As equações algébricas e a teoria de Galois

Filadelfo Cardoso Santos

A difícil equação do primeiro grau

É verdade! A equação do primeiro grau foi resolvida na Antiguidade

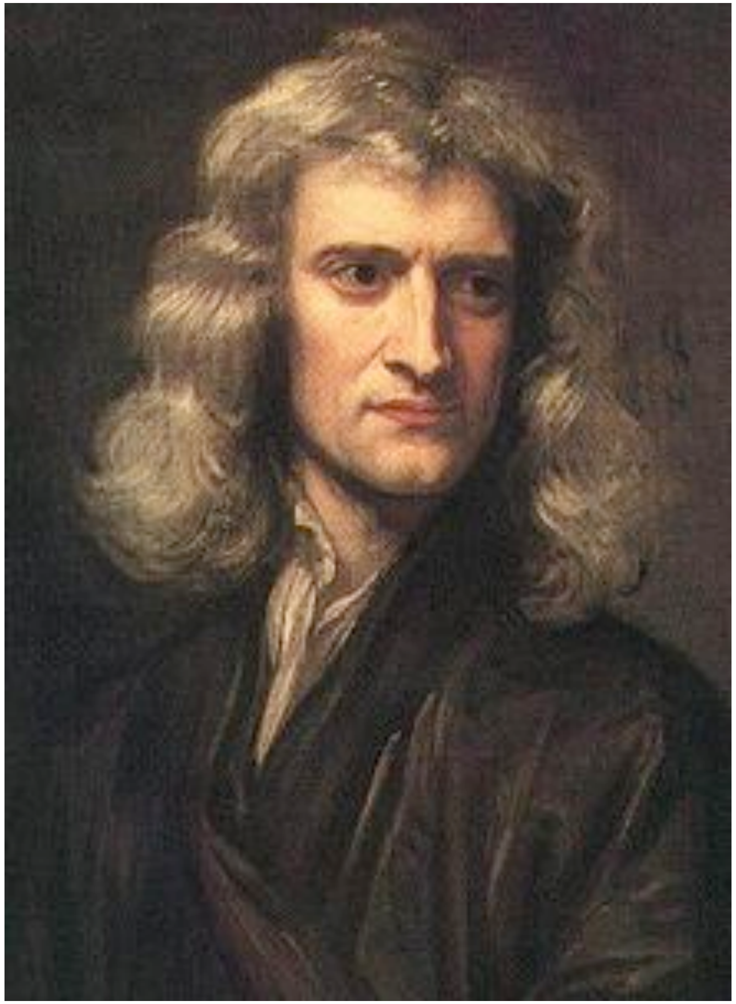
$$ax + b = 0$$

A solução geral é

$$x = -\frac{b}{a}$$

A equação do primeiro grau pode ser resolvida no corpo dos racionais.

Isaac Newton
(1643-1727)



As contribuições de Newton à matemática pura são suficientes para colocá-lo entre os maiores gênios na história da matemática.

