

Christiaan Huygens e o pêndulo cicloidal

C. Farina

Universidade Federal do Rio de Janeiro

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE FÍSICA

Universidade Federal do Rio de Janeiro

23 de junho, 2008

Roteiro da Apresentação

- **Vida e obra**
- **Em busca de um pêndulo isócrono**
- **A cicloide e a competição de 1658**
- **A solução de Huygens**
- **O pêndulo cônico isócrono**
- **Comentários finais**

Vida e obra



Christiaan Huygens (1629-1695)

- Nascido em Haia, Holanda, C. Huygens era **matemático, físico e astrônomo**.
- Filho de Constantijn Huygens, homem de muita cultura, conhecido como poeta, latinista e matemático.
- Sua casa era frequentada por pessoas célebres, como René Descartes. (**1596-1650**).
- Desde cedo demonstrou talento para desenho e matemática (seus primeiros esforços em geometria impressionaram Descartes).
- **1645** - entra na Universidade de Leiden, onde estuda matemática e direito (por vontade de seu pai, forma-se em direito aos 22 anos).
- **1651** - primeiros escritos em matemática (seções cônicas).
- **1654** - publica “*De Circuli Magnitudine Inventa*”, que lhe dá alguma reputação.

- **1655/56** - com seu irmão, cria um novo método de polir lentes; melhores imagens ($\sim 90\times$); faz várias observações astronômicas:
 - descobre uma lua de Saturno (Titan);
 - analisa a superfície de Marte e observa a nebulosa de Orion;
 - “*De Ratiociniis in ludo aleae*” (Do cálculo no jogo de azar);
 - estuda choques elásticos (publicação somente em **1669**);
 - **desvenda o mistério de Saturno!**
- **1656** - publica o opúsculo: “*De Saturni luna observato nova*”;
o medo de estar incorreto × prioridade da descoberta faz Huygens explicar o mistério de Saturno em forma de **enigma**:

$a_7 c_5 d_1 e_5 g_1 h_1 i_7 \ell_4 m_2 n_9 o_4 p_2 q_1 r_2 s_1 t_5 u_5$

- A solução do anagrama é publicada apenas em 1659:

Saturnus cingitur annulo tenui, plano, nusquam coherente et ad eclipticam inclinato.

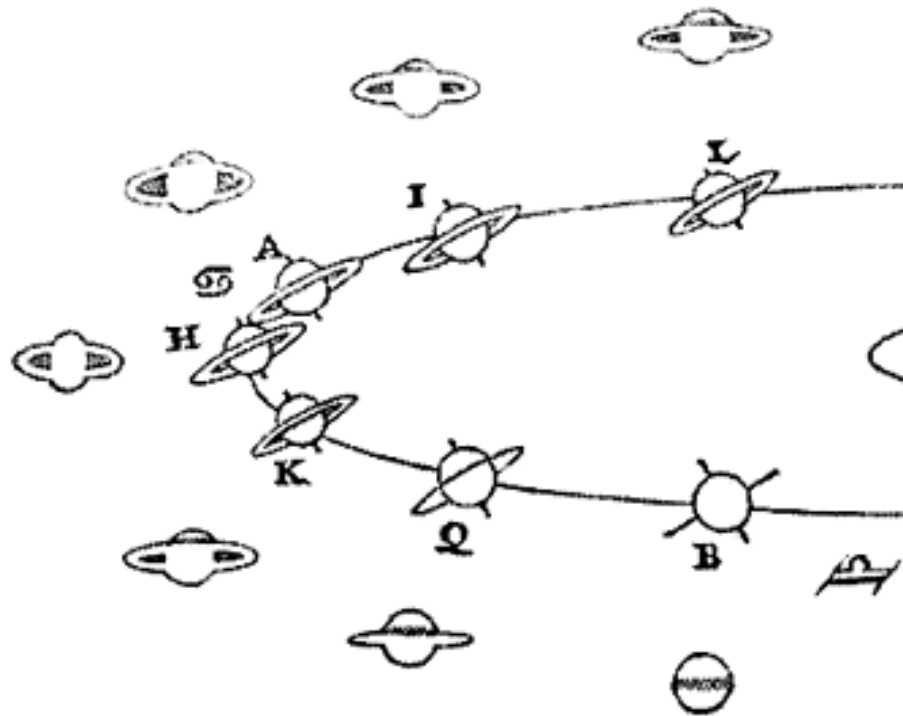
Saturno é rodeado por um anél ténue, plano, que nele não toca e que está inclinado para a eclíptica.

- 1657 - construção do 1º relógio de pêndulo (descrita em 1658.)
- Huygens esteve interessado em problemas relacionados à construção de relógios por quase 40 anos: de 1656 até 1693.
- Galileo já sugerira 1636 acoplar um contador ao pêndulo. Porém, somente em 1641 tenta fazê-lo; falece em 1642; seu filho tampouco consegue. A prioridade da patente é concedida a Huygens.
- 1658 - 4 publicações em matemática e geometria; publica “*Horologium*”, onde descreve seu invento do ano anterior.

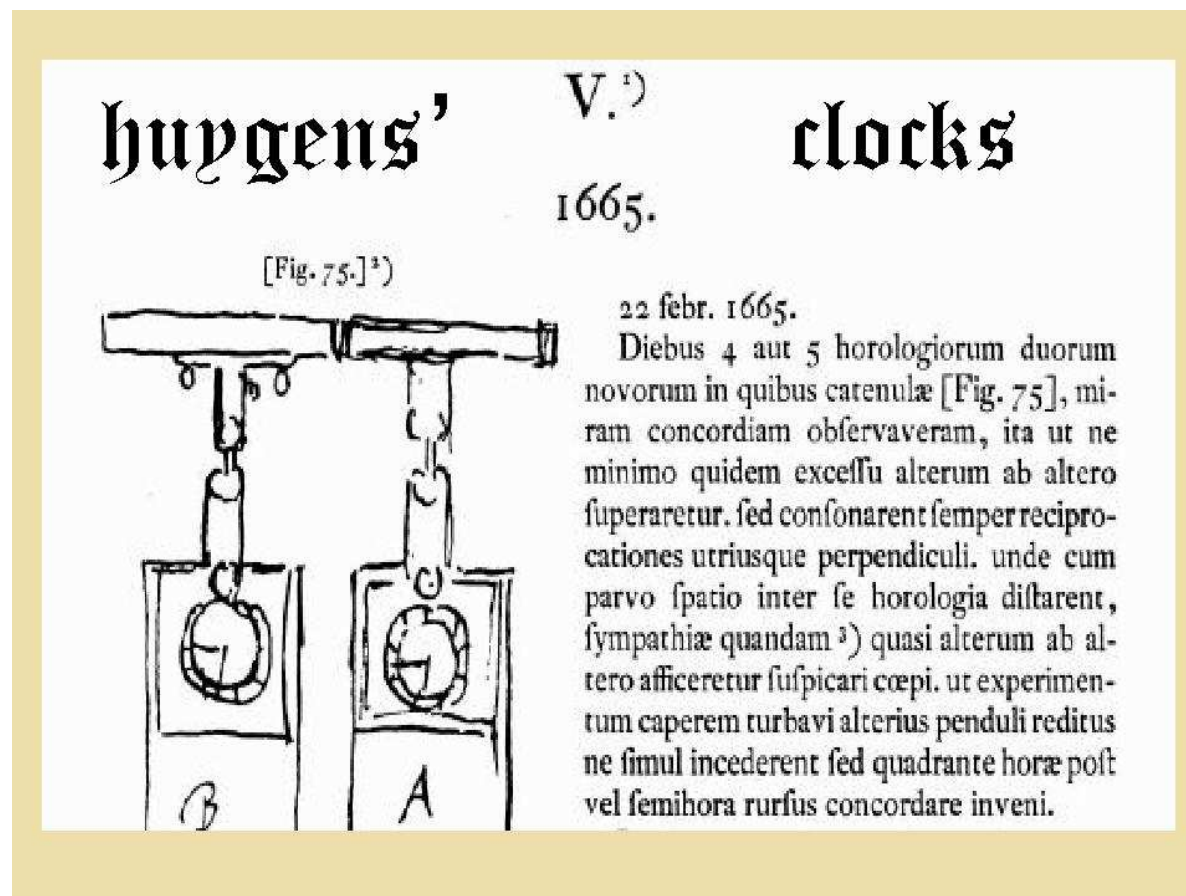
- Ainda em (1658), participa de um **concurso sobre a cicloide**; retifica a cicloide.

