Tópicos de Física Clássica I – Aula 5
O problema da braquistócrona

a c tort

Um exemplo especial: a braquistócrona

O problema foi proposto por Johann Bernoulli em junho 1696 nas *Acta Eruditorium* e marca o início do cálculo variacional, não a sua solução – o problema foi resolvido por Jakob Bernoulli, Leibniz, L'Hôpital e Newton[1], além do próprio Johann – mas o problema em si. Eis o enunciado de Bernoulli[2]:

> *Dados dois pontos A e B em um plano vertical, atribuir a um móvel M a trajetória AMB ao longo da qual sob a ação de seu próprio peso, o móvel vai do ponto A ao ponto B no tempo mais curto.*

A esta curva, Bernoulli batizou como *braquistócrona* do grego, *brachistos*=menor, mais curto, e *chronos*=tempo. Está ímplicito no enunciado que o móvel desliza sem atrito. A solução de Johann é a mais elegante e faz uso de uma adaptação sagaz do Princípio de Fermat que provavelmente só poderia ser feita por alguém completamente à vontade tanto com a física como com a matemática da época

A solução de Bernoulli

Considere um meio divido em camadas paralelas cujo índice de refração é uniforme em cada camada, mas decresce no sentido positivo do eixo $\mathcal{O}X$ como mostrado na Figura 11. De acordo com a lei de Snell temos

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{v_2} = \frac{\operatorname{sen}\theta_3}{v_3} = \frac{\operatorname{sen}\theta_4}{v_4}. \tag{1}$$

Se o meio for contínuo, podemos escrever:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{v} = \text{constante}. \tag{2}$$

[1]A solução de Newton foi publicada anonimamente, mas diz a lenda que Bernoulli não se deixou enganar comentando 'tanquam ex ungue leonem '(pela pata se conhece o leão). Há dúvidas sobre a veracidade do comentário de Bernoulli.

[2]Eis a formulação original: *"Problema novum ad cujos Solutione Mathematici invitantur: Datis in plano verticali duobus puncti A et B, assignare mobili M viam AMB, per quam gravitate sua descendens, et moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempo perveniat ad alterum puntum B. "*

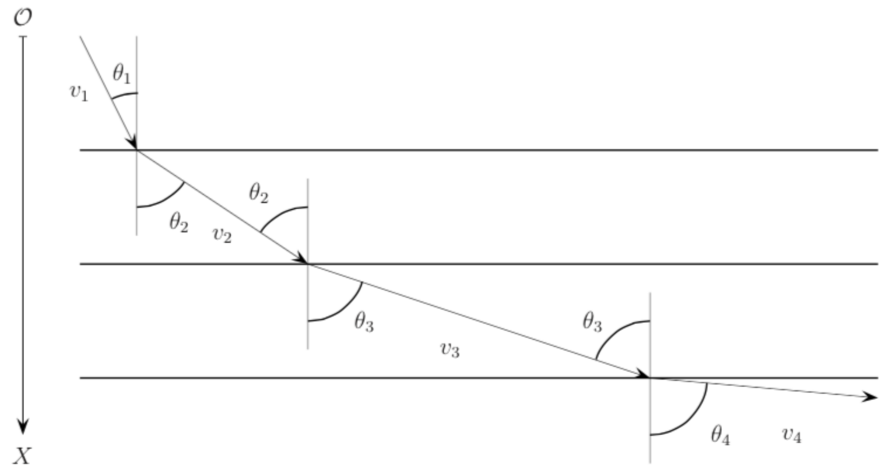

Figura 1: O índice de refração diminui o sentido do eixo $\mathcal{O}X$ positivo.

Se um raio de luz viajasse de A até B em um meio em que o índice de refração diminuisse continuamente no sentido positivo do eixo $\mathcal{O}X$, ver Figura 11, sua velocidade aumentaria e, em analogia com um raio de luz, ele percorreria o trajeto no menor tempo possível. Bernoulli supõe que sob a influência de um campo gravitacional uniforme, o espaço pode ser substituído por um meio contínuo com com um índice de refração tal que sua velocidade é proporcional a $\sqrt{x}$. O móvel então percorrerá a trajetória de A até B no menor tempo possível.