Harold E. Edwards

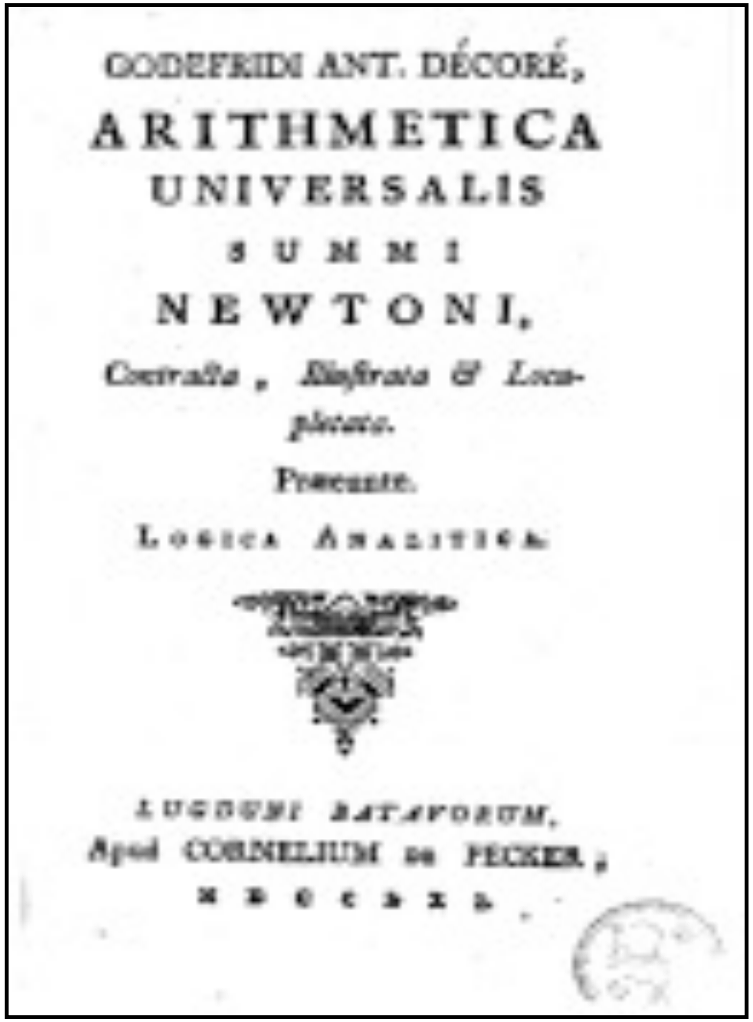
Fermat’s Last Theorem

Riemann’s Zeta Functions

Read the Master

Galois Theory

Em sua obra Arithmetica Universalis (1707), Newton escreveu fórmulas para funções simétricas elementares


GODEFRIDI ANT. DÉCORÉ,

ARITHMETICA
UNIVERSALIS
SUMMI
NEWTONI,

Contracta, Illustrata & Locupletata.

Praeeunte.

LOGICA ANALITICA.

LUGDUNI BATAVORUM,
Apud CORNELIUM DE PECKER,
MDCCLXXX.

Relações de Newton

Newton apresentou essas relações na seguinte forma:

Para equação do terceiro grau $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$

$$(every\,r) = -b \qquad (every\,r^3) = -b^3 + 3bc - 3d$$

$$(every\,r^2) = b^2 - 2c \qquad (every\,rs) = c$$

$$(every\,rst) = -d$$

Relações de Newton-Girard

Para a equação algébrica de grau *n*

$$x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_n = 0$$

Valem as relações

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_n = -b_1$$

$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + \ldots + r_{n-1} r_n = b_2$$

$$r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \ldots + r_{n-2} r_{n-1} r_n = -b_3$$

$$\ldots$$

$$r_1 r_2 r_3 \ldots r_n = (-1)^n b_n$$

Funções simétricas

Denotando por σ_k os polinômios simétri-

cos elementares, temos: $\sigma_k = (-1)^k b_k$

Teorema - Qualquer polinômio simétrico em $r_1,\ r_2, ..., r_n$ pode ser escrito como um polinômio nos polinômios simé-

tricos elementares.

Obs.: Toda função simétrica das raízes de uma equação algébrica depende só dos coeficientes dessa equação.

O discriminante

Uma função simétrica importante na teoria das equações algébricas é o discriminante $\Delta = \prod (r_1 - r_2)^2 (r_1 - r_3)^2 \ldots (r_{n-1} - r_n)^2$

A equação do segundo grau

Essa equação foi resolvida pelos babilônios por meios geométricos. Para isso utilizou-se a forma normal.

