

# O Vácuo Quântico e o efeito Casimir

M V Cougo Pinto  
UFRJ

Pós-graduação em Ensino de Física  
UFRJ - Rio de Janeiro  
02 de abril de 2013

## Roteiro da Apresentação

**PARTE I: UMA BREVE HISTÓRIA DO VÁCUO**

**PARTE II: O VÁCUO QUÂNTICO EM SETE  
PATAMARES**

**PARTE III: O EFEITO CASIMIR**

# PARTE I

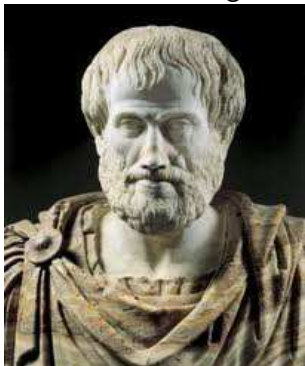
## UMA BREVE HISTÓRIA DO VÁCUO

## O vácuo grego (nada)

- Originalmente: vácuo é região do espaço sem qualquer forma de matéria (e radiação) = espaço vazio.
- Seria sinônimo de **nada**???
- O vácuo já atormentava filósofos da Grécia antiga...



Demócrito (ca.460-370 AC)



Aristóteles (384-322 AC)

- **Demócrito e Leucipo** sustentavam que tudo é composto de **vazio** e **átomos** (=porções indivisíveis de não-vazio). Esses são imutáveis, sempre em movimento no vazio, em número e tipos infinitos com características apenas geométricas.

**O vácuo (=espaço vazio)  
é a realidade fundamental**

- **Aristóteles** sustentava que espaço é uma propriedade derivada dos corpos ("da matéria"). Não há espaço sem algum dos 5 elementos (terra, água, ar, fogo e éter).

**Não existe vácuo (=espaço vazio)**

# Vácuo renascentista (tire o ar!)

- Da descoberta do *Corpus aristotelicum*, até  $\approx$  séc. XVII, predominou a idéia da **inexistência do vácuo**:  
    “*Natura abhorret a vacuo*”
- Fontes de Florença: *A natureza provavelmente não abomina o vácuo acima de 10 metros*” (**Galileu**);
- O barômetro de mercúrio de **Torricelli** (1644), barômetros de vinho de **Pascal** (1646), Hemisférios de Magdeburg (**Otto von Guericke**, 1657),... sugeriam a **existência do vácuo**.



## Vácuo banido: o éter luminífero

- **Newton:** gravidade como ação à distância através do vácuo e meio etéreo para transmitir forças entre partículas e explicar refração e calor radiado.
- **Maxwell** adotava a idéia de um meio de transmissão das forças eletromagnéticas, em particular dos campos eletromagnéticos ondulatórios (e.g., luz): o éter luminífero.

Ondas  $\implies$  algo ondulando:  
o éter onipresente.



Referencial privilegiado

# Éter banido: o retorno do vácuo

## Teoricamente

- **Einstein** propõe a relatividade restrita (1905), com referenciais inerciais equivalentes.
- Não há referencial privilegiado  $\implies$  não há éter luminífero.
- As ondas eletromagnéticas propagam no vácuo com a mesma velocidade **c** relativa a qualquer referencial inercial.

## Experimentalmente

- O experimento de **Michelson-Morley** (1887) mostra que não há vento etéreo na Terra; observações extraterrestres confirmam...

**Vácuo clássico: espaço vazio, inerte e insensível a qualquer estímulo externo.**



# PARTE II

# O VÁCUO QUÂNTICO EM SETE PATAMARES

**SINTESI  
DEL PURGATORIO**



Calculando com a energia do vácuo

Energia de ponto zero do campo eletromagnético

Forças de van der Waals dispersivas retardadas

Forças de van der Waals dispersivas

Sistemas quânticos e princípio de Heisenberg

Oscilador harmônico quântico

Oscilador harmônico clássico

# 1. Oscilador harmônico clássico

Massa  $m$  e força  $F = -kx \Rightarrow$  frequência  $\omega = \sqrt{k/m}$

Energia potencial  $U(x) = (1/2)kx^2$ :

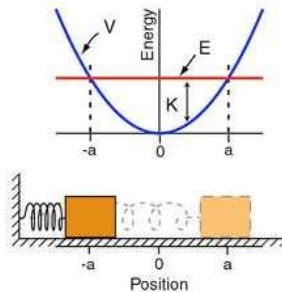
$$F = -\frac{dU(x)}{dx}.$$

Energia:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2.$$

Pode ter qualquer valor positivo:

$$E = (1/2) k a^2 \geq 0$$



Estado fundamental:  $E = 0$ .

