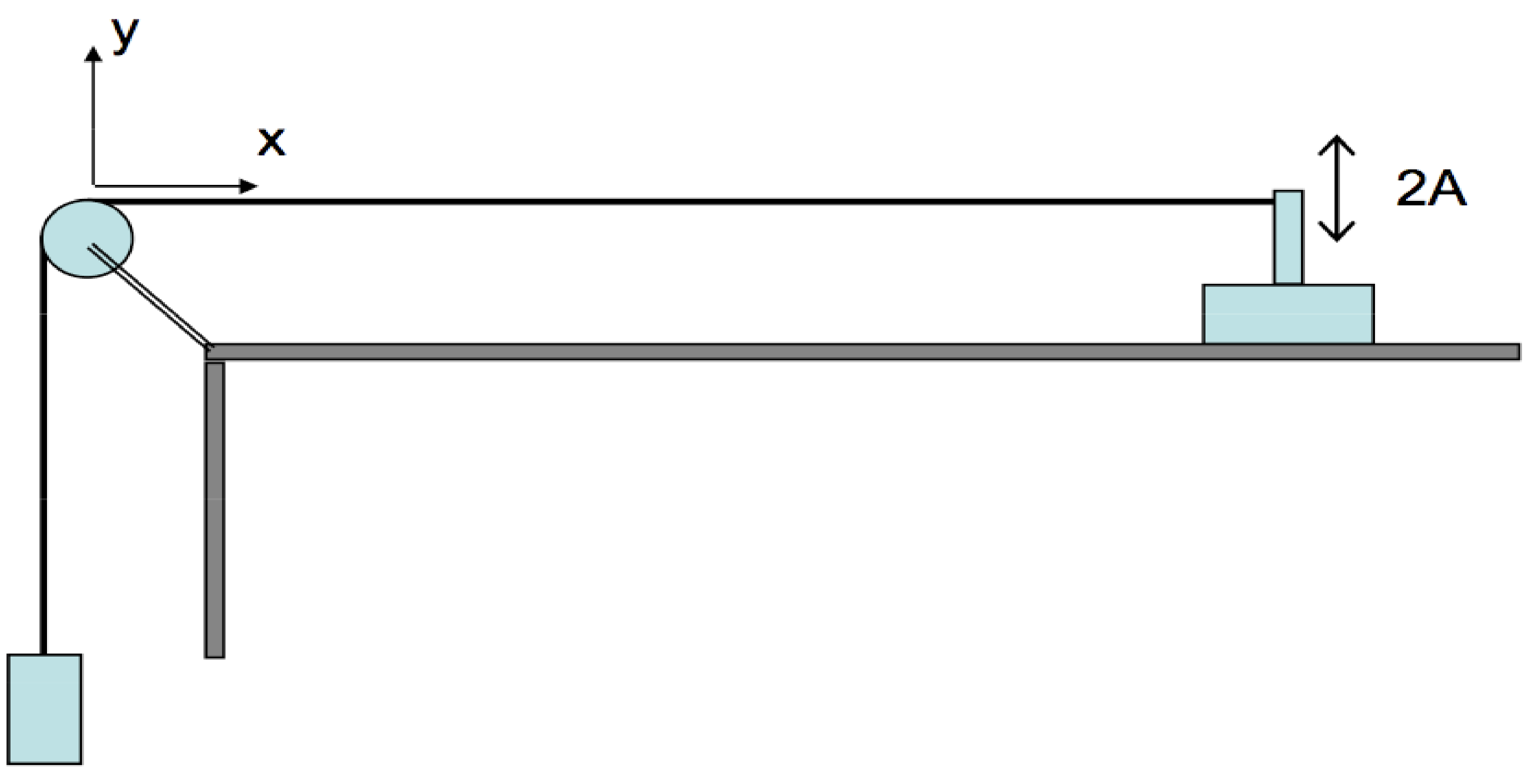
A GERAÇÃO DE ONDAS ESTACIONÁRIAS EM UMA CORDA VIBRANTE

Filadelfo Cardoso Santos

CORDAS VIBRANTES
MOVIMENTO FORÇADO



Equação de Onda

$$\boxed{T\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \mu\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$$

T = tensão da corda , μ = densidade da corda

velocidade das ondas na corda: $c = \sqrt{T/\mu}$

Condições de contorno:

$$\boxed{\begin{aligned} &y(0,t) = 0 \\ &y(L,t) = A\cos(\omega t) \end{aligned}}$$

