

# Tópicos de Física Clássica I – Aula 9

## O teorema de Noether; constantes de movimento

a c tort

Suponha um lagrangiano associado a uma partícula que tem apenas um grau de liberdade ( $g = 1$ ):

$$L = L(q, \dot{q}, t).$$

Agora considere a transformação infinitesimal

$$\begin{aligned} q \rightarrow q' = q + \epsilon, \quad \dot{q} \rightarrow \dot{q}' = \dot{q}, \\ t \rightarrow t' = t. \end{aligned}$$

Considere agora a variação da ação clássica como consequência desta transformação

$$\Delta S = \int_{t_a}^{t_b} [L(q + \epsilon, \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t)] dt.$$

Agora, em primeira ordem em  $\epsilon$ :

$$L(q + \epsilon, \dot{q}, t) \approx L(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q} \epsilon.$$

Se impusermos a condição  $\Delta S = 0$  frente a esta transformação segue que

$$\Delta S = \int_{t_a}^{t_b} [L(q + \epsilon, \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t)] dt = \int_{t_a}^{t_b} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q} \epsilon dt = 0.$$

Como  $\epsilon$  é um deslocamento arbitrário,



Figura 1: Emmy Noether (1882 – 1935).

$$\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q} = 0.$$

Portanto, o lagrangiano não pode depender explicitamente de  $q$ , esta coordenada deve ser **ignorável** ou **cíclica**. Fazendo uso da equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} = 0,$$

logo,

$$p = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} = \text{constante de movimento.}$$

Este é um exemplo simples da obtenção de uma constante de movimento a partir de uma simetria do lagrangiano, no caso, o lagrangiano é invariante frente a uma translação fixa do sistema mecânico.

## O teorema de Noether

Dado um sistema mecânico para o qual podemos escrever uma função lagrangiana, há um modo elegante de obter suas constantes de movimento. Este modo é conhecido como **teorema de Noether**, e eis o seu enunciado [1].

Dado um sistema físico com  $g$  graus de liberdade, se a ação  $S$  for invariante frente às transformações,

$$q_i \rightarrow q'_i = q_i + \epsilon \psi_i(q_i, t), \quad (1)$$

e

$$t \rightarrow t' = t + \epsilon \chi(q_i, t), \quad (2)$$

onde  $\epsilon$  é um parâmetro infinitesimal, e  $\psi$ ,  $\chi$  são funções de  $g + 1$  variáveis reais<sup>1</sup>, então a quantidade

$$\sum_{i=1}^g \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\dot{q}_i \chi - \psi_i) - \chi L, \quad (3)$$

é uma constante de movimento.

Vejamos como o teorema deve ser aplicado com alguns exemplos. A demonstração pode ser estudada na referência [1].

**Exemplo 1** A integral de Jacobi Fazendo  $\psi_i = 0$ , e  $\chi = 1$ , temos

$$\dot{q}'_i = \dot{q}_i, \quad \chi = 1, \quad \Rightarrow \quad t' = t + \epsilon,$$

isto é, a transformação infinitesimal corresponde a um deslocamento temporal. Neste caso, o teorema de Noether – Eq. (3) – nos dá

$$h = \sum_{i=1}^g \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L, \quad (4)$$

que é conhecida como **função energia** ou **integral de Jacobi**. Quando não houver vínculos impostos sobre o sistema ou estes forem **escleronômicos**, isto é: independentes do tempo, e o **potencial for independente das velocidades generalizadas**, a integral de Jacobi pode ser identificada como a energia mecânica do sistema, vejamos o exemplo a seguir. ■

**Exemplo 2** Considere o lagrangiano associado com um oscilador harmônico simples:

$$L = \frac{m \dot{q}^2}{2} - \frac{\kappa q^2}{2}.$$

---

<sup>1</sup>Lembre-se que  $g = 3N - k$  e o tempo  $t$  é uma variável real.

Neste caso,

$$h = m \dot{q}^2 - \frac{m \dot{q}^2}{2} + \frac{\kappa q^2}{2} = \frac{m \dot{q}^2}{2} + \frac{\kappa q^2}{2}.$$

Este é um exemplo em que a  $h = E =$  energia mecânica do sistema. ■

**Exemplo 3** *Translações euclidianas: o momento linear ordinário como constante de movimento.* Considere um sistema de  $N$  partículas. O lagrangiano correspondente se escreve

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{v}_j^2 - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N).$$

Suponha que o potencial dependa das posições relativas  $\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_k$ , isto é:

$$U = U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_N; \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_N; \dots; \mathbf{r}_{N-1} - \mathbf{r}_N).$$

Neste caso, a energia cinética, o potencial e logo, o lagrangiano, são invariantes frente a uma translação infinitesimal rígida de todo o sistema:

$$\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \epsilon \hat{\mathbf{n}}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Como  $t' = t$ , segue que  $\chi = 0$ . O teorema de Noether agora se escreve:

$$C = - \sum_{i=1}^{3N} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \psi_{xi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \psi_{yi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \psi_{zi} \right).$$

Mas,  $\psi_{xi} = n_x$ ,  $\psi_{yi} = n_y$ , e  $\psi_{zi} = n_z$ , onde  $n_x$ ,  $n_y$ , e  $n_z$  são as componentes cartesianas de  $\hat{\mathbf{n}}$ . Portanto,

$$C = - \sum_{i=1}^{3N} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} n_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} n_y + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} n_z \right) = - \left( \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

Como  $\hat{\mathbf{n}}$  é um vetor unitário (arbitrário) constante, segue,

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} = \sum_{i=1}^{3N} \mathbf{p}_i = \mathbf{P},$$