- Usando frequência  $\omega$  e momento linear  $p = m v$ ,

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 .$$

- Massa unitária

$$E = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2 .$$

- Muitos sistemas, se comportam como um OHS, pelo menos aproximadamente:

$$E = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q^2 .$$

onde os significados de  $p$  e  $q$  dependem do sistema. Exemplo: pêndulo simples em oscilações pequenas, e sistemas com estados de equilíbrio estável e pequenos desvios desse estado.

- Muitos sistemas se comportam como um conjunto de vários OHSs,

$$E = \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{2} p_n^2 + \frac{1}{2} \omega_n^2 x_n^2 \right) ,$$

como  $N$  contas em um fio tenso.

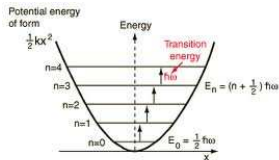
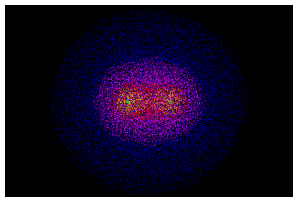
- O campo eletromagnético se comporta como um conjunto infinito de OHSs,

$$E = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \left( \frac{1}{2} p_{\mathbf{k}, \alpha}^2 + \frac{1}{2} \omega_{\mathbf{k}}^2 q_{\mathbf{k}, \alpha}^2 \right) \quad (\omega_{\mathbf{k}} = c |\mathbf{k}|) ,$$

onde  $\mathbf{k}$  é vetor de propagação da onda, com infinitos valores possíveis, e  $\alpha = 1, 2$  são as polarizações da onda.

## 2. Oscilador harmônico quântico

Exemplo: molécula de  $H_2$  com pequenas oscilações.



- Energias possíveis do OHS quântico

$$E = \left(\frac{1}{2} + n\right) \hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

- Constante de Planck  
 $\hbar = 1,054571726(47) \times 10^{-34} \text{ J s.}$
- Absorção e emissão em múltiplos de  $\hbar\omega$ . (No oscilador clássico  $n \gg 1$ .)
- Estado fundamental ( $n = 0$ ): Energia mínima =

**Energia de ponto zero**

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega$$

### 3. Sistemas quânticos e princípio de Heisenberg

$N$  ( $\gg 1$ ) medidas  $A_1, \dots, A_N$  de uma grandeza  $A \Rightarrow$  média e incerteza:

$$\langle A \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N A_n \quad \text{e} \quad \Delta A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle}$$



- Para duas grandezas  $A$  e  $B$  de um sistemas quânticos existe um número  $|\langle [A, B] \rangle| \geq 0$ .
- Princípio da Incerteza de Heisenberg:

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$$

- $\Rightarrow$  Flutuações Quânticas.
- Exemplo:  $\Delta p \Delta q \geq \hbar/2$
- $\Rightarrow$  impossibilidade de trajetória.

## Princípio de Heisenberg $\implies$ há energia de ponto-zero

- Valores médios nulos no estado fundamental:  $\langle x \rangle = 0$  e  $\langle p \rangle = 0$   
 $\implies \langle x^2 \rangle = (\Delta x)^2$  e  $\langle p^2 \rangle = (\Delta p)^2$ .
- Energia no estado fundamental:

$$\langle E \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \langle x^2 \rangle = \frac{(\Delta p)^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 (\Delta x)^2 .$$

- Princípio de Heisenberg com incerteza mínima:  $\Delta x \Delta p = \hbar/2 \implies$

$$\langle E \rangle = \frac{(\hbar/2)^2}{2m} \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 (\Delta x)^2 .$$

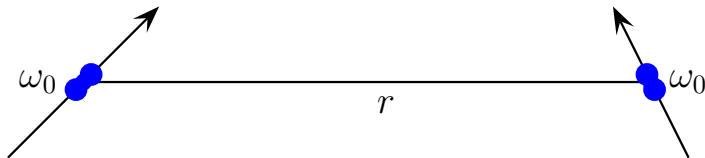
- Mínimo da energia,  $d\langle E \rangle/d(\Delta x) = 0 \implies (\Delta x)^2 = \hbar/(2m\omega) \implies$

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega .$$



## 4. Forças de van der Waals dispersivas

- **Flutuações quânticas** nas distribuições de carga de moléculas apolares gera dipolos elétricos flutuantes:



- **Eisenschitz e London** para átomos neutros (1930):

$$U \approx -\frac{3\hbar\omega_0\alpha^2}{4r^6} \implies F \approx -\frac{9\hbar\omega_0\alpha^2}{2r^7}$$

onde  $\alpha$  é a polarizabilidade estática e  $\omega_0$  a frequência de transição dominante.