Obs: Fermat já retificara a parábola semicúbica e Torricelli, a espiral logarítmica (1640).

- 1659 - publica “*Systema Saturnium*”, onde descreve detalhadamente suas observações sobre o anél de Saturno:



- 1662-1670 - Huygens constrói vários cronômetros marítimos.
- 1663 - torna-se membro da Real Academia de Londres.
- 1665 - observa e descreve pela primeira vez a sincronização de dois relógios de pêndulo presos a um mesmo suporte.



- 1665 - é convidado por J.B. Colbert (ministro de Luis XIV) para fundar a Academia de Ciências de Paris.
- 1666 - membro fundador da Academia de Paris (o que lhe rende um bom salário e apartamento bem situado).
- 1666-1681 - vive em Paris (2 visitas à Holanda).
- 1669 - publicação sobre leis governando os choques elásticos.
- 1673 - uma de suas publicações mais importantes:

“Horologium oscillatorium sive do motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometriae”

(Relógio de pêndulo, ou demonstrações geométricas do movimento pendular aplicado a relógios)

CHRISTIANI
HUGENII
ZVLIHEMII, CONST. F.
HOROLOGIVM
OSCILLATORIVM
SIVE
DE MOTV PENDVLORVM
AD HOROLOGIA APERTO
DEMONSTRATIONES
GEOMETRICÆ.



PARISIIS,
Apud F. MUGENT, Regis & Illustrissimi Archiepiscopi Typographum
via Carharæ, ad insignem suam Regiam.

MDCLXXIII
CVM PRIVILEGIO REGIS.

- Conteúdo do *Horologium Oscillatorium*:
 - teoria sobre matemática das curvas;
 - determinação de evolutas de curvas;
 - período do pêndulo simples ($\tau = 2\pi\sqrt{\ell/g}$);
 - teoria sobre força centrífuga;
 - oscilação de um corpo rígido preso por eixo fixo;
 - Primeiras noções de momento de inércia;
 - **PÊNDULO CICLOIDAL** (tema central dessa palestra)
- 1675 - projeta relógio com molas, mas a prioridade é dada a R. Hooke (\sim 1660)

- 1673 - teoria ondulatória da luz (publicada em 1690). Descobre:
 - dupla refração; exp. com espato da Islândia (Calcita).
 - polarização da luz, mas não adota vibrações transversais;

Obs: Newton argumenta:

Polarização \implies Transversalidade das vibrações da luz

Transversalidade \iff incompatível com éter luminífero

Com esse argumento, refuta a teoria ondulatória da luz

- Teoria corpuscular domina por \approx um século e meio;
- Somente com **Young** e **Fresnel** a teoria ondulatória é aceita;
- Tiro de misericórdia na T. corpuscular (vel. da luz na água);
- **J.C. Maxwell:** luz como onda eletromagnética (unificação);
- **H.R. Hertz:** 1º a gerar e detectar ondas EM (1887);
- Mas, por ironia da história da ciência, ..., dualidade **onda-partícula**, surgimento da **teoria quântica**.

- 1680 - **máquinas de combustão interna** (sem sucesso);
 - utiliza vácuo obtido pelo esfriamento de produtos gasosos aquecidos para operar **bomba d'água**;
- 1681 - volta à Holanda por motivos de saúde; a morte de Colbert em 1683 e clima religioso não propício fazem com que Huygens não retorne mais a Paris;
- 1681 - apresenta para a Real Academia de Londres sua teoria de gravitação (Newton na audiência!); não admitia ação a distância.
- 1690 - publica *Traité de la lumière*; bonitas explicações para reflexão e refração. Enunciado do Princípio de Huygens:

Cada ponto de uma frente de onda no éter hipotético é interpretada como uma fonte de novas perturbações (ondículas secundárias) que se espalham esféricamente e a nova frente de onda é a envolvente de todas estas ondículas...

- 1690 - “*Discours de la cause de la pesanteur*” (gravitação);
- 1690 - última publicação sobre relógios;
- 1695 - falece em Haia; últimos anos: solidão e melancolia.

C. Huygens foi seguramente um dos maiores físicos do século XVII, século dos gênios (Galileo, Kepler, Descartes, Fermat, Pascal, Torricelli, Huygens, Hooke, Newton,...)

- Apelidado por **Newton** de “*Summus Ingenius*”;
- **Leibniz**: amigo pessoal até o fim de seus dias; considerava-se discípulo de Huygens;
- **Sommerfeld**: *Huygens foi o especialista mais brilhante em relógios de todos os tempos.*

Para Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813):

Huygens foi destinado a melhorar e desenvolver a maioria dos descobrimentos importantes de Galileo

Galileo \implies Huygens

- Telescópio ($20\times$) \implies melhorou telescópio ($92\times$);
- Luas de Júpiter \implies Lua de Saturno;
- Saturno (3 estrelas?) \implies desvendou o mistério de Saturno (anél)
- Princípio de Inércia \implies Teoria do Movimento Relativo;
- Quase chegou na $A_{cent.}$ \implies obteve a fórmula para $A_{cent.}$;
- Isocronismo do pêndulo (peq. oscil.) \implies pêndulo cicloidal;
- Sugeriu a construção de Relógios de pêndulo \implies construiu!

Em busca de um pêndulo isócrono

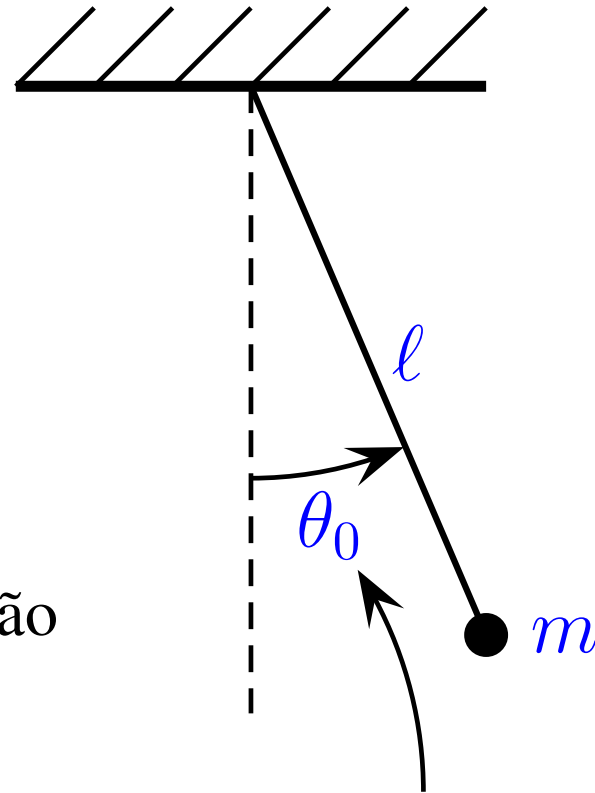
- Galileo na catedral de Pisa (aos 19 anos): oscilações de um lustre com período independente da amplitude (conta-se que teria usado o próprio pulso para medir os intervalos de tempo);

Para Galileo:

período τ não depende da amplitude de oscilação θ_0

Huygens:

percebe que isso só é verdade para pequenas amplitudes de oscilação



amplitude das oscilações

- Em 1673, Huygens relata um experimento em que

$$\frac{\tau(\pi/2)}{\tau_0} \approx \frac{34}{29} \approx 1,17$$

sendo τ_0 o período para **pequenas** oscilações.