A fórmula de Bhaskara é amplamente conhecida

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Uma solução da equação do segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0$$

A soma das raízes dessa equação é

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

e o discriminante é

$$\Delta = \left(x_1 - x_2\right)^2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 - 2x_1x_2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2$$

$$\Delta = \sigma_1^2 - 4\sigma_2 = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}$$

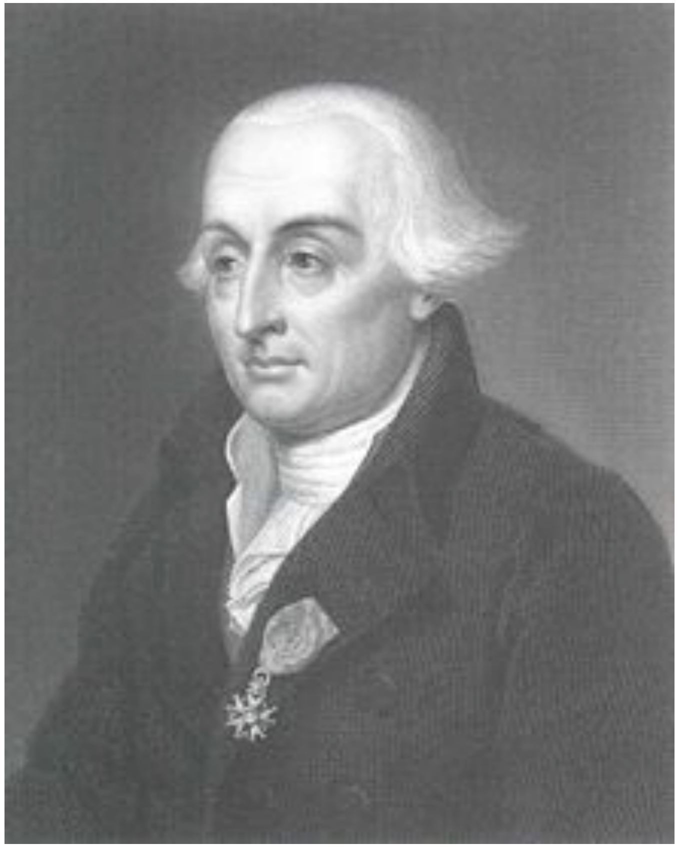
Obtemos o seguinte sistema de equações de primeira ordem

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 - x_2 = \sqrt{\Delta}$$

As funções ϕ e ϕsão as resolventes de lagrange

Joseph Louis Lagrange
Giuseppe Lodovico Lagrangia
(1736-1813)



Rélexions sur la résolution algébrique (1771). Ce mémoire a inspiré Abel et Galois.

O método de Lagrange para a equação do segundo grau

Como vimos a soma das raízes dessa equação é

$$x_1 + x_2 = -b/a$$

Com as raízes da unidade 1, $\alpha = -1$ e as raízes da equação podemos construir

$$\varphi_1 = x_1 + \alpha x_2 \quad \varphi_2 = x_2 + \alpha x_1$$

que são raízes da equação

$$\left(X - \phi_1\right)\left(X - \phi_2\right) = X^2 - \phi_1\phi_2 = X^2 + \left(\left(\alpha^2 + 1\right)x_1x_2 + \alpha\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right) = 0$$

$$X^2 + \left(\alpha^2 + 1\right)s_2X + \alpha s_1^2 = 0$$

A equação do terceiro grau

A equação do quarto grau

Para aplicarmos o método de Lagrange propomos as seguintes resolventes

$$\varphi_1 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \quad \varphi_5 = x_2 - x_1 + x_3 - x_4$$

$$\varphi_2 = x_2 - x_3 + x_4 - x_1 \quad \varphi_6 = x_1 - x_3 + x_4 - x_2$$

$$\varphi_3 = x_3 - x_4 + x_1 - x_2 \quad \varphi_7 = x_3 - x_4 + x_2 - x_3$$

$$\varphi_4 = x_4 - x_1 + x_2 - x_3 \quad \varphi_8 = x_4 - x_2 + x_1 - x_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$24 \ resolventes$$

A equação resolvente

$$\left(X-\phi_1\right)\ldots\left(X-\phi_{24}\right)=\left(X^2-\phi_1^2\right)^2\left(X^2-\phi_5^2\right)^2\left(X^2-\phi_{13}^2\right)^2=0$$

ou

$$\left(X^2-\phi_1^2\right)\left(X^2-\phi_5^2\right)\left(X^2-\phi_{13}^2\right)=0$$

Gauss

A análise de Lagrange

Abel

O grupo de Galois

A equação do quinto grau

A equação do sexto grau