- A presença de  $\hbar$  mostra o caráter quântico da interação.

## 5. Forças de van der Waals dispersivas retardadas

- A estabilidade de colóides observadas em experimentos de **Verwey e Overbeek** (anos 40) indicava que as forças dispersivas deveriam cair mais rapidamente do que  $1/r^7$  para **grandes distâncias**.
- **Conjectura de Overbeek**: efeito do retardamento relativístico do campo eletromagnético; importante se  $r/c \gg$  do que os períodos de transição característicos das moléculas. Overbeek sugeriu o cálculo a Casimir...
- **Casimir e Polder** 1948: "*The Influence of Retardation on the London-van der Waals Forces*". Interação entre dois átomos neutros de polarizabilidades estáticas  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  :

$$U \approx -\frac{23\hbar c}{4\pi} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{r^7} \implies F \approx -\frac{161\hbar c}{4\pi} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{r^8}$$

- A presença de  $\hbar$  mostra o caráter quântico da interação e de  $c$ , o relativístico.

- Observação: Casimir e Polder também calculam a interação entre um átomo neutro e um plano perfeitamente condutor.
- **Tabor e Winterton (1968)** mediram com grande precisão essa mudança de lei de potência do regime **não-retardado**,  $\sim 1/r^7$ , para o regime **retardado**,  $\sim 1/r^8$ .
- Já no final do artigo de 1948, **Casimir e Polder levantam uma suspeita...**

*“The very simple form of Eq. (56) and the analogous formula (25) suggest that it might be possible to derive these expressions, perhaps apart from the numerical factors, by more elementary considerations. This would be desirable since it would also give a more physical background to our result, a result which in our opinion is rather remarkable. So far we have not been able to find such a simple argument.”*

- **A conversa com Niels Bohr e a energia de ponto-zero**

*"In the summer or autumn 1947 ... (but I am not absolutely certain that it was not somewhat earlier or later) I mentioned my results to Niels Bohr, during a walk. "That is nice", he said, "That is something new." I told him that I was puzzled by the extremely simple form of the expressions for the interaction at very large distance and he mumbled something about **zero-point energy**. That was all, but it put me on a new track."*

- **Um novo caminho: a energia de ponto-zero do campo eletromagnético.**

- *'I found that calculating **changes of zero-point energy** really leads to the same results as the calculations of Polder and myself...'* (Casimir em :[Colloque sur la théorie de la liaison chimique](#), Paris, abril de 1948). Publicado em *J. Chim. Phys.* **46**, 407 1949.

## 6. Energia de ponto zero do campo eletromagnético

- O campo eletromagnético quântico se comporta como um conjunto infinito de OHSs quânticos,

$$E = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \left( \frac{1}{2} p_{\mathbf{k}, \alpha}^2 + \frac{1}{2} \omega_{\mathbf{k}}^2 q_{\mathbf{k}, \alpha}^2 \right) \quad (\omega_{\mathbf{k}} = c |\mathbf{k}|) ,$$

- Cada um com seu espectro de energia:

$$E = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \left( \frac{1}{2} + n_{\mathbf{k}, \alpha} \right) \hbar \omega_{\mathbf{k}} ,$$

onde  $n_{\mathbf{k}, \alpha}$  é o número de **fótons** com vetor de onda  $\mathbf{k}$  e polarização  $\alpha$ .

- Em uma região do espaço, se retirarmos todos os fótons (após retirar todo ar, etc.), resta o vácuo com energia igual à energia de ponto-zero do campo eletromagnético,

$$E_0 = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\mathbf{k}} ,$$

- mais as energias de ponto-zero dos demais campos quânticos relativísticos:

**Energia do Vácuo Quântico**

## 7. Calculando com a energia do vácuo

- **Atenção máxima:**
  - A energia do vácuo é infinita!!! (infinitos: maldição ou encanto da TQC?)
  - Medimos apenas **variações** de energia em TQC.
- **Regularização da energia do vácuo:** Substituir a energia infinita  $E_0$  do vácuo, por uma expressão  $E_0^{(\varepsilon)}$  na qual  $\varepsilon$  é um parâmetro que pode assumir um certo valor  $\varepsilon_*$ , de tal modo que
  - $E_0^{(\varepsilon)}$  é finita
  - $\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_*} E_0^{(\varepsilon)} = E_0$
- **Renormalização:** calcular a **variação** da energia regularizada entre o vácuo **com os corpos interagentes** e o vácuo **sem os corpos interagentes**

$$\Delta E_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_*} \left[ E_0^{(\varepsilon)} \Big|_{\text{cci}} - E_0^{(\varepsilon)} \Big|_{\text{sci}} \right]$$

- Esse é o **método de cálculo mais simples** procurado por Casimir e Polder, no qual apenas a energia do vácuo eletromagnético é relevante.
- **Implicações conceituais** imensamente mais importantes:

**Vácuo clássico: espaço vazio, inerte e insensível a qualquer estímulo externo,**

**dá lugar ao**

**Vácuo quântico: espaço sem matéria e radiação, mas pleno de flutuações quânticas sensíveis a estímulos externos.**

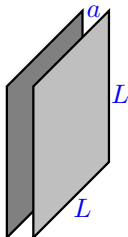


- A interação entre os átomos neutros pode ser vista como consequência das flutuações quânticas nos átomos, ou das flutuações quânticas do vácuo eletromagnético. Não se poderia aceitar que as flutuações nos átomos são a real causa da interação e considerar que as flutuações no vácuo apenas como um artifício matemático de cálculo?
- Para os descrentes: Exatamente a mesma questão se põe na interação eletromagnética clássica: é devida às cargas nos corpos ou ao campo eletromagnético? No caso estático é indiferente usar ou não o campo na interpretação dos fenômenos, mas no caso geral dinâmico, a realidade do campo se impõe. A realidade do vácuo quântico se impõe pelas mesma razão.
- Há muitos efeitos das flutuações do vácuo quântico: polarização do vácuo e criação por campo externo, deslocamento Lamb e emissão espontânea. O mais notável é o efeito Casimir.

# PARTE III

## O EFEITO CASIMIR

# 1. Efeito Casimir Original



- O **efeito Casimir** consiste na atração entre duas placas paralelas, neutras e perfeitamente condutoras no vácuo.
- Previsto por **Hendrik Brugt Gerhard Casimir**, apresentado em 29 de maio de 1948 perante a Real Academia Holandesa de Ciências e Artes e publicado em suas atas no mesmo ano.
- Calculando a variação da energia do vácuo eletromagnético devida à presença das placas metálicas quadradas idênticas de lado  $L$  e separação  $a$  ( $a \ll L$ ), obteve uma força de atração entre elas.

- A força de Casimir é

$$F = -L^2 \frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{a^4}$$

- diretamente proporcional à área das placas;
  - o fator  $\pi^2/240$  pode ser relacionado com a **função  $\zeta$** ;
  - diretamente proporcional ao produto  $\hbar c$ , que explicita sua origem quântica e relativística;
  - inversamente proporcional à **quarta potência** da distância entre as placas.
- Valor numérico:

$$F \approx -0,013 \left( \frac{L}{cm} \right)^2 \frac{1}{(a/\mu m)^4} dyn$$

Para  $L = 1 cm$  e  $a = 1 \mu m$ ,  $|F| = 0,013 dyn \approx$  peso de 1/10 de um **confete**, i.e., **em princípio mensurável**.

## 2. Confirmações experimentais do efeito Casimir

- M.J. Sparnaay (1958) - placas metálicas paralelas; “**apenas compatibilidade**” .
- S.K. Lamoreaux (1997) - uma placa e uma lente esférica (pêndulo de torção); **primeiro experimento com boa precisão**.
- U. Mohideen and A. Roy (1998)- placa e esfera (**microscópio de força atômica**).
- U. Mohideen and A. Roy: Phys. Rev. Lett.(1999), “*dependência não-trivial com a forma da fronteira*”.
- T. Ederth (2000) → Forças de Casimir entre cilindros cruzados para separações menores que 100 nm.
- Capasso *et al* (2001): Sistema microeletromecânico.