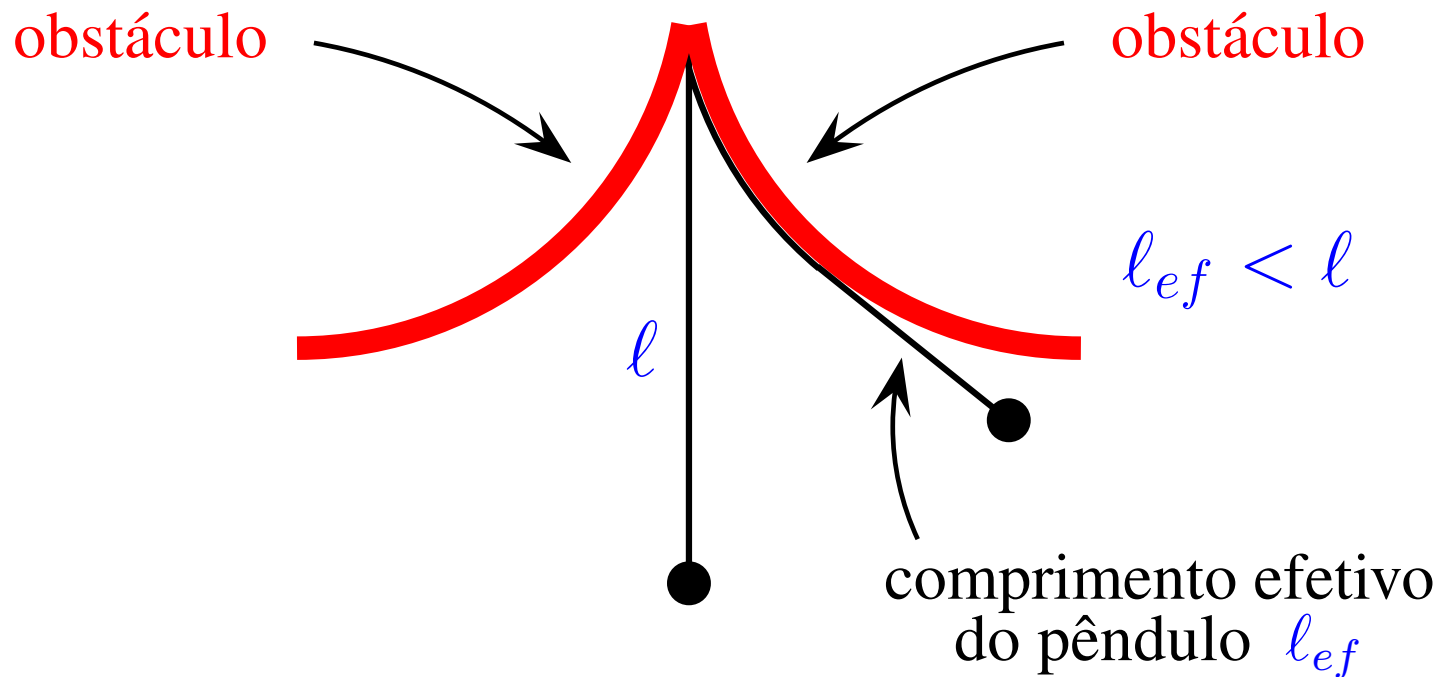
- Valor teórico exato para **qualquer** amplitude de oscilação:

$$\frac{\tau(\theta_0)}{\tau_0} = 1 + \frac{1^2}{2^2} \text{sen}^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) + \frac{1^2 \times 3^2}{2^2 \times 4^2} \text{sen}^4 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) + \dots$$

- Para valores grandes de θ_0 essa série é lentamente convergente;

$$\frac{\tau(\pi/2)}{\tau_0} \Big|_{4^{\text{a}} \text{ ordem}} \approx 1,16 ; \quad \frac{\tau(\pi/2)}{\tau_0} \Big|_{\text{serie}} \approx 2,08$$

- Medir bem o tempo significava medir bem as distâncias marítimas.
- Como as ondas do mar alteravam a amplitude dos pêndulos, Huygens decide construir um **pêndulo isócrona** e utilizá-lo num cronômetro marítimo.
- Como compensar o aumento do período para grandes oscilações?
Inserindo **obstáculos laterais!**



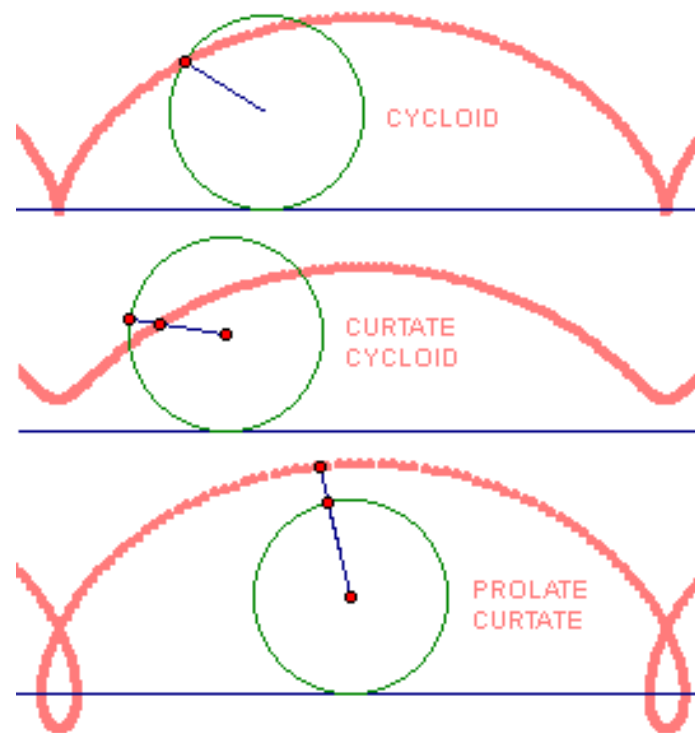
Mas que forma deve ter cada obstáculo lateral para que a diminuição do comprimento efetivo do pêndulo (ℓ_{ef}) compense o aumento de seu período (τ) com a amplitude (θ_0)?

- Huygens tentou (**em vão**) estabelecer um **método experimental** para determinar a forma dos obstáculos;
- **Desistiu da idéia em 1658**, voltando a restringir a amplitude de oscilação;
- No entanto, uma **feliz (?)** coincidência o aguardava:

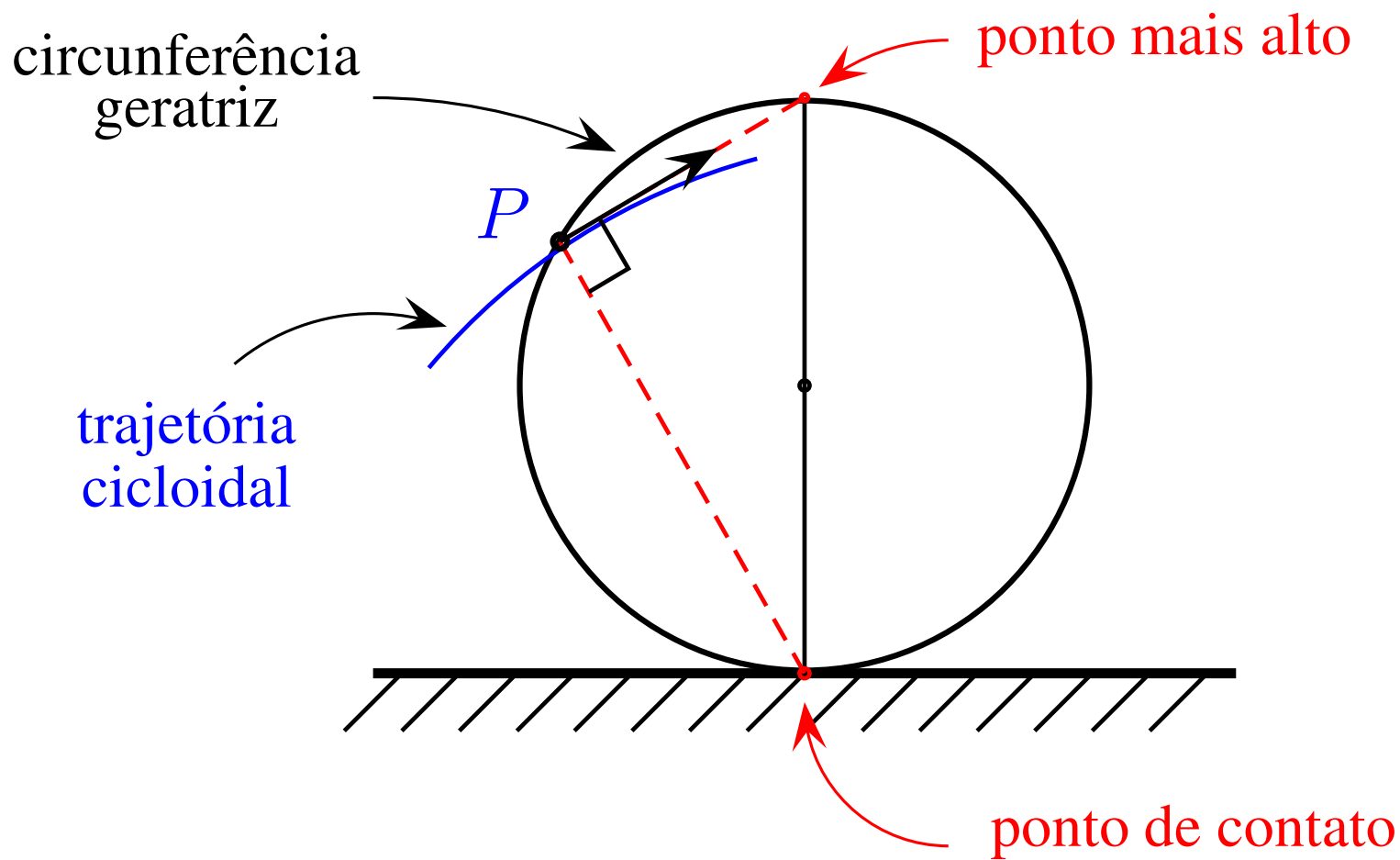
- *a dor de dente de Pascal* -

A cicloide e a competição de 1658

- A cicloide foi descoberta por Galileo (~ 1599) e, na França, independentemente, por Mersenne (*la roulette*);
- **Definição cinemática:** *um ponto P em um círculo que rola sem deslizar em uma linha reta descreve uma cicloide.*



- **Propriedade fundamental:** a reta tangente à cicloide em P passa pelo ponto mais alto da circunferência geratriz



- Em uma ocasião, Pascal escreveu:

“A cicloide é uma curva tão usual e corrente que depois da reta e da circunferência nenhuma outra curva é tão comumente encontrada. É descrita tão frequentemente diante de nossos olhos que é surpreendente que não tenha sido considerada pelos antigos..”