Por qual razão a velocidade do móvel é proporcional a $\sqrt{x}$? Suponha que o móvel parta do repouso do ponto A e que este coincida com a origem, isto é, $A = (0, 0)$, a conservação da energia mecânica permite escrever:

$$E = \frac{1}{2}\,mv^2 - mgx = 0, \tag{3}$$

logo,

$$v(x) = \sqrt{2gx}. \tag{4}$$

Prosseguindo na linha de Bernoulli, examinemos a geometria da Figura 12. Segue que

$$\operatorname{sen}\theta = \cos\beta = \frac{1}{\sec\beta} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}. \tag{5}$$

Mas,

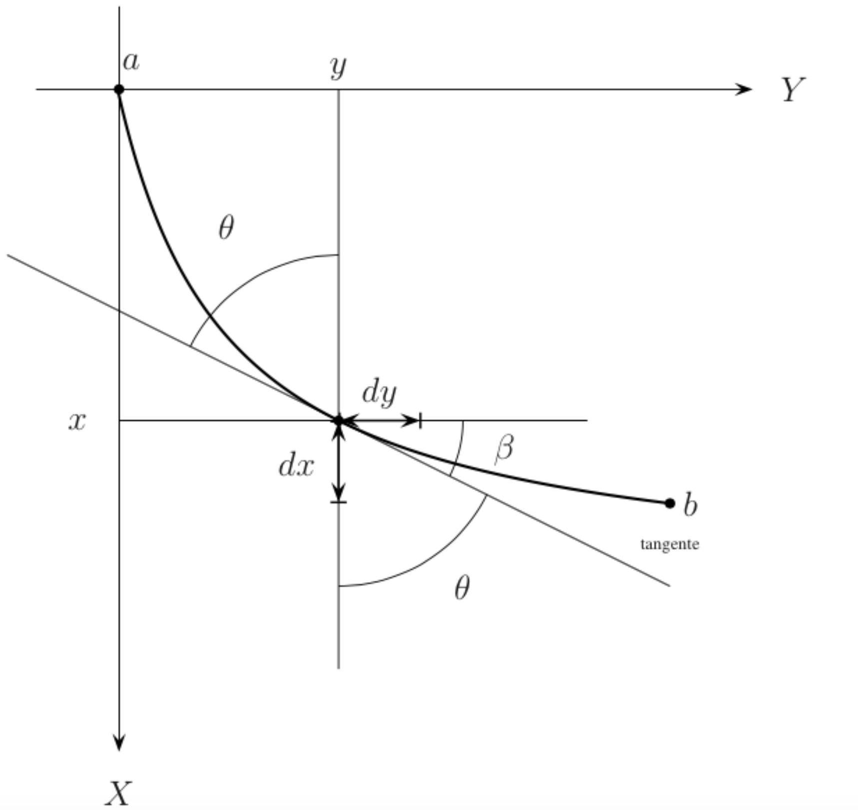

Figura 2: A velocidade do móvel aumenta com $\sqrt{x}$ no sentido positivo do eixo $\mathcal{O}X$.

$$\tan\beta = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'(x)}. \tag{6}$$

Portanto,

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{v} = \frac{1}{\sqrt{2gx}}\,\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{y'^2(x)}}} = \text{constante}. \tag{7}$$

Elevando ao quadrado e rearrajando os termos obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{\mathrm{C}-x}}, \tag{8}$$

onde C é uma constante. Esta equação diferencial é a **equação diferencial da ciclóide** e neste ponto o problema, em concordância com as práticas da

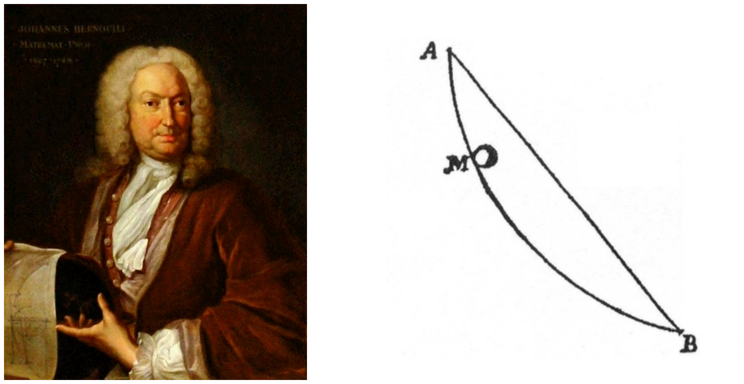

Figura 3: Johann Bernoulli (1667–1748). Desenho original referente ao problema proposto.

física–matemática do século 17 está resolvido. Resolveremos detalhadamente esta equação diferencial na próxima subsecção.