- G. Bressi et al (2002) → Placas paralelas (método dinâmico); precisão  $\sim 15\%$ .
- Chen *et al* (2002): força de Casimir lateral.
- R.S. Decca et al (2003) → (sistema microeletricomecânico); precisão  $\sim 0,25\%$ .
- D. Iannuzzi, M. Lisanti e F. Capasso (2003) → placa de ouro e esfera
- R.S. Decca et al (2005), (2007), ...
- etc.
- Munday, Capasso e Parsegian (2009): mediram, pela primeira vez, o efeito Casimir repulsivo para camadas dielétricas.



nature

Vol 457 | 8 January 2009 | doi:10.1038/nature07610

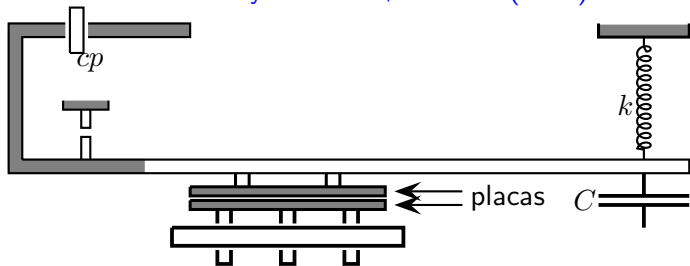
## LETTERS

### Measured long-range repulsive Casimir–Lifshitz forces

J. N. Munday<sup>1</sup>, Federico Capasso<sup>2</sup> & V. Adrian Parsegian<sup>3</sup>

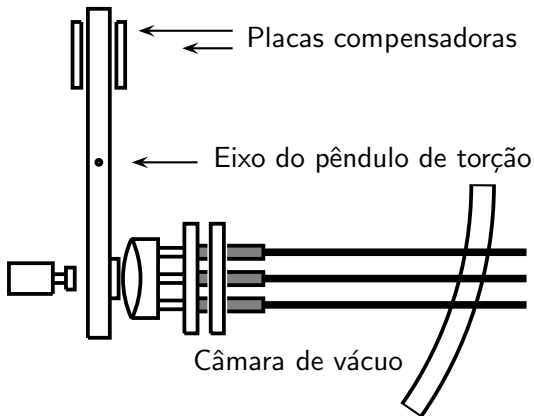
# Esquema simplificado do aparato utilizado por Sparnaay

Physica XXIV, 751-764 (1958)



- Separações entre as placas:  $0,5\mu\text{m} \longleftrightarrow 2\mu\text{m}$ .
- Principais problemas:
  - manter o **paralelismo** entre as placas;
  - eliminar **cargas elétricas** residuais.
- *“The observed attractions **do not contradict** Casimir theoretical prediction.”*

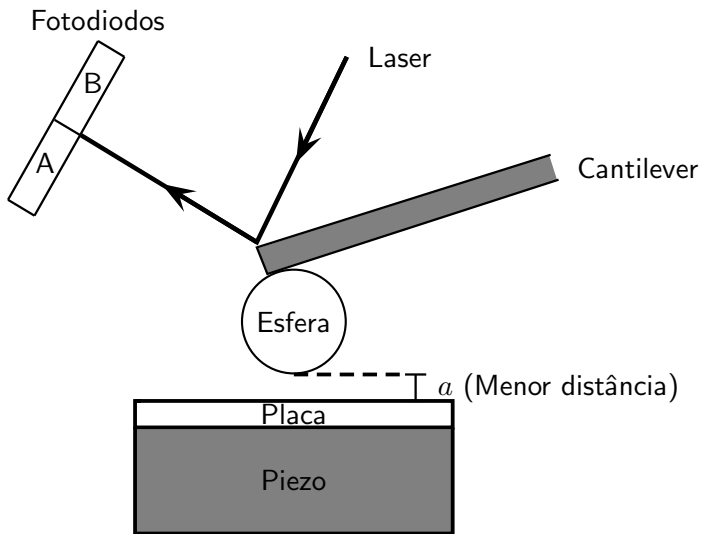
## Esquema simplificado utilizado por Lamoreaux



- Separações entre a placa e a lente esférica:  $0,2\mu\text{m} \longleftrightarrow 0,6\mu\text{m}$ .
- **Aproximação de Forças de Proximidade** para testar efeito de placas planas com placas não planas.



## Esquema simplificado utilizado por Mohideen e Roy



### 3. Prá não dizer que não calculamos o efeito...

- **Espaço unidimensional**: campo ondulatório em  $1 + 1$ , com comprimentos de onda  $\lambda$  arbitrário, os correspondentes números de onda  $k = 2\pi/\lambda$  e as frequências  $\omega = ck$ .
- **Duas placas condutoras** separadas por distância  $a$ . Em  $1 + 1$  placas são pontos e condutoras significa opacas para as ondulações. A opacidade significa que somente há ondas entre as placas que satisfazem  $n(\lambda/2) = a$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), isto é,  $k = \pi n/a$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), donde  $\omega_n = c\pi n/a$ .
- Basta considerar a **energia do vácuo quântico entre as as placas**:

$$E_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \hbar \omega_n = \frac{\pi \hbar c}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} n$$

- Agora, basta calcular a série  $1 + 2 + 3 + \dots$ . A resposta é...