- Na época, havia a necessidade de novas curvas, para testar novos métodos ...
- Rapidamente, a **cicloide** se tornou popular entre os matemáticos;
- Nomes importantes relacionados à **cicloide**: Galileo, Mersenne, Roberval, Christopher Wren, Pascal, Huygens, irmãos Bernoulli (**braquistócrona**), Newton, Leibniz, Torricelli, ...

Parada para um concurso:

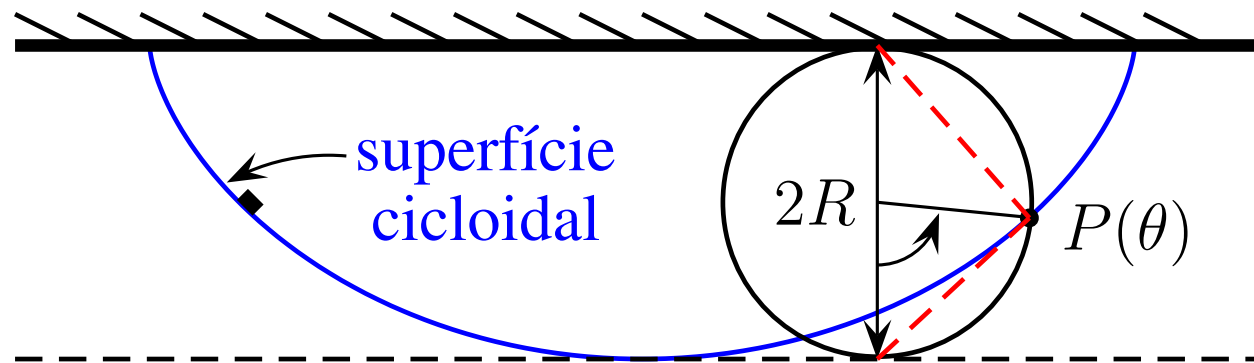
- Huygens se interessa pela cicloide graças ao convite feito por Pascal para participar de uma competição sobre a cicloide (1658);
- A origem do concurso é curiosa: *uma dor de dente de Pascal!*
- A fim de amenizar uma forte dor de dente, Pascal (1623-1662) resolve pensar em problemas sobre a cicloide propostos por **Mersenne** (*parece que a idéia funcionou!*);
- Não só resolve tais problemas como cria vários outros, que são expostos em forma de concurso (fato comum na época);
- **Huygens** resolveu 4 dos 6 problemas (no menor tempo), mas ...
- o vencedor do concurso foi **Amos Detonville** (*pseudônimo* utilizado por **Pascal**), que resolveu todos de uma forma brilhante (e com isso ganhou o concurso e o prêmio).

A solução de Huygens

- Familiarizado com a nova curva (ciclóide), Huygens decidiu verificar se ela solucionava o seu problema (pêndulo isócrona);
e deu certo!!

Procedimento de Huygens:

- Considera um corpo deslizando sobre uma superfície cícloidal **lisa**:



- Mostra inicialmente que tal corpo oscila de modo que seu período não depende da altura de onde é abandonado;

- Com isso, fica evidente que se o corpo no extremo do pêndulo descrever uma cicloide, seu período τ não dependerá da amplitude de oscilação θ_0 ;
- **Huygens** chega a esse resultado mostrando que a projeção vertical do movimento sobre a superfície cicloidal coincide com a projeção de um movimento circular uniforme auxiliar;
- Mas persiste a questão: **qual é a forma do obstáculo lateral** para que o corpo no extremo do pêndulo descreva uma cicloide?
- **Huygens** se pergunta: por que não tentar **obstáculos cicloidais**?
e deu certo novamente!!

Primeira parte da demonstração:

- Corpo parte do repouso de uma altura H ;
- Em t , o corpo se encontra em h . Como desceu $H - h$, temos

$$v^2 = 2g(H - h) \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{2g} \sqrt{H - h} \quad (1)$$



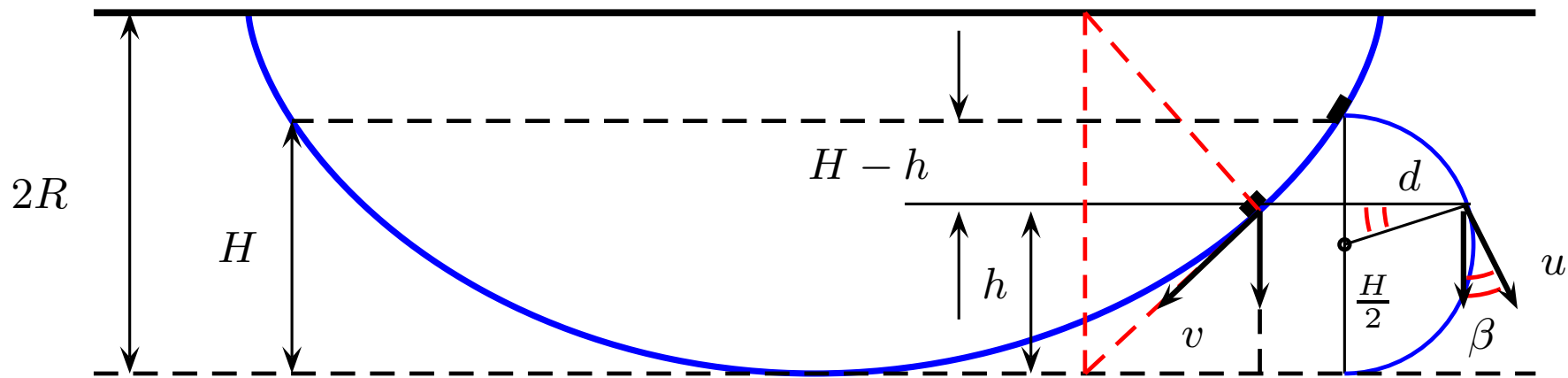
- Da figura, temos $v_{vert} = v \cos\alpha$. Usando a propriedade fundamental da cicloide, temos, também

$$(2R \cos\alpha) \cos\alpha = h \quad \Longrightarrow \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{h}{2R}} \quad (2)$$

- Substituindo (1) e (2) em na equação $v_{vert} = v \cos\alpha$, obtemos

$$v_{vert} = \sqrt{\frac{g}{R}} \sqrt{h(H-h)} \quad (3)$$

Huygens introduz um MCU auxiliar de raio $H/2$ e veloc. u (a ser ajustada convenientemente):



Da figura, temos

$$u_{vert} = u \cos\beta, \text{ onde } \cos\beta = \frac{d}{H/2} \implies u_{vert} = \frac{ud}{H/2} \quad (4)$$

- Das propriedades de triângulos retângulos, podemos escrever

$$\frac{d}{H-h} = \frac{h}{d} \implies d = \sqrt{h(H-h)} \quad (5)$$

Substituindo (5) em (4), obtemos

$$u_{vert} = \frac{u}{H/2} \sqrt{h(H-h)} \quad (6)$$

Comparando com a equação para v_{vert} , a saber,

$$v_{vert} = \sqrt{\frac{g}{R}} \sqrt{h(H-h)} \quad (7)$$

vemos que, se escolhermos

$$\frac{u}{H/2} = \sqrt{\frac{g}{R}}, \quad \text{ou seja} \quad u = \frac{H}{2} \sqrt{\frac{g}{R}}, \quad (8)$$

as projeções verticais dos 2 movimentos coincidirão!