A solução variacional

A solução de Bernoulli embora engenhosa não é uma solução via cálculo variacional, vejamos então como esta deve ser. O problema é extremizar o funcional

$$\mathrm{T} = \int_A^B \frac{ds}{v}. \tag{9}$$

com as condições iniciais: $x_A = 0$, $y_A = 0$ e $v_0 = 0$, relembre a Figura 12. O elemento de comprimento ds se escreve:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\,\sqrt{1 + y'^2(x)}, \tag{10}$$

logo

$$\mathrm{T} = \int_0^{x_A} \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{\sqrt{2gx}}\,dx. \tag{11}$$

Portanto,

$$F\,[y, y'; x] = \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{\sqrt{2gx}}. \tag{12}$$

Fazendo uso da equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0; \tag{13}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0; \tag{14}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \mathrm{C}, \tag{15}$$

ou

$$\frac{y'^{\,2}}{x\,(1+y'^{\,2})} = \frac{1}{2a}, \tag{16}$$

onde a constante de integração C foi rescrita de forma conveniente. Convém rescrever esta equação na forma:

$$y' = \sqrt{\frac{x}{2a-x}}, \tag{17}$$

que pode ser formalmente integrada

$$y(x) = \int \sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx + \mathrm{C}'. \tag{18}$$

Como $y(x=0)=0$, segue que $\mathrm{C}'=0$. Efetuando a transformação de variável

$$x(\theta) = a(1-\cos\,\theta); \qquad dx = a\sin\,\theta\,d\theta, \tag{19}$$

e lembrando que $\sin\,\theta = +\sqrt{1-\cos^2\,\theta}$ temos

$$y(\theta) = a\int (1-\cos\,\theta)\,d\theta, \tag{20}$$

que pode ser facilmente integrada resultando em

$$y(\theta) = a\,(\theta - \sin\,\theta). \tag{21}$$

As equações (19) e (21) são as equações paramétricas de uma **ciclóide invertida** e representam a solução do problema em linguagem moderna, isto é: **a curva que minimiza o tempo de descida é um arco de ciclóide**. A interpretação geométrica das equações (19) e (21) é dada na Figura 5.

A ciclóide e as oscilações isćoronas

Nesta seção mostreremos que a ciclóide invertida é uma **tautótocrona**, isto é: uma curva para a qual o tempo necessário para atingir o ponto mais baixo da curva independe da posição inicial. Isto significa também que posto a oscilar, as oscilações do móvel serão isócronas e de período igual a 2π!

Suponha como antes que o móvel tenha velocidade inicial nula, mas desta vez o ponto a não coincide com a origem, isto é: $A = (x_{\rm A}, y_{\rm B})$ sobre a ciclóide

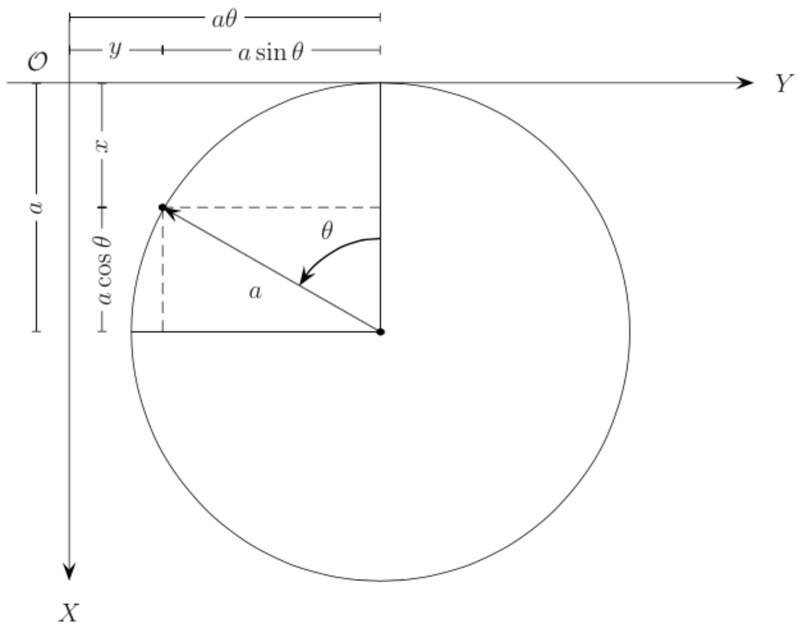

Figura 4: A interpretação geométrica das equações (19) e (21).

