Tópicos de Física Clássica I – Aula 8
Vínculos holonômicos, coordenadas e velocidades generalizadas; graus de liberdade; momento canônico; espaços de configuração e de fase; Princípio de Hamilton; forças de vínculo

a c tort

Vínculos holonômicos

Vínculos são limitações impostas *a priori* sobre os movimentos de um corpo. Na mecânica newtoniana, os vínculos são expressos por meio das forças de vínculo. Em alguns casos essas forças são fáceis de ser determinadas, como é o caso de um bloco que desliza sobre um plano inclinado fixo no qual a condição de que o bloco não abandone o plano é garantida pela força normal. No entanto, se o plano inclinado for substituído por uma superfície fixa curva, determinar a força de vínculo é uma tarefa mais árdua. Os vínculos são sempre limitações cinemáticas impostas ao sistema mecânico e devem ser levados em conta ao formular a dinâmica do sistema em estudo. *Restrições dinâmicas não são vínculos!* Por exemplo, em consequência da conservação do momentum angular em um campo de forças central, o movimento de um corpo restringe-se ao plano, mas isto não caracteriza um vínculo [4].

Exemplo 1 *Partícula constrangida a mover-se sobre uma esfera de raio R.*

Neste caso, x, y e z não são independentes e satisfazem

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

■

De modo geral, quando o movimento de um corpo é restrito a uma superfície fixa, a condição de vínculo se escreve:

$$f(x, y, x) = 0. \tag{1}$$

Observe que os vínculos acima não dependem do tempo. Se a superfície for móvel ou deformável, o vínculo dependerá do tempo, isto é:

$$f(x, y, z, t) = 0. \tag{2}$$

Vínculos que envolvem apenas as cooordenadas e o tempo são chamados **holonômicos** ou **holônomos** (do grego *holos*=inteiro; *nomos*=regra, lei). Se a equação que descreve o vínculo holonômico depender explicitamente do tempo este será dito **reonômico**, este é o caso de um corpo que deve mover-se sobre uma superfície ou reta em movimento. Se a equação que descreve o vínculo não depende do tempo este é dito ser **escleronômico**, (do grego *scleros*=duro, e *nomos=regra, lei*).

Exemplo 2 Considere uma conta de colar que se move sobre um fio tensionado que gira com uma velocidade angular constante ω. O movimento se dá no plano e podemos usar as coordenadas plano-polares r e θ. O lagrangiano se escreve

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right).$$

■

O vínculo se escreve:

$$\dot{\theta} - \omega = 0,$$

que pode ser integrado e escrito como:

$$G(\theta, t) = \theta - \omega t + \theta_0 = 0.$$

Este vínculo é holonômico e reonômico. Este exemplo será mais bem explorado mais adiante.

Coordenadas e velocidades generalizadas; graus de liberdade

Coordenadas e velocidades generalizadas

As coordenadas necessárias para definir a posição de uma ou mais partículas não precisam ser obrigatoriamente coordenadas cartesianas. A natureza do problema pode exigir coordenadas mais convenientes. Por exemplo, em um problema com simetria esférica é mais convenientes que utilizemos coordenadas esfŕicas. Quaisquer quantidades $q_1, q_2, q_3, ..., q_s$, que descrevam as posições das partículas do sistema, onde s é o número de graus de liberdade, servem e essas quantidades são chamadas **coordenadas generalizadas**. As derivadas em relação ao tempo dessas quantidades, $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, ..., \dot{q}_s$, são chamadas **velocidades generalizadas**.

Graus de liberdade

Graus de liberdade de um sistema é o conjunto de coordenadas generalizadas independentes necessárias para descrevê-lo completamente. O número de graus de liberdade g é igual ao número de coordenadas usadas para descrever o sistema, $3N$, onde N é o número de partículas, menos o número de equações de vínculo. k:

$$g = 3N - k.$$

Exemplo 3 *O pêndulo ideal*

Para descrever as oscilações no plano de um pêndulo simples são necessárias a princípio duas coordenadas, digamos $q_1 = x$ e $q_2 = y$, ou se preferirmos $q_1 = r$ e $q_2 = \theta$. Mas temos um vínculo holonômico (e escleronômico) que as relaciona: o comprimento ℓ do pêndulo deve ser constante, logo:

$$x^2 + y^2 - \ell^2 = 0.$$

ou se estamos usando coordenadas plano-polares:

$$r = \ell = \text{constante}.$$

Portanto o número de graus de liberdade neste exemplo é 1. ■

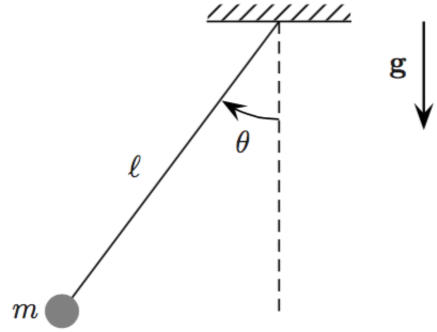

Figura 1: Pêndulo simples, um grau de liberdade.