Portanto, o intervalo de tempo desde que o corpo é abandonado até atingir o ponto mais baixo da sup. cicloidal é o mesmo que no movimento auxiliar o corpo gasta para dar meia volta:

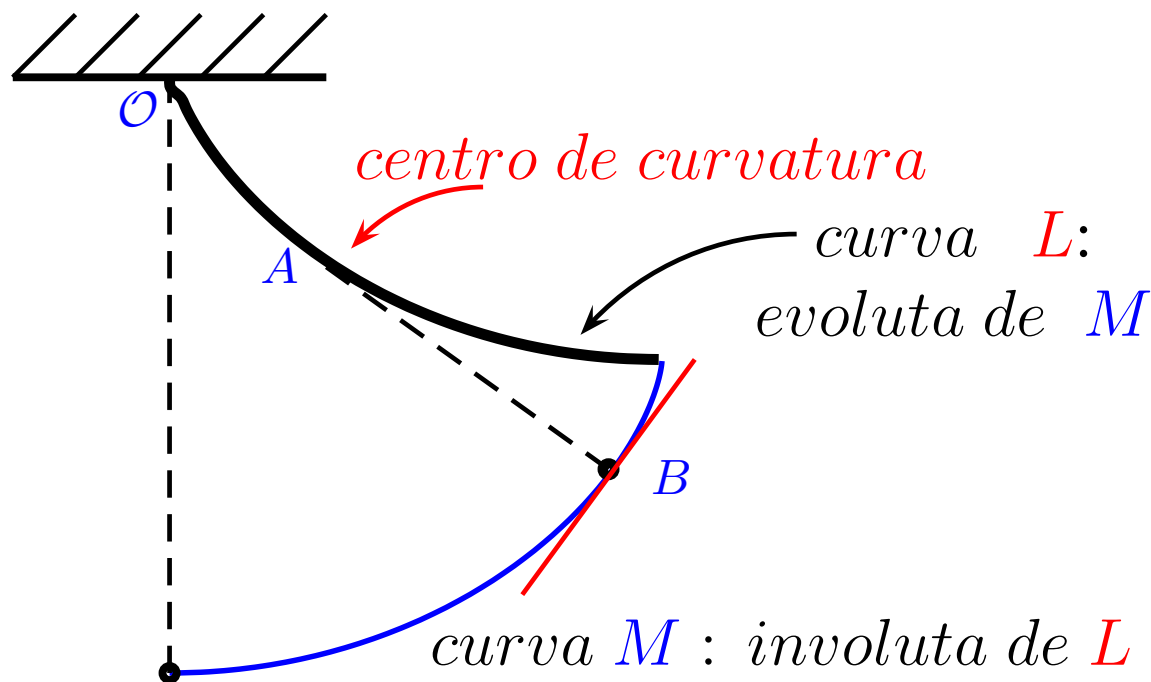
$$\frac{1}{4}\tau = \frac{\pi H/2}{u} = \frac{\pi H/2}{H/2\sqrt{g/R}} \implies \tau = 4\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \quad (9)$$

O período não depende H!

Obs: para que um pêndulo simples oscilando com pequenas amplitudes tenha esse período seu comprimento deve ser $\ell = 4R$ (esse resultado era esperado?)

Segunda parte da demonstração:

- Huygens desenvolveu a teoria das evolutas e involutas;

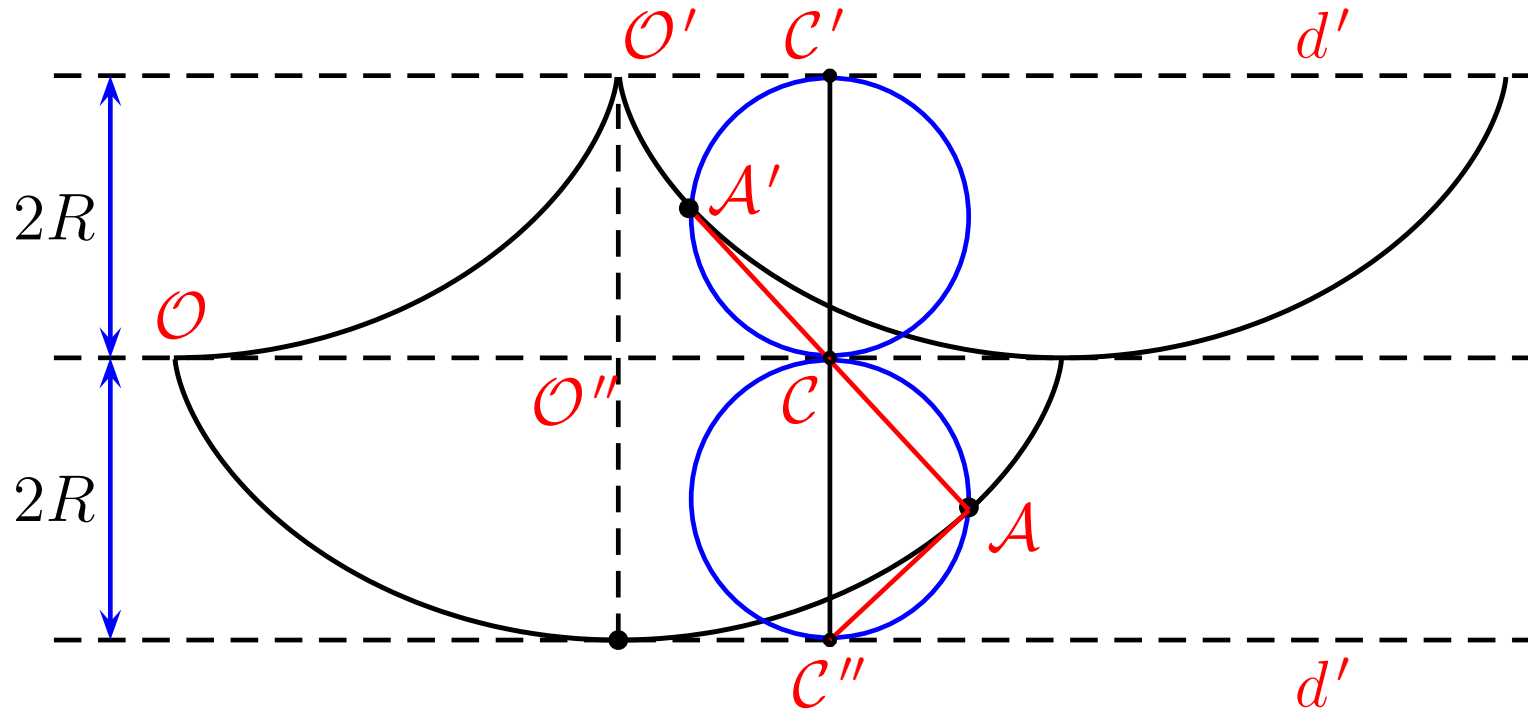


- A evoluta da curva M corresponde ao lugar geométrico dos centros de curvatura da curva M
- Dada uma curva M , só há uma evoluta para ela; no entanto, dada uma curva L , há várias involutas possíveis

Conjecturas (corretas) de Huygens:

- A reta perpendicular à curva M em B (perpendicular à reta tangente em B) é tangente à curva L em A, isto é, **as perpendiculares à curva M são tangentes à curva L**;
- Dada uma curva, **só há uma evoluta**, pois uma curva pode ser traçada a partir de suas tangentes (é a envolvente das tangentes);
- **A evoluta da cicloide é a própria cicloide**, deslocada e defasada de π rad. (Huygens foi feliz em sua suposição, pois nem sempre a evoluta de uma curva é a própria curva)

- Imaginemos que as duas geratrizes azuis girem juntas:



- A tangente em A passa por C'' e, portanto, a perpendicular em A passa por C ; a tangente em A' passa por C ; Basta mostrar, então, que $\widehat{C''CA} = \widehat{C'A'}$, ou seja, que os comprimentos de arco $\widetilde{AC''}$ e $\widetilde{A'C'}$ são iguais. Inicialmente, note que $\widetilde{A'C'} = \overline{O'C'}$; Temos tb $\widetilde{CC''A} = \overline{OC} \implies \widetilde{CC''} + \widetilde{C''A} = \overline{OO''} + \overline{O''C} \implies \widetilde{C''A} = \overline{O''C}$
 A evoluta da cicloide é a própria cicloide defasada e deslocada!