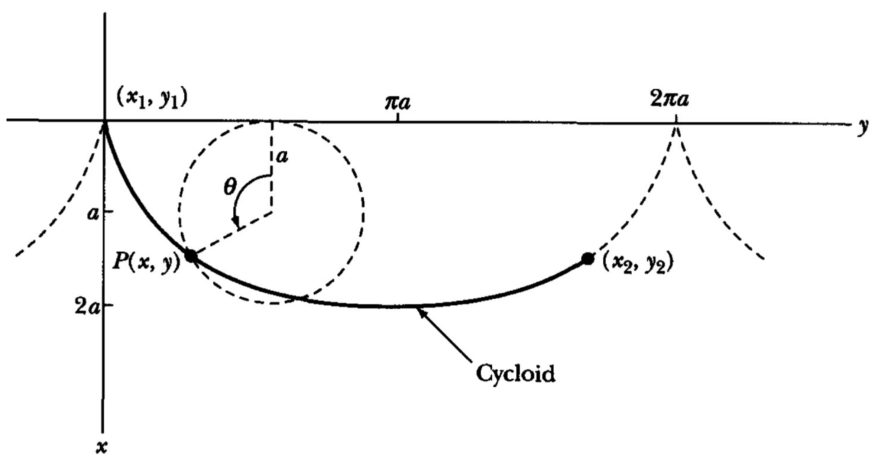

Figura 5: A ciclóide invertida: o círculo rola sem deslizar sobre o eixo $\mathcal{O}Y$ no sentido anti-horário.

invertida. Considere B o ponto mais baixo da curva: $B = (2a, \pi a)$. A velocidade agora é dada por:

$$v(x) = \sqrt{2g(x - x_{\mathrm{A}})},$$

e o tempo de trânsito é dado por

$$\mathrm{T} = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\frac{1 + y'^{\,2}(x)}{2g\,(x - x_{\mathrm{A}})}}\, dx.$$

Como vimos anteriormente, as equações paramétricas da ciclóide invertida são dadas por $x = a\,(1 - \cos\,\theta)$ e $y = a\,(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, logo:

$$\frac{dy}{dx} \equiv y'(x) = \frac{1 - \cos\,\theta}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Segue que a equação para o tempo de trânsito pode ser rescrita como

$$\mathrm{T} = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\frac{1 - \cos\,\theta}{\cos\,\theta_{\mathrm{A}} - \cos\,\theta}}\, d\theta. \tag{22}$$

Exercício 1 Obtenha a equação (22). ■

Para integrar esta equação convém introduzir a mudança de variável:

$$\theta = \pi - 2\alpha; \qquad d\theta = -2d\alpha.$$

Então

$$\cos\,\theta = \cos(\pi - 2\alpha) = -\cos\,\alpha,$$

e

$$1 - \cos\,\theta = 1 + \cos\,2\alpha = 2\,\cos^2\,\alpha.$$

Os novos limites de integração são: $\alpha_0 = (\pi - \theta_{\mathrm{A}})/2$ e $\alpha_1 = 0$, logo

$$\mathrm{T} = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{(\pi-\theta_{\mathrm{A}})/2} \frac{\cos\,\alpha\, d\alpha}{\sqrt{1 + \cos\,\theta_{\mathrm{A}} - (1 - \cos\,2\alpha)}}.$$

Definindo $C = 1 + \cos\,\theta_{\mathrm{A}}$ e fazendo uso da relação $1 - \cos\,2\alpha = 2\operatorname{sen}^2\alpha$,

$$\mathrm{T} = 2\sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{(\pi-\theta_{\mathrm{A}})/2} \frac{\cos\,\alpha\, d\alpha}{\sqrt{\dfrac{C}{2} - \operatorname{sen}^2\alpha}}.$$

A integral fica simples de ser efetuado se fizermos mais uma mudança de variável:

$$u = \operatorname{sen}\alpha; \qquad du = \cos\,\alpha\, d\alpha.$$

Os novos limites de integração são

$$u_0 = 0; \qquad u_1 = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi - \theta_{\mathrm{A}}}{2}\right),$$

logo,

$$\mathrm{T} = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\int_{u_0}^{u_1} \frac{du}{\sqrt{\dfrac{C}{2} - u^2}}.$$

Agora a integração é imediata e o resultado final é

$$\mathrm{T} = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}. \tag{23}$$

O resultado não depende do ponto de partida sobre a ciclóide, isto é: de $A = (x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}})$, logo, se dois ou mais corpos foram simultaneamente abandonados em pontos diferentes da ciclóide, eles atingirão o ponto mais baixo $B = (2a, \pi a)$ ao mesmo tempo. Isto também signifca que se o corpo oscilar em torno do ponto B, seu período independe da amplitude! A ciclóide é uma tautócrona!. Lembre-se que para o pêndulo simples – o pêndulo de Galileu – isto só é verdade na aproximação de pequenos ângulos de afastamento em relação à vertical.

Interlúdio: a involuta de uma curva plana

O conceito de involuta foi introduzido por Huygens. A **involuta** de uma curva plana C pode ser pensada como qualquer curva ortogonal às tangentes da curva C.