Exemplo 4 *A máquina de Atwood*

O vınculo holonômico é o comprimento do fio que une as duas massas:

$$x_1 + x_2 + \ell_R - \ell = 0,$$

isto significa que o sistema tem apenas um grau de liberdade. ■

Exemplo 5 *O rotor rígido*

Um rotor rígido é formado por uma haste de massa nula, comprimento fixo ℓ, e duas massas puntiformes presas nas extremidades da haste. A equação de vínculo (holonômico) se lê:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 - \ell^2 = 0. \quad (3)$$

Em princípio, o número de coordenadas necessárias para descrever o sistema é seis (três para cada partícula), $q_1 = x_1$, $q_2 = y_1$, $q_3 = z_1$, $q_4 = x_2$, $q_5 = y_2$, $q_6 = z_2$, mas como temos uma equação de vínculo, o número de graus de liberdade g, isto é: o número de coordenadas realmente necessárias para descrever o sistema é

$$g = 6 - 1 = 5.$$

Observe que este vínculo é escleronômico. ■

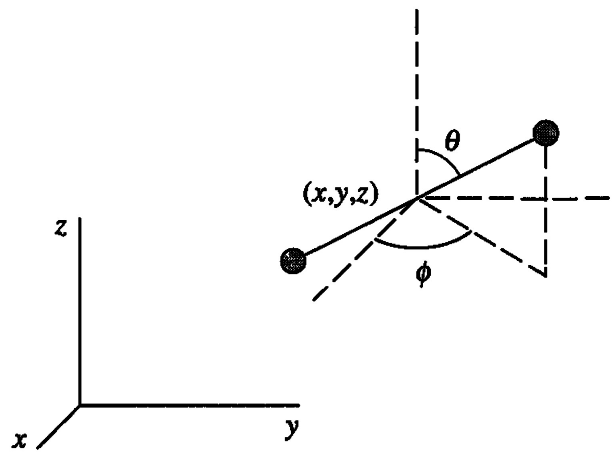

Figura 2: O rotor rígido tem cinco graus de liberdade.

Espaço de configuração

A especificação das posições das partículas que constituem o sistema é dita **configuração** do sistema mecânico. Se tivermos N partículas livres, a configuração do sistema é caracterizada por um ponto P em um espaço de $3N$ dimensões, dito **espaço de configuração**. As coordenadas (generalizadas) deste ponto são dadas por

$$P = (q_1, q_2, q_3, ..., q_{3N}).$$

Se houver equações de vínculo entre as coordenadas, vínculos holonômicos, um ponto P será caracterizado por $3N - k$ coordenadas,

$$P = (q_1, q_2, q_3, ..., q_{3N-k}).$$

O espaço de configuração pode ser pensado como um um híperespaço cartesiano cujos eixos são as coordenadas generalizadas $q_1, q_2, ..., q_{3N}$, em outros dizeres, o espaço de configuração é uma variedade. Os vínculos holonômicos definem superfícies neste espaço sobre as quais o movimento do sistema acontece.

Exemplo 6 Considere uma partícula que descreve um movimento circular de raio R. Neste caso, o espaço de configuracão tem duas dimensãoes

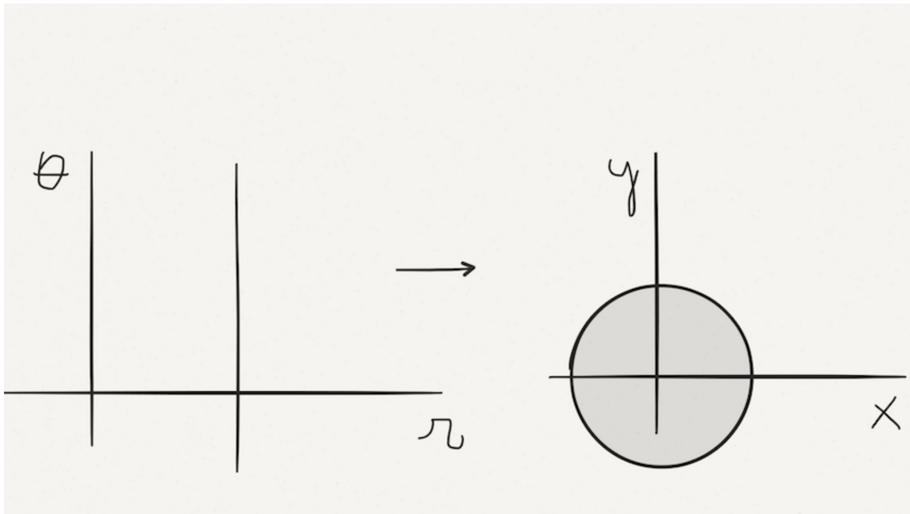

Figura 3: Espaços de configuração de um partícula em movimento circular.