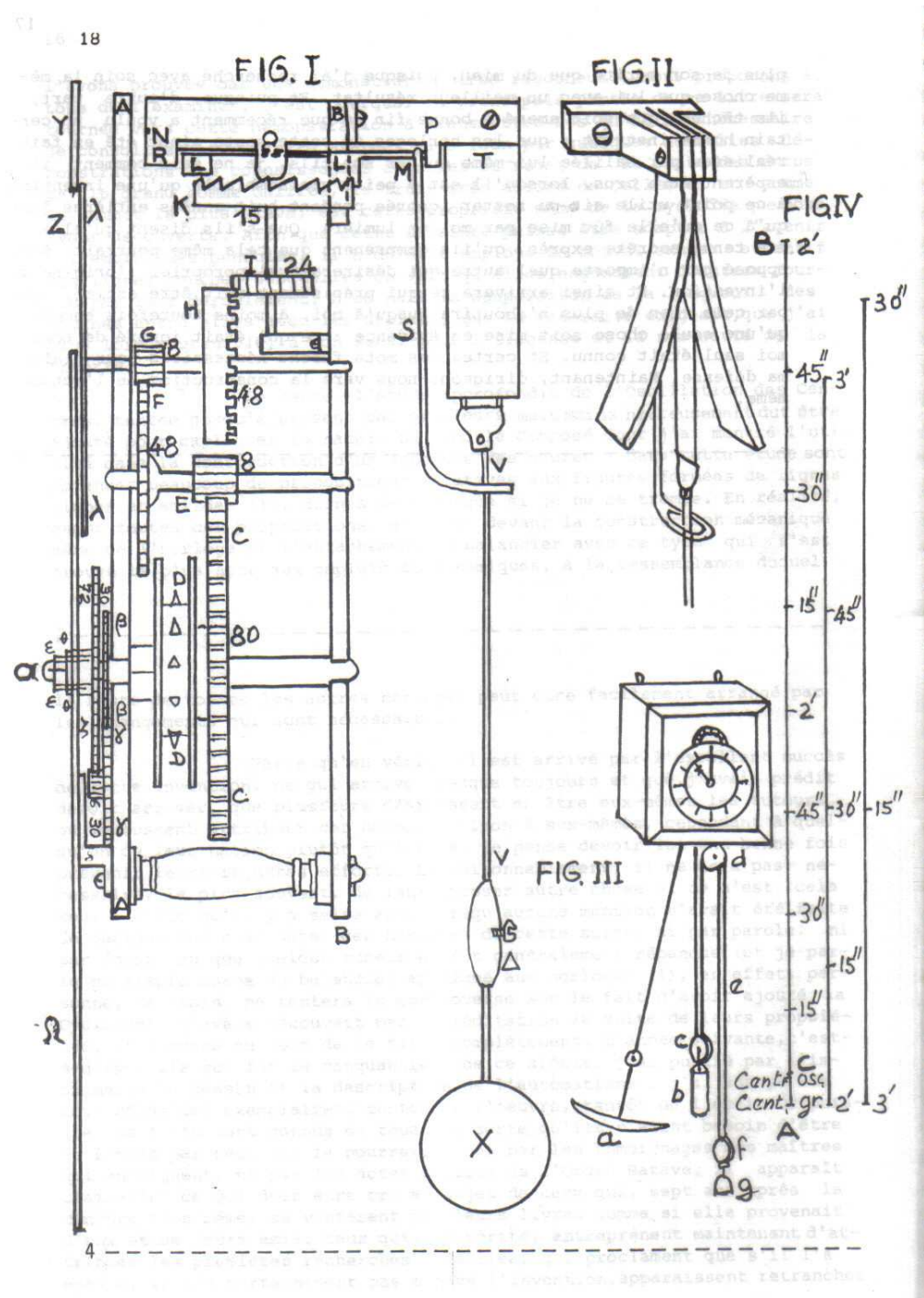
esboço de um relógio

com

pêndulo cicloidal

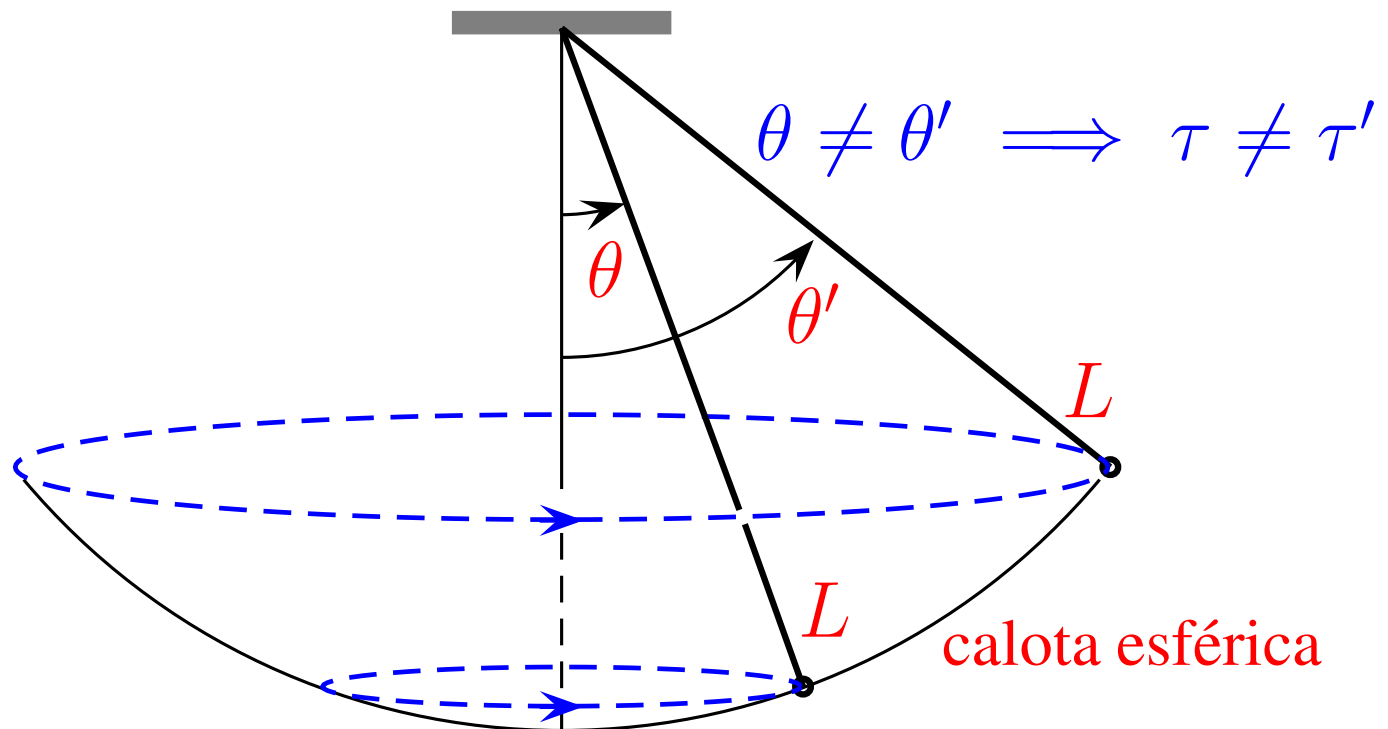
feito por Huygens

(Horologium Oscillatorium

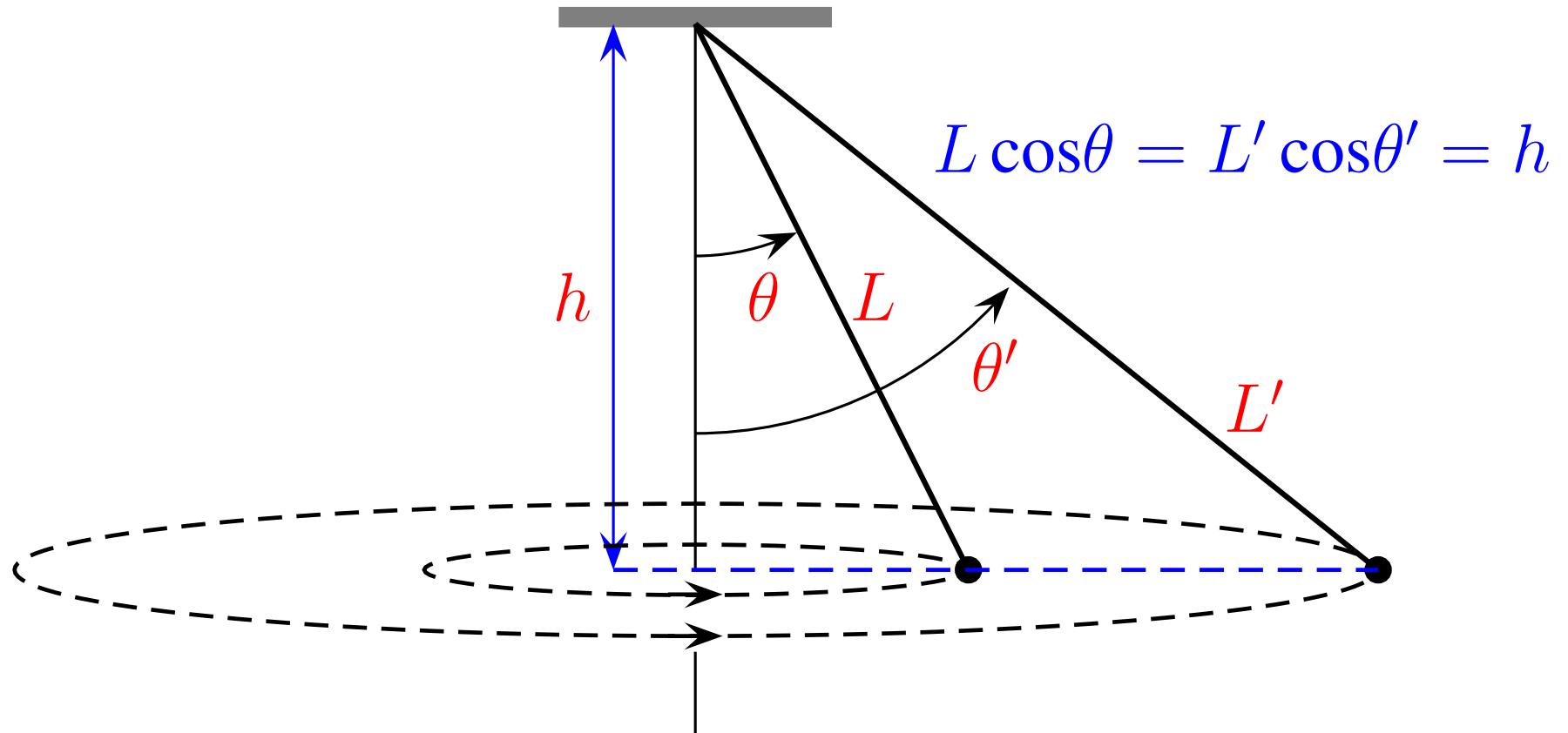


O pêndulo cônico isócrono

- pêndulo cônico **usual**: movimento análogo ao de uma partícula no interior de uma