Solução da Equação de Onda

onda estacionária:

$$\boxed{y(x,t) = \frac{A\,\mathrm{sen}(kx)\cos(\omega t)}{\mathrm{sen}(kL)}} \qquad k = \frac{\omega}{c}$$

Quando a frequência de oscilação da extremidade for igual à de um modo normal da corda (ressonância):

$$k = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow \mathrm{sen}(kL) = 0 \Rightarrow y(x,t) = \infty$$

a solução diverge

Amortecimento

A solução divergente não está de acordo com a experiência, portanto devemos ter efeitos dissipativos.

$$\boxed{T\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - b\,\frac{\partial y}{\partial t} - \mu\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$$

b = parâmetro de amortecimento (geralmente é função da frequência)

Solução com amortecimento

$$\boxed{y(x,t) = \frac{A\,\mathrm{sen}(k'x)\exp(i\omega t)}{\mathrm{sen}(k'L)}} \quad \text{(parte real)}$$

O número de onda agora é complexo:

$$k' = \frac{\omega}{c}\left(1 - i\,\frac{\gamma}{\omega}\right)^{1/2} \qquad\qquad \gamma = \frac{b}{\mu}$$

Como gerar uma onda estacionária?

- A onda estacionária não pode ser formada instantaneamente em uma corda!
- O movimento imposto na extremidade excita todas as frequências possíveis.
- Qual é o mecanismo que permite selecionar a frequência de ressonância?
- Como a onda estacionária é mantida?

Nosso problema

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0$$

Condições de contorno

$$\psi\left(0,t\right)=0$$

$$\Psi(L,t)=f(t)$$

Condições iniciais

$$\psi\left(x,0\right)=0$$

$$\dot{\psi}\left(x,0\right)=0$$

TRANSFORMAÇÃO

$$\psi\left(x,t\right)=\varphi\left(x,t\right))-\frac{x}{L}f\left(t\right)$$

A EQUAÇÃO TRANSFORMADA

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{x}{Lc^2}\ddot{f}(t)$$

CONDIÇÕES PARA φ(x,t)

$$\psi\left(x,t\right)=\varphi\left(x,t\right))-\frac{x}{L}f\left(t\right)$$

CONDICÕES DE CONTORNO

$$\varphi\left(0,t\right)=0$$

$$\varphi\left(L,t\right)=0$$

CONDIÇÕES INICIAIS

$$\varphi\left(x,0\right)=-\frac{f\left(0\right)}{L}x$$

$$\dot{\varphi}\left(x,0\right)=-\frac{\dot{f}\left(0\right)}{L}x$$

O método de solução

BASE

$$\left\{ \sin\frac{n\Pi x}{L} \quad n = 1,2,3,\ldots \right.$$

Expansões

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{2L}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{array} \right.$$

A equação diferencial

$$\ddot{a}_n(t)+\omega_n^2 a_n(t)=(-1)^n\frac{2\ddot{f}(t)}{n}$$

$$1)\ a_n(0)=(-1)^n\frac{2f(0)}{n}$$

C.I.

$$2)\ \dot{a}_n(0)=(-1)^n\frac{2\dot{f}(0)}{n}$$

Solução da equação para a(t)

Solução da homogênea que satisfaz às condições iniciais

$$a_n^H(t) = (-1)^n \frac{2f(0)}{n} \cos\omega_n t + (-1)^n \frac{2\dot{f}(0)}{n\omega_n} \sin\omega_n t$$

Solução particular

$$a_n^P = (-1)^n \frac{2}{n\omega_n} \int_0^t \sin\omega_n (t - t') \ddot{f}(t')$$

As funções a(t)

$$a_n(t) = \frac{2(-1)^n}{n}\left[f(t) - \omega_n \int_0^t \sin\omega_n (t - t') f(t') \right]$$

A solução completa

$$\psi(x,t) = \frac{2\pi c}{L}\left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int_0^t \sin\omega_n (t - t') f(t') dt' \right] \sin\frac{n\pi x}{L}$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$t' = t - \frac{L-x}{c}$$

$$\psi(x,t) = \frac{2\pi}{L}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \int_{L-ct}^{L} f\left(t - \frac{L-x'}{c}\right)\sin\left[\left(\frac{n\pi x'}{L} - n\pi\right)\right]dx'\right\}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