cartesianas. Se no eixo horizontal corresponder à coordenada angular θ e o vertical à coordenada radial r, a trajetória do sistema mecânico será uma reta correspondente a $r = R$; $\forall\theta$, isto é a restrição obriga a sistema a evoluir sobre uma reta ("superfície"). Se fizermos a transformação de coordenadas plano-polares (r, θ) para cartesianas (x, y), no novo espaço de configuração a trajétoria é um círculo e o vínculo obriga o sistema a permanecer sobre ele. ■

Princípio de Hamilton

Eis então a formulação moderna da mecânica analítica. Considere um sistema mecânico para o qual podemos definir a sua energia cinética T e a sua energia potencial U. A função de Lagrange do sistema ou **lagrangiana** é definida por

$$L = \text{energia cinética} - \text{energia potencial} = L\left[q_i(t), \dot{q}_i(t); t\right], \qquad (4)$$

onde q_i com $i = 1...N$ são as coordenadas apropriadas para resolver o problema em tela, as *coordenadas generalizadas*. Na notação que adotaremos $\dot{q} \equiv dq/dt$. Façamos as substituições:

$$x \to t;$$

$$y(x) \to q(t);$$
$$\frac{d}{dx} \to \frac{d}{dt};$$
$$y'(x) \to \dot{x}(t).$$

A **ação clássica** é definida pela integral

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L\left[q_i(t), \dot{q}_i(t); t\right]\, dt, \tag{5}$$

onde $L = T - U$. O **Princípio de Hamilton** afirma que

> *De todos as trajetórias possíveis ao longo dos quais um sistema dinâmico pode mover-se de um ponto a outro de modo consistente com os vínulos e em um intervalo de tempo fixo $\Delta t = t_b - t_a$ com $t_b > t_a$, a trajetória realmente seguida é aquela que extremiza a integral da diferença entre a energia cinética e a energia potencial no intervalo Δt.*

$$\delta S = \delta \int_{t_a}^{t_b} (T - U)\, dt = \int_{t_a}^{t_b} \delta L\left[q_i(t), \dot{q}_i(t); t\right]\, dt = 0. \tag{6}$$

As **equações de Euler-Lagrange** correspondentes se escrevem:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \qquad i = 1...3N. \tag{7}$$

As equações de Euler-Lagrange podem ser obtidas de uma forma mais econônmica se fizermos uso da notação δ.

$$\delta L = \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\, \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\, \delta \dot{q}_i \right). \tag{8}$$

Lembrando que $\delta \dot{q}_i = dq/dt$, e integrando o segundo termo do lado direito por partes nos levarão às equações de Euler-Lagrange.

Momentum generalizado

Por definição, a i-ésima componente do momento canônico ou momento generalizado é dada por:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Espaço de fase

Se tivermos N partículas que não estão submetidas a quaisquer condições de vínculo, o **espaço de fase** é um espaço de $6N$ dimensões. Um ponto Q nesse espaço representa todo um sistema dinâmico, e suas coordenadas são

$$Q = (q_1, q_2, q_3, ..., q_{3N}; p_1, p_2, p_3, ..., p_{3N}).$$

Exemplo 7 A energia mecânica de um oscilador harmônico simples se escreve

$$E = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{\kappa q^2}{2} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2},$$

pois,

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}.$$

A equação acima pode ser rescrita na forma

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 1,$$

onde $a = \sqrt{2mE}$, e $b = \sqrt{2mE}/(m\omega)$, logo o oscilador descreve uma elipse no espaço de fase. ■

As equações de Euler-Lagrange com vínculos holonômicos: forças de vínculo generalizadas

Se sobre o sistema mecânico que estamos estudando impusermos condições de vínculo envolvendo as coordenadas generalizadas e, possivelmente, o tempo, isto é:

$$G(q_1, q_2, q_3, ..., q_{3N}) = 0, \quad \text{ou} \quad G = (q_1, q_2, q_3, ..., q_{3N}; t) = 0$$

No primeiro caso o vínculo é dito **holonômico e escleronômico**, e no segundo, **holonômico e reonômico**. Usando os resultados da **Aula 7**, rescrevemos as equações de E-L com os multiplicadores de Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \lambda(t)\,\frac{\partial G}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1...N. \tag{9}$$

As forças (generalizadas) de vínculo são definidas por:

$$f_i = \lambda(t)\,\frac{\partial G}{\partial q_i}. \tag{10}$$

Vejamos alguns exemplos concretos.