calota esférica: a **normal** faz o papel da **tensão**.
- L é o raio de curvatura do arco de círculo que gera, por revolução, a calota esférica (e **não** da trajetória da partícula)

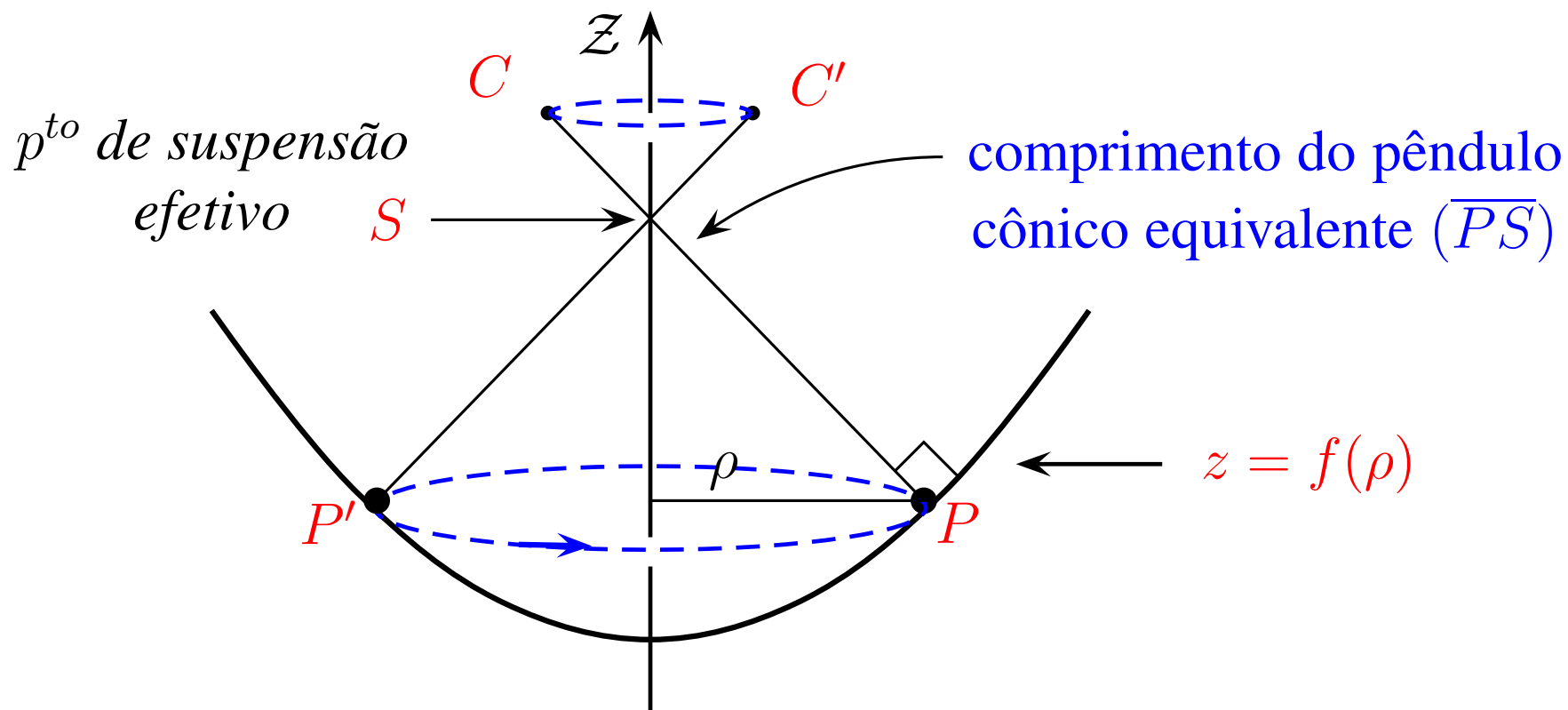


- No entanto, pêndulos diferentes podem ter períodos iguais, pois τ só depende da projeção vertical h .