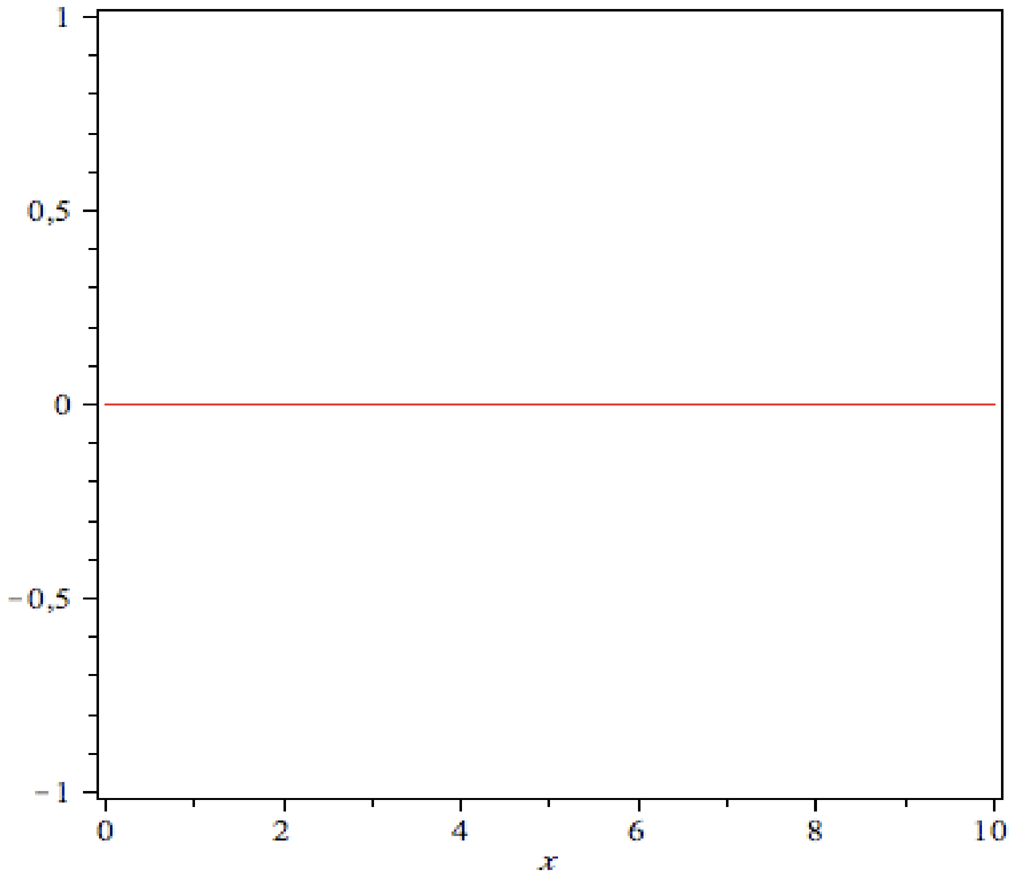
$$\psi(x,t) = f\left(t - \frac{L-x}{c}\right)$$