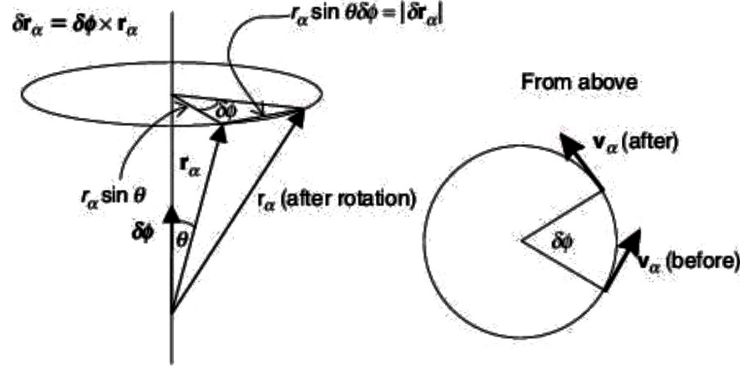


Figura 2: Rotação rígida.

é uma constante vetorial de movimento. O vetor  $\mathbf{P}$  é o momento total do sistema de  $N$  partículas. ■

**Exemplo 4** *Momento angular de um sistema de  $N$  partículas* Considere novamente um sistema de  $N$  partículas e o lagrangiano correspondente

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{v}_j^2 - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N).$$

Suponha agora que todo o sistema sofra uma rotação rígida  $\delta\boldsymbol{\theta}$ , suponha também que o potencial dependa somente da distância relativa entre as partículas:

$$U = U(\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|, \dots, \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_N\|; \|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3\|, \dots, \|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_N\|; \dots; \|\mathbf{r}_{N-1} - \mathbf{r}_N\|).$$

$$\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \epsilon \delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Neste caso, o lagrangiano será rotacionalmente invariante, e como  $\chi = 0$ , o teorema de Noether nos leva a

$$C = - \sum_{i=1}^{3N} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \psi_{xi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \psi_{yi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \psi_{zi} \right),$$

mas agora,  $\psi_{xi} = (\delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_i)_x$ ,  $\psi_{yi} = (\delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_i)_y$ , e  $\psi_{zi} = (\delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_i)_z$ . Portanto, podemos escrever

$$C = - \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \cdot (\delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_i) = - \sum_{i=1}^{3N} \mathbf{p}_i \cdot (\delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_i).$$

Usando a propriedade cíclica do produto misto;

$$C = -\delta\boldsymbol{\theta} \cdot \sum_{i=1}^{3N} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = -\delta\boldsymbol{\theta} \cdot \sum_{i=1}^{3N} \boldsymbol{\ell}_i,$$

onde  $\boldsymbol{\ell}_i$  é o momentum angular da  $i$ -ésima partícula. Como  $\delta\boldsymbol{\theta}$  é arbitrário, segue que

$$\sum_{i=1}^{3N} \boldsymbol{\ell}_i = \mathbf{L} = \text{constante de movimento.}$$

■

Observe que nos dois últimos exemplos em nenhum momento invocamos a Terceira Lei (Ação e Reação) para obter as leis de conservação dos *momenta* linear e a angular. As constantes de movimento (também chamadas **leis de conservação**): energia, momentum linear e momentum angular decorrem das simetrias contínuas do lagrangiano. Observe que essas simetrias não são simetrias geométricas do sistema físico em questão: são simetrias do formalismo que descreve a dinâmica do sistema. Uma rocha amorfa (isto é: uma coleção de  $N$  partículas) que gira em torno de um eixo fixo terá seu momento angular conservado se o lagrangiano que a descreve for invariante frente a uma rotação rígida infinitesimal.

## Apêndice: a notação de Landau-Lifshitz

É conveniente introduzir a notação de Landau-Lifshitz [5]. Considere um sistema de partículas descrito por coordenadas cartesianas. Para cada uma dessas partículas:

$$\mathbf{r}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha), \quad \alpha = 1 \dots N. \quad (5)$$

$N$  é o número de partículas do sistema. Da mesma forma

$$\mathbf{v}_\alpha = (\dot{x}_\alpha, \dot{y}_\alpha, \dot{z}_\alpha), \quad \alpha = 1 \dots N. \quad (6)$$

O lagrangiano se escreve

$$L = L(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N; t), \quad (7)$$

ou, concisamente

$$L = L(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha; t), \quad \alpha = 1 \dots N. \quad (8)$$

As equações de Euler-Lagrange se escrevem

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1 \dots N, \quad (9)$$

que significa três equações de Euler-Lagrange para cada valor de  $\alpha$

$$\frac{\partial L}{\partial x_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} = 0; \quad \alpha = 1 \dots N; \quad (10)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_\alpha} = 0; \quad \alpha = 1 \dots N; \quad (11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_\alpha} = 0; \quad \alpha = 1 \dots N. \quad (12)$$

Um modo mais conciso:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial L}{\partial y_\alpha} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial L}{\partial z_\alpha} \hat{\mathbf{z}}. \quad (13)$$

Da mesma forma

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_\alpha} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_\alpha} \hat{\mathbf{z}}. \quad (14)$$

## Referências

- [1] N. A. Lemos *Mecânica Analítica* (Livraria da Física Editora; São Paulo) 2004.
- [2] H. Goldstein, C. Poole, & J. Safko *Classical Mechanics* 3rd edition. (Addison-Wesley; New York) 2002.
- [3] J. B. Marion, & S. T. Thornton *Classical Dynamics of Particles and Systems* 5th edition. (Thomson Brooks/Cole; Belmont) 2004.
- [4] P. Hamill *A Student's Guide to Lagrangians and Hamiltonians* (Cambridge University Press; Cambridge) 2014.
- [5] L. D. Landau & E. M. Lifshitz *Mechanics: Course of Theoretical Physics Volume 1* 3rd edition (Butterworth-Heineman; Oxford) 1976.