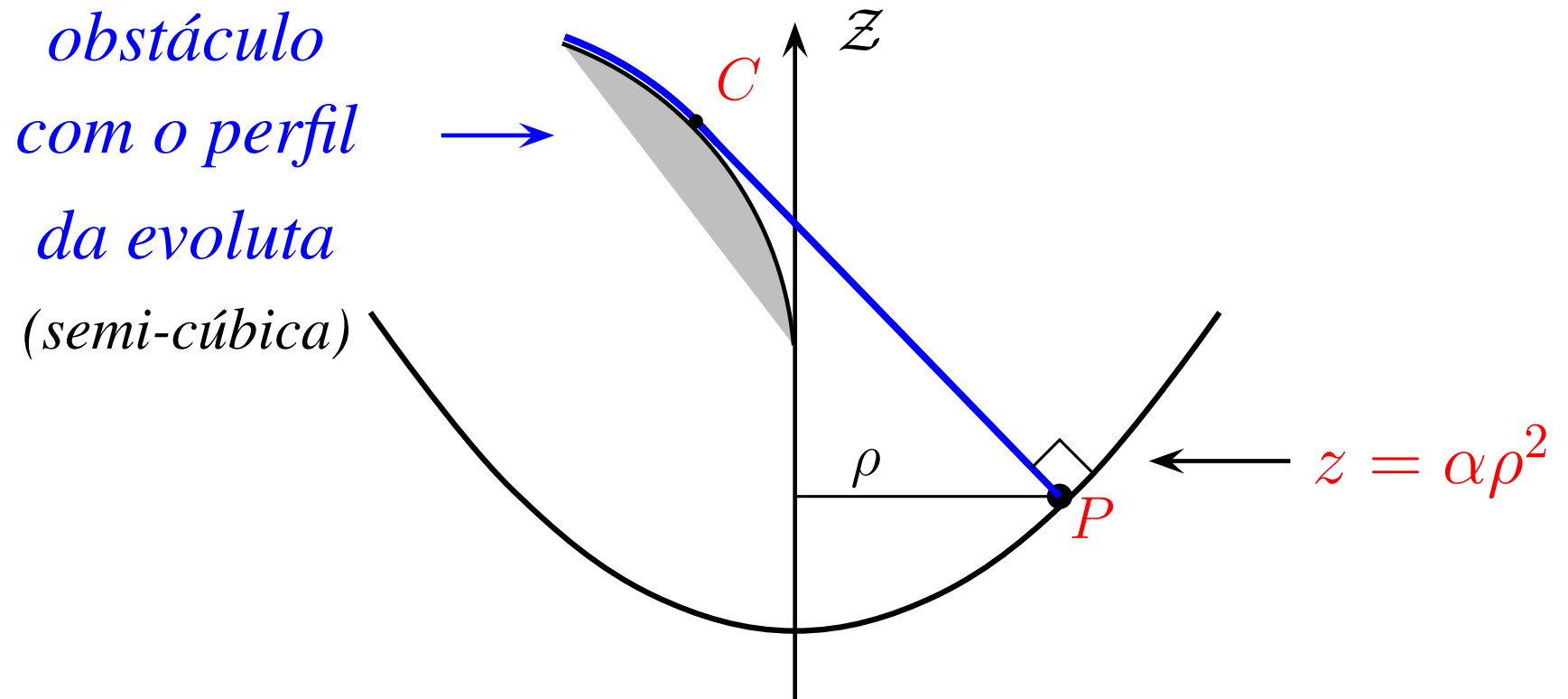


$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{L \cos \theta}{g}}, \quad \tau' = 2\pi \sqrt{\frac{L' \cos \theta'}{g}} \implies \tau = \tau' = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}$$

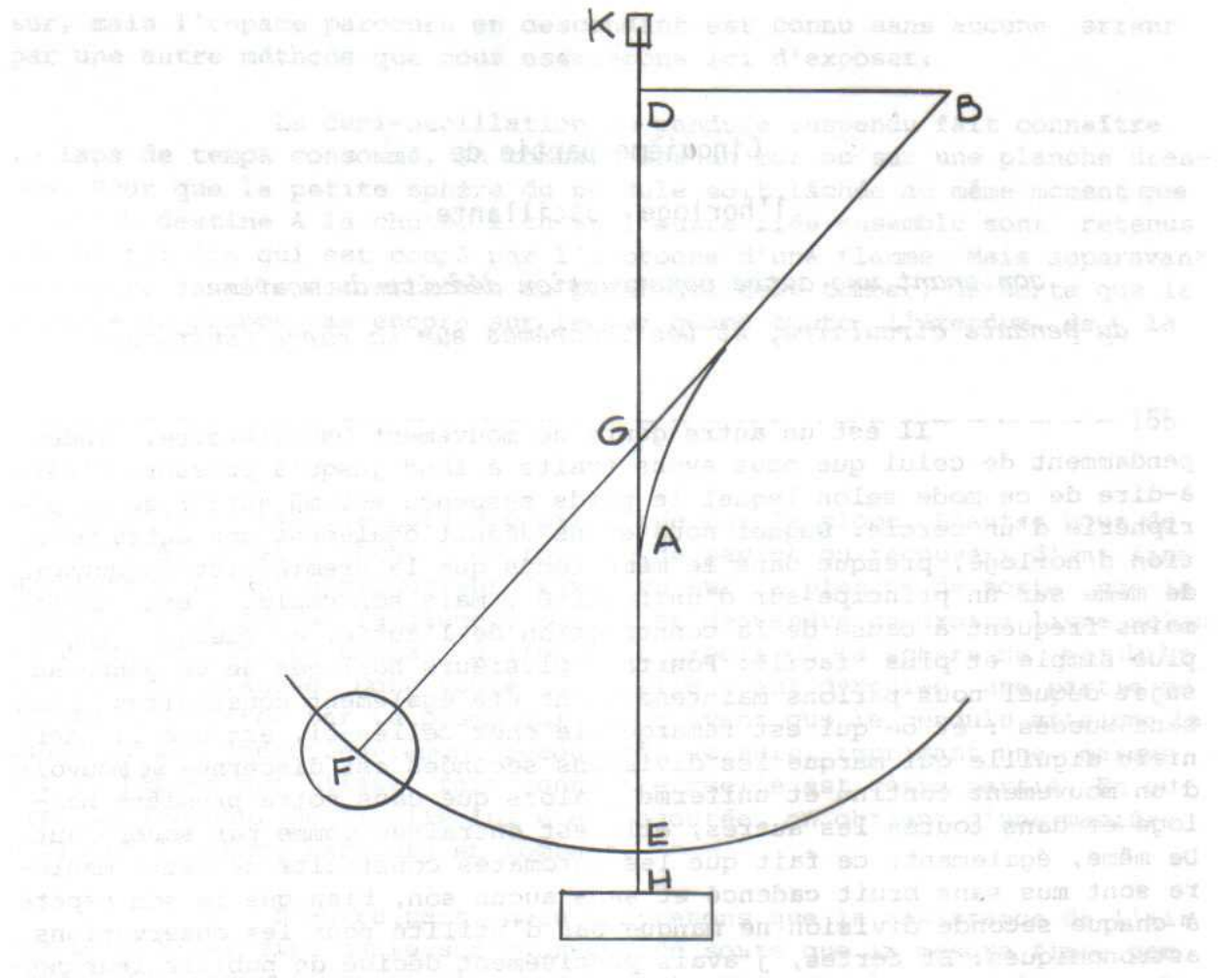
- Existe alguma superfície de revolução cuja forma faça com que os mov. circulares de uma partícula deslizando em seu interior tenham o mesmo período τ qualquer que seja o raio ρ da trajetória?
- Em caso afirmativo, ela deve ter a propriedade: a projeção vertical do comp. do pêndulo cônico equivalente deve ser cte ($\overline{PS} = Cte$).



- O **parabolóide de revolução** possui essa propriedade!
- Mas como fazer a esfera no extremo do pêndulo se mover sobre tal superfície? \implies **Evoluta da parábola** (*William Neile*, 1657)



pêndulo côm
 (descr
 Horologium C



Comentários finais

- Huygens está entre os maiores físicos e matemáticos do século XVII. Como mencionamos, mas sem entrar em detalhes, seus interesses foram bastante variados. Além dos tópicos já mencionados, poderíamos ainda aumentar a lista citando, por exemplo, o estudo da **catenária**, da **forma achatada da Terra**; e de diversas **outras curvas matemáticas**.
- Solução de Huygens \implies retificação da cicloide; comprimento de arco cicloidal $= 8R$ (um dos problemas do concurso de **1658**);
- Cicloide e a **braquistócrona** (do grego: bráquis = **menor**, cronos = **tempo**). Proposto por Jean Bernoulli em **1696** e resolvido em **1697** por ele próprio, Jacques Bernoulli, Leibniz, L'Hopital e Newton
“É pelo tamanho da pata que se reconhece o leão.”

- Solução **híbrida**: Huygens + cálculo diferencial e integral simples

$$\frac{dh}{dt} = -\sqrt{\frac{g}{R}} \sqrt{(H-h)h} \implies \int_0^{\tau/4} dt = -\sqrt{\frac{R}{g}} \int_H^0 \frac{dh}{\sqrt{(H-h)h}}$$

Não é necessário resolver a integral para mostrar que τ independe de H . Basta definir a variável **adimensional** $\xi := h/H$:

$$\tau = 4\sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^H \frac{dh}{\sqrt{(H-h)h}} = 4\sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi)\xi}}$$

Note que a dependência em H desapareceu! A integral $\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi)\xi}}$ é, simplesmente, **fator numérico**. Obviamente, se quisermos o valor do período, devemos efetuar a integração, cujo valor é π .

É difícil resumir em poucas palavras descobertas tão geniais quanto as de Huygens, mas o texto de S.S. Gindikin o faz com maestria:

“A dramática história do trabalho de Huygens é muito instrutiva. Num certo sentido, sua maior ambição não foi realizada: ele nunca teve êxito na construção de cronômetros marítimos e o pêndulo cicloidal, que Huygens considerava seu principal invento, não sobreviveu a relógios de terra (restrições na amplitude eram suficientes). O pêndulo cônico sofreu do mesmo problema. **Mas seus resultados físicos e matemáticos**, que foram motivados por problemas de aperfeiçoamento de relógios, **sobreviveram até os nossos dias**, na análise infinitesimal, geometria diferencial e mecânica, e não se pode subestimar seus significados”

S.G. Gindikin, “Tales of Physicists and Mathematicians”