- $1 + 2 + 3 + \dots = -1/12$  (a ser explicada em um momentinho).  
Portanto,

$$E_0 = \frac{\pi \hbar c}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} n = \frac{\pi \hbar c}{2a} \left( -\frac{1}{12} \right) = -\frac{\pi \hbar c}{24a}$$

- A força de Casimir entre as placas é:

$$F = -\frac{\pi \hbar c}{12a^2}$$

- Antes de cairmos na incredulidade por causa da série, lembremos que
  - em TQC infinitos acontecem,
  - precisamos regularizar e renormalizar,
  - séries como essa aparecem no cálculo original da força de Casimir que é verificada **experimentalmente!**
- Para entender, recorreremos ao mestre maior da física matemática.

- **Leonhard Euler** (1707-1783) não tinha medo de séries divergentes; abriu o caminho que agora trilhamos com extensões analíticas, convergência assintótica, etc.



- Ensaio com uma **série elementar**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Big|_{x=2}$$

Mas, para  $|x| < 1$  ( $x$  real ou complexo):

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = h(x)$$

- Para  $x = 2$  a **série à esquerda é divergente**, mas a **função  $h$  à direita é bem definida** ( $h$  não é definida apenas em  $x = 1$ ). Tomamos  $h(2) = -1$  como o valor a ser usado no cálculo de interesse. Provocativamente:  $1 + 2 + 4 + 8 + \dots = -1$ .

- Agora, voltemos à série divergente do efeito Casimir em  $1 + 1$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \Big|_{s=-1}$$

- Para  $\Re(s) > 1$  ( $x$  real ou complexo):  $\sum_{n=0}^{\infty} n^{-s} = \zeta(s)$

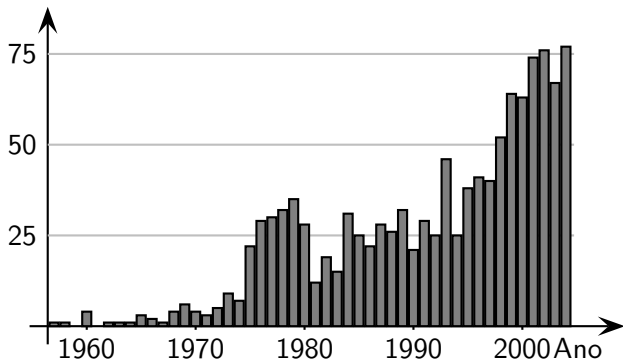
- Para  $s = -1$  a série à esquerda é divergente, mas a função  $\zeta$  à direita é bem definida e nos fornece  $\zeta(-1) = -1/12$ . Fazemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = \zeta(-1) = -1/12 \text{ ou seja, } 1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -1/12.$$

**O Ministério da Educação adverte:** o uso prolongado dessa explicação para o valor finito de série divergente pode causar danos à sua saúde matemática; aprenda logo extensão analítica em Métodos Matemáticos.

## 4. Pesquisas sobre efeito Casimir

- Área muito ativa de pesquisa **teórica, experimental e tecnológica**.  
Histograma de citações do artigo original de Casimir  $\times$  anos:



- **O mistério do efeito Casimir**: em geral, o caráter atrativo ou repulsivo da força de Casimir não pode ser antecipado;

O efeito é atraente também por sua **interdisciplinaridade**:

- Teoria quântica de campos (modelo de sacola);
- EDQ de cavidades;
- Física da matéria condensada;
- Física atômica e molecular;
- Desenvolvimentos de novos métodos matemáticos;
- Cotas superiores para forças hipotéticas;
- Nanotecnologia (MEMS e NEMS);
- Gravitação e cosmologia;
- Modelos com dimensões extras compactificadas, Supercordas, teorias com comprimento fundamental, TQC não-comutativa, ...;

## Grupo de Flutuações Quânticas

- Paulo Américo Maia Neto, Carlos Farina, Felipe Rosa, Felipe Pinheiro, M V C P
- Claudio Ccapa, Bruno Mintz
- Reinaldo de Melo e Souza, Andreson Rego, Wilton Kort-Kamp
- Daniel Antunes, Marcus Bezerra, Patrícia Abrantes

