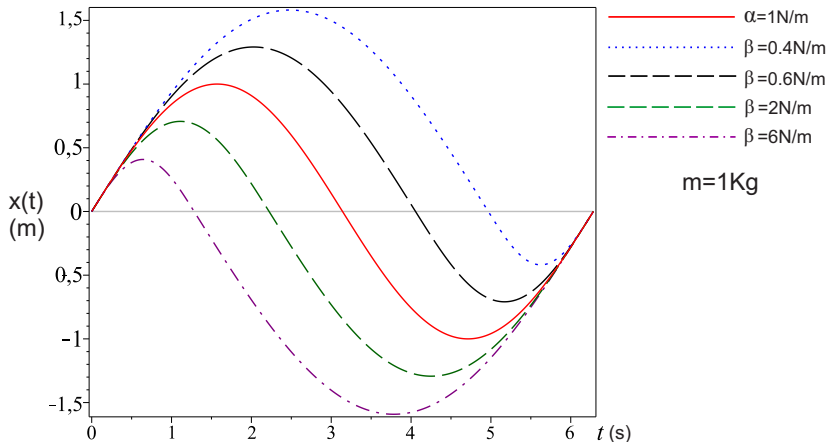
- Cisalhamento simples do oscilador harmônico: $U(x) = \frac{1}{2}\alpha x^2$
- Considere o potencial \tilde{U} mostrado na figura:



- **Condição de cisalhamento:** $\frac{1}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$
- **Período dos movimentos com \tilde{U} :**

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{2}2\pi\sqrt{\frac{m}{\beta}} + \frac{1}{2}2\pi\sqrt{\frac{m}{\gamma}} = \pi\sqrt{m} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right) = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\alpha}} = \tau$$

- Períodos iguais, mas funções-movimento diferentes!
- A figura ilustra esse fato para o caso do exemplo anterior:



Outros exemplos de potenciais cisalhados

- **Leis de potência:** $U(x) = \alpha|x|^n$, ($\alpha > 0$, $n \geq 1$)

Uma possível família de potenciais cisalhados a U é dada por:

$$\tilde{U}(x) = \beta|x|^n, \quad (x \geq 0) \quad \text{e} \quad \tilde{U}(x) = \gamma|x|^n, \quad (x < 0).$$

A condição de cisalhamento, $x_+ - x_- = \tilde{x}_+ - \tilde{x}_-$, implica

$$(1/\beta)^{1/n} + (1/\gamma)^{1/n} = 2(1/\alpha)^{1/n}.$$

- **Oscilador com distintas barreiras:** ($\tilde{g} \neq g$)

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{g}{2x^2}, \quad (x > 0); \quad \tilde{U}(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{\tilde{g}}{2x^2}, \quad (x > 0).$$

Pode-se mostrar que $x_+ - x_-$, calculada com $E = U_{min} + \mathcal{E}$, é igual a $\tilde{x}_+ - \tilde{x}_-$, calculada com $\tilde{E} = \tilde{U}_{min} + \mathcal{E}$, $\forall \mathcal{E}$.

- **Potenciais de Morse (1 dimensão) e tipo Pöschl-Teller:**

$$U_M(x) = D \{e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}\}; \quad U_{PT}(x) = -\frac{D}{\cosh^2(\alpha x)}.$$

Potenciais cisalhados na mecânica quântica

- Na aproximação semiclássica, os espectros de energia de dois potenciais cisalhados têm o mesmo espaçamento entre seus níveis ($\Delta E_n = E_{n+1} - E_n$):

$$\Delta \tilde{E}_n = \Delta E_n, \quad \forall n,$$

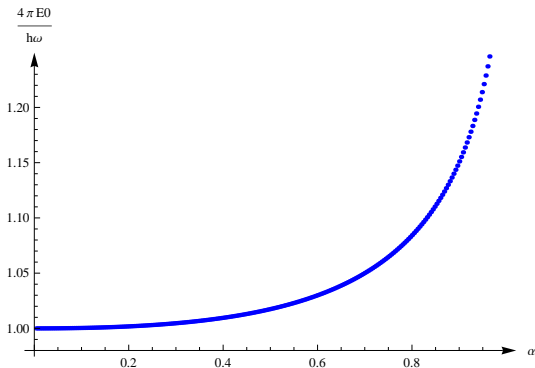
- No entanto, há potenciais cisalhados entre si com o mesmo espaçamento entre seus níveis (**OH com barreiras distintas**)
- De fato, para $U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{g}{2x^2}$, pode-se mostrar que ΔE_n não depende de g (e **tampouco de n !**)
- Na aproximação semiclássica, o coeficiente de transmissão por barreiras (tunelamento),

$$T_{sc} = \exp \left\{ -2 \int_{x_-}^{x_+} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (U(x) - E)} \right\},$$

é o mesmo para potenciais cisalhados entre si.