Exemplo 8 *O yo-yo* Considere um cilindro de massa M e raio R em queda vertical como mostrado na Figura. Um barbante enrolado em torno do disco e com a extremidade presa a um suporte fixo vai desenrolando-se à medida que o cilindro cai. Não há deslizamento. Queremos determinar a aceleração do centro de massa do cilindro, a sua aceleração angular e a tensão na corda e o torque sobre o cilindro.

<u>SOLUÇÃO</u> A energia cinética do cilindro é dada por

$$T = \frac{1}{2}\,M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\,I_{\text{cm}}\dot{\phi}^2,$$

onde $I_{\text{cm}} = (1/2)MR^2$. A energia potencial é dada por

$$U = -mgy,$$

e a condição de não-deslizamento: $\dot{y} = R\dot{\phi}$, pode ser integrada e escrita como um vínculo holonômico e escleronômico,

$$G(y,\phi) = y - R\phi = 0.$$

A lagrangiana é

$$L = \frac{1}{2}\,M\dot{y}^2 + \frac{1}{4}\,MR^2\dot{\phi}^2 + mgy,$$

e as equações de Euler-Lagrange levando em conta o vínculo se escrevem

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \lambda(t)\,\frac{\partial G}{\partial y} = 0,$$

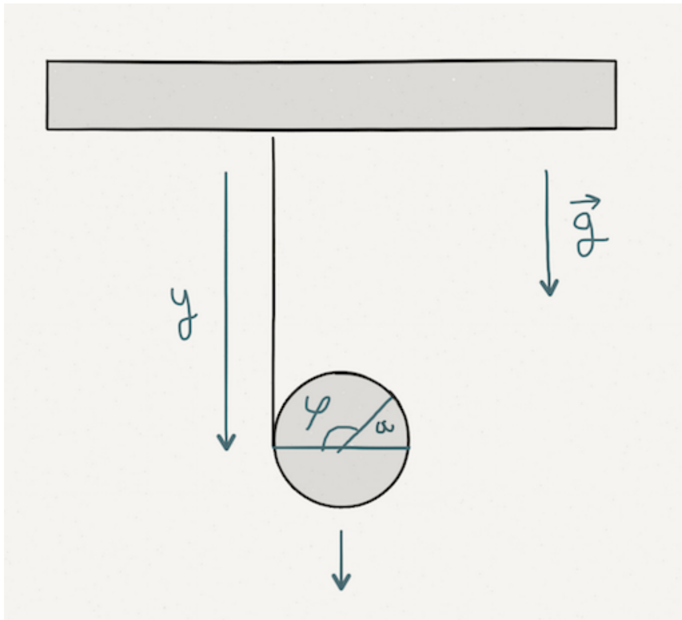

Figura 4: O yo-yo.

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} + \lambda(t)\,\frac{\partial G}{\partial \phi} = 0.$$

Segue que

$$mg - m\ddot{y} + \lambda = 0;$$

$$-\frac{1}{2}\,MR^2\ddot{\phi} - \lambda R = 0.$$

O vínculo nos dá uma terceira equação:

$$\ddot{\phi} = \frac{\ddot{y}}{R}.$$

Com estas três equações é fácil mostrar que

$$\lambda = -\frac{1}{3}\,mg;$$

$$\ddot{=} + \frac{2}{3}\, g;$$

e

$$\ddot{\phi} = +\frac{2}{3}\, \frac{g}{R}.$$

As forças de vínculo são:

$$f_y = \lambda(t)\, \frac{\partial G}{\partial y} = -\frac{1}{3}\, mg;$$

que pode ser interpretada como a tensão na corda, e

$$f_\phi = \lambda(t)\, \frac{\partial G}{\partial \phi} = -\frac{1}{3}\, mgR;$$

que é o torque sobre o cilindro. ■

Vínculos não-holonômicos

Vinculos não-holonômicos são vínculos as velocidades generalizadas ou melhor, envolvem diferenciais inexatas, isto diferenciais que não pode ser integradas. Em duas dimensões cartesianas, por exemplo, eles se escrevem

$$dG(x, y) = M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy,$$

mas como

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x},$$

esta forma diferencial não poderá ser integrada. Se o sistema envolver três coordenadas generalizadas (q_1, q_2, q_3), a forma diferencial:

$$dG(q_1, q_2, q_3) = F_1\, dq_1 + F_2\, dq_3 + F_3\, dq_3,$$

será exata se e apenas se

$$\frac{\partial F_3}{\partial q_2} = \frac{\partial F_2}{\partial q_3}; \quad \frac{\partial F_1}{\partial q_3} = \frac{\partial F_3}{\partial q_1}; \quad \frac{\partial F_2}{\partial q_1} = \frac{\partial F_1}{\partial q_2}.$$

Vínculos não-holonômicos são importantes, por exemplo, na ciência da robótica.