A onda nos instantes iniciais

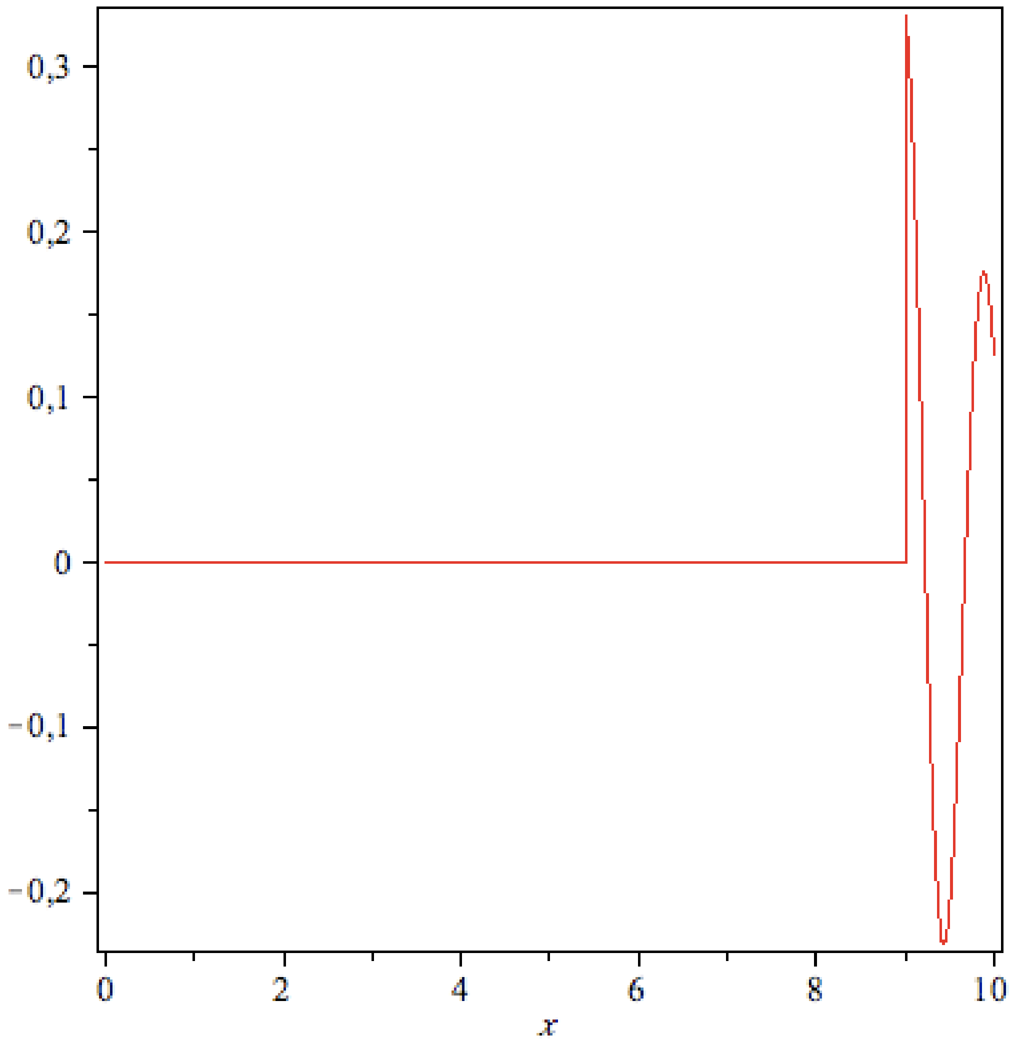
Para ilustrar o processo de formação da onda vamos considerar uma excitação da forma