Potenciais cisalhados na mecânica quântica

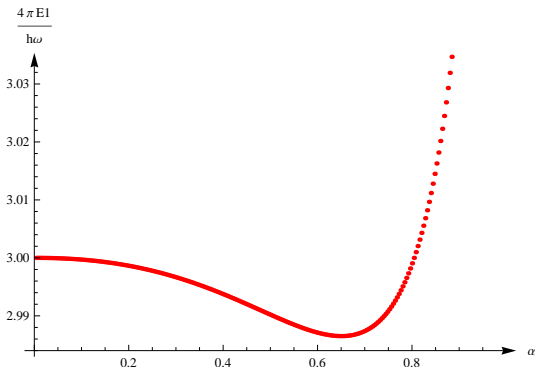
- Comportamento do nível **fundamental** sob cisalhamento:



- Variação **monotônica** com o parâmetro α .

Potenciais cisalhados na mecânica quântica

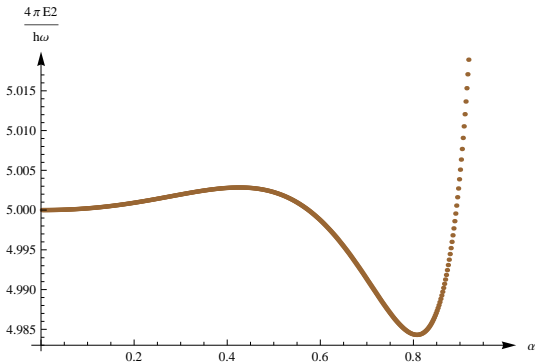
- Comportamento do primeiro nível excitado sob cisalhamento:



- A curva não é monotônica (há um mínimo local)

Potenciais cisalhados na mecânica quântica

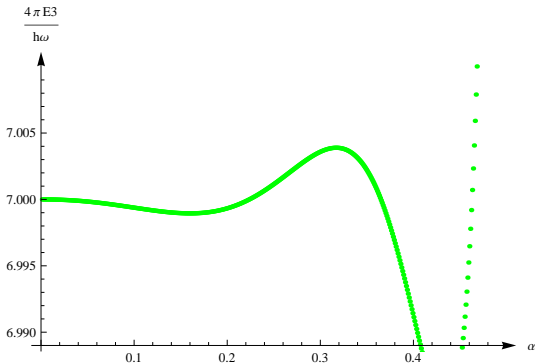
- Comportamento do **segundo nível excitado** sob cisalhamento:



- Note a presença de um máximo e um mínimo locais.

Potenciais cisalhados na mecânica quântica

- Comportamento do terceiro nível excitado sob cisalhamento:



Note a presença de um máximo e dois mínimos locais.

Comentários finais e perspectivas

- **Outras demonstrações:**
 - Transformada de Laplace (Osypowski e Olsson, AJP 1987);
 - demonstração gráfica (Pippard)
- Analisar **funções-movimento** envolvendo potenciais mais complicados: **Morse** ($d=1$) e **Pöschl-Teller**, ...
- Analisar **atrasos em tempos de percurso** barreiras cisalhadas;
- **Infinitas tautócronas** (projeto de **estudo e construção**).

- Comparar **espectros de energia** de outros potenciais cisalhados e **investigar oscilações com o cisalhamento**.
- Comparar **amplitudes de tunelamento** de barreiras de potencial cisalhadas entre si.

Referências

1. **L.D. Landau and E.M. Lifshitz**, *Mechanics* (Pergamon Press, 1976).
2. **A.B. Pippard**, *The Physics of Vibrations* (Cambridge University Press, Cambridge 1989).
3. **E.T. Osypowski and M.G. Olsson**, *Isynchronous motion in classical mechanics*, Am. J. Phys. **55** (1987) 720.