Exemplo 9 *O monociclo* Um monociclo é um velocípede de uma roda só. A posição do ciclista é dada por (x, y), e a direção do movimento é dada por um ângulo θ entre velocidade instantânea $\dot{\mathbf{q}}$ e o eixo $= x$, veja a figura. O sistema tem três graus de liberdade, $q_1 = x$, $q_2 = y$, e $q_3 = \theta$. Escrevendo a velocidade (generalizada) como um vetor temos

$$\dot{\mathbf{q}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}).$$

Como o monociclo não pode ter deslocamentos laterais, definimos um vetor unitário perpendicular à direção de movimento:

$$\mathbf{N} = (\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta),$$

e impomos a condição:

$$\mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0,$$

isto é:

$$\operatorname{sen}\theta \, \frac{dx}{dt} - \cos\theta \, \frac{dy}{dt} + 0 \, d\theta = 0.$$

ou

$$\operatorname{sen}\theta \, dx - \cos\theta \, dy + 0 \, d\theta = 0,$$

No exemplo, $F_1 = \operatorname{sen}\theta$, $F_2 = -\cos\theta$, e $F_3 = 0$. Portanto,

$$\frac{\partial F_3}{\partial q_2} = 0; \quad \frac{\partial F_2}{\partial q_3} = \operatorname{sen}\theta; \quad \frac{\partial F_3}{\partial q_2} \neq \frac{\partial F_2}{\partial q_3};$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_3} = \cos\theta; \quad \frac{\partial F_3}{\partial q_2} = 0; \quad \frac{\partial F_2}{\partial q_3} \neq \frac{\partial F_3}{\partial q_2};$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_1} = 0; \quad \frac{\partial F_1}{\partial q_2} = 0; \quad \frac{\partial F_2}{\partial q_1} = \frac{\partial F_1}{\partial q_2};$$

logo, o vínculo é não-holonômico. ∎

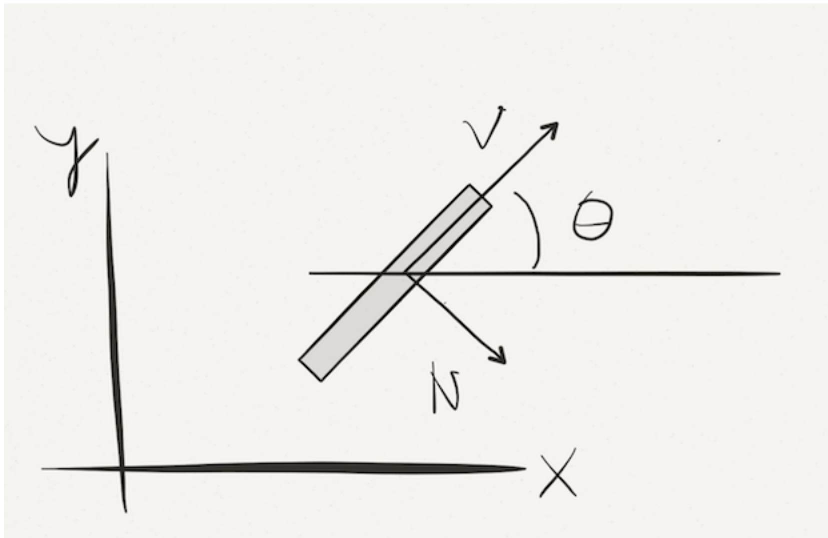

Figura 5: O uniciclo.

Referências

[1] H. Goldstein, C. Poole, & J. Safko *Classical Mechanics* 3rd edition. (Addison-Wesley; New York) 2002.

[2] J. B. Marion, & S. T. Thornton *Classical Dynamics of Particles and Systems* 5th edition. (Thomson Brooks/Cole; Belmont) 2004.

[3] P. Hamill *A Student's Guide to Lagrangians and Hamiltonians* (Cambridge University Press; Cambridge) 2014.

[4] N. A. Lemos *Mecânica Analitica* (Livraria da Física Editora; São Paulo) 2004.