$$f(t)=\frac{A\cos(\omega t)}{t+1}$$

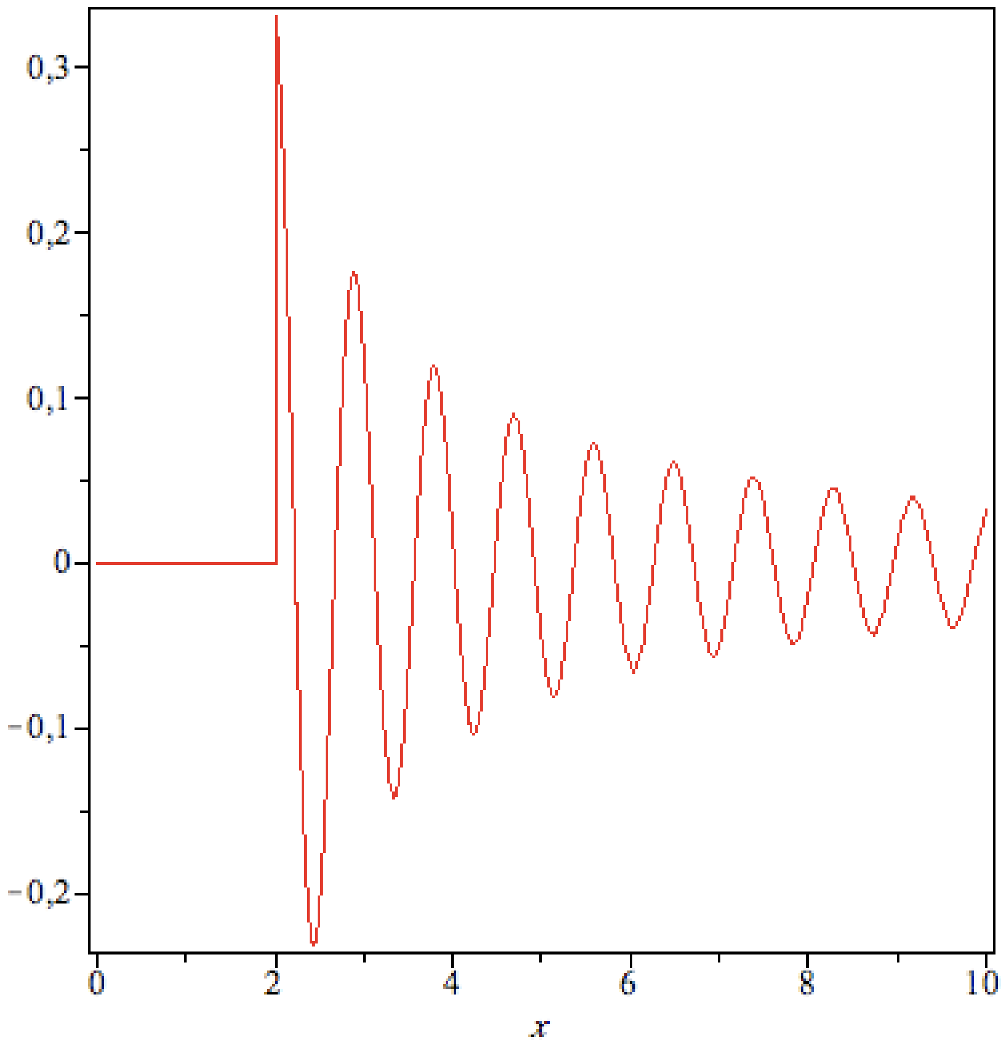
No instante inicial



Um pouco depois



Mais alguns instantes



EXCITAÇÃO HARMÔNICA

$$f(t) = A\sin(\omega_0 t)$$

$$\psi(x,t) = \frac{2\pi cA}{L}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_0^t \sin\omega_n(t-t')\sin(\omega_0 t')dt'\right]\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$\psi(x,t) = \frac{\pi cA}{L}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_0^t [\cos(\omega_n t-\omega_n t'-\omega_0 t')-\cos(\omega_n t-\omega_n t'+\omega_0 t')]dt'\right]\sin\frac{n\pi x}{L}$$

CASO I $\quad \omega_n \neq \omega_0$

$$\psi(x,t) = \frac{\pi c A}{L} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[\frac{\omega_n \sin(\omega_0 t) - \omega_0 \sin(\omega_n t)}{\omega_n^2 - \omega_0^2} \right] \sin\frac{n\pi x}{L}$$

Nesse caso não há ressonância

CASO II $\omega_n = \omega_0$

$$\psi(x,t) = \frac{\pi c A}{L}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left[\frac{\omega_n \sin(\omega_0 t) - \omega_0 \sin(\omega_n t)}{\omega_n^2 - \omega_0^2}\right]\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$+\frac{\pi c A}{L}(-1)^{n_0+1}\left[\frac{\sin(\omega_0 t) - \omega_0 t\cos(\omega_n t)}{2\omega_0}\right]\sin\frac{n_0 \pi x}{L}$$

Há uma frequência ressonante

EQUAÇÃO DA ONDA COM AMORTECIMENTO

$$T\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-b\frac{\partial\psi}{\partial t}=0$$

Definindo

$$c^2=\frac{T}{\mu} \qquad \gamma=\frac{b}{2\mu}$$

Obtemos

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{2\gamma}{c^2}\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$$

TRANSFORMAÇÃO

$$\psi\left(x,t\right)=\varphi\left(x,t\right))-\frac{x}{L}f\left(t\right)$$

A EQUAÇÃO TRANSFORMADA É

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{2\gamma}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{x}{Lc^2}\left[\ddot{f}(t)+2\gamma\dot{f}(t)\right]$$

Solução final

$$\psi(x,t)=\frac{2\pi c}{L}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\omega_n}{\Omega_n}\int_0^t \sin\Omega_n(t-t')e^{-\gamma(t-t')}f(t')dt'\sin\frac{n\pi x}{L}$$

Onde $$\Omega_n=\sqrt{\omega_n^2-\gamma^2}$$

Excitação harmônica

$$f(t) = A\sin(\omega_0 t)$$

$$\psi_a(x,t) = \frac{2\pi c A}{L}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\omega_n \frac{\left[\left(\omega_n^2-\omega_0^2\right)\cos(\omega_0 t)+2\gamma\omega_0\sin(\omega_0 t)\right]}{\left(\omega_n^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega_0^2}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

RESSONÂNCIA

$$\omega_{n_0}^2-\omega_0^2=0$$

CONCLUSÕES

- A componente ressonante é da forma

$$\psi_a^{(r)}(x,t) = (-1)^{n_0+1}\frac{\pi c A}{\gamma L}\sin(\omega_0 t)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

- Todas as frequências contribuem para o modo assintótico

FIM