Eis um modo prático de construir uma involuta: prenda a extremidade de um pedaço de barbante em um ponto sobre a curva C. Estique o pedaço de barbante o longo da tangente à curva no ponto onde você prendeu o barbante. Agora enrole o barbante em torno de C mantendo-o bem esticado. A curva que a extremidade livre do barbante esticado descreve é a involuta. Veja a Figura 6.

As equações paramétricas da involuta de uma curva C parametrizada por $x = x(t)$ e $y = y(t)$ são dadas por:

$$X(t) = x(t) - \frac{\dot{x}(t)L(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}, \tag{24}$$

e

$$Y(t) = y(t) - \frac{\dot{y}(t)L(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}, \tag{25}$$

onde $L(t)$ – o comprimento de C para $t' \in [t_0, t]$ – é dado por

$$L(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2(t') + \dot{y}^2(t')}\, dt'. \tag{26}$$

Exemplo Considere uma circunferência de raio R parametrizada de acordo com as equações paramétricas:

$$x(t) = R\,\cos t, \qquad y(t) = R\,\mathrm{sen}\,t.$$

Aqui t é um ângulo. As derivadas em relação a t são

$$\dot{x}(t) = -R\,\mathrm{sen}\,t, \qquad \dot{y}(t) = R\,\cos t.$$

Façamos $t_0 = 0$. Então um cálculo simples com as equações (24), (25) e (26) nos dá:

$$X(t) = R\,(\cos t + t\,\mathrm{sen}\,t)\,, \qquad Y(t) = R\,(\mathrm{sen}\,t - t\,\cos t)\,.$$

O gráfico da Figura 6 mostra o círculo e a sua involuta.

A evoluta e a involuta da ciclóide invertida

A evoluta e a involuta de uma ciclóide invertida também são ciclóides. Considere as equações paramétricas da ciclóide invertida ($t \equiv \theta$).

$$x(t) = a\,(1 - \cos t)\,; \qquad y(t) = a\,(t - \mathrm{sen}\,t)\,.$$

As derivadas em relação parâmetro t são:

$$\dot{x}(t) = a\,\mathrm{sen}\,t; \qquad \dot{y}(t) = a\,(1 - \cos t)\,.$$

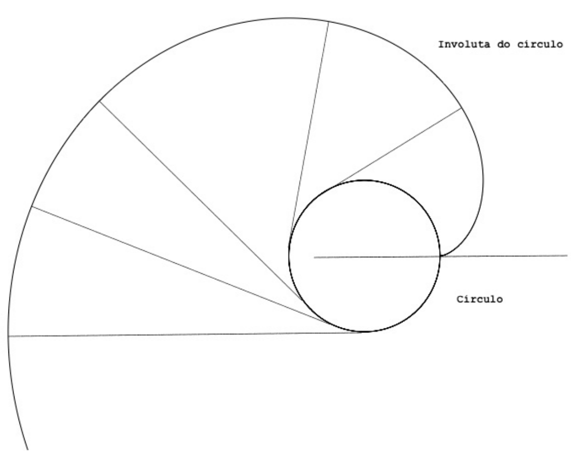

Figura 6: Um círculo e sua involuta.

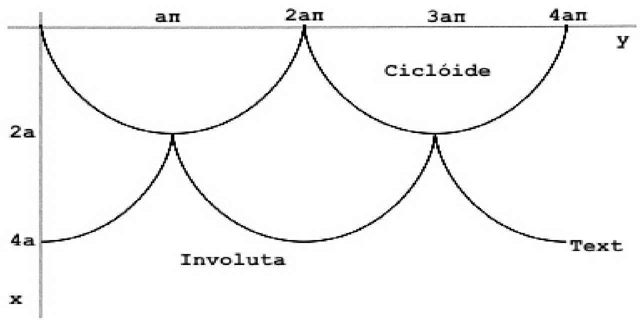

Figura 7: A ciclóide invertida e sua involuta. Observe que a involuta é uma ciclóide deslocada.

Fazendo $t = 0$ na equação (26), temos

$$L = \sqrt{2a} \int_0^t \sqrt{1 - \cos t'}\, dt' = \sqrt{2a} \left[2\sqrt{2} - 2\sqrt{1 - \cos t}\, \cot\left(\frac{t}{2}\right) \right].$$

Substituindo este resultado nas equações (24), (25) obtemos:

$$X(t) = 4a \left[1 - \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right];$$

e

$$Y(t) = 4a \left[\frac{t}{2} - \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \right].$$

Pela forma das equações paramétricas vemos que a involuta de uma ciclóide também é uma ciclóide. A definição de involuta e as propriedades de isocronismo da ciclóide são a base do pêndulo cicloidal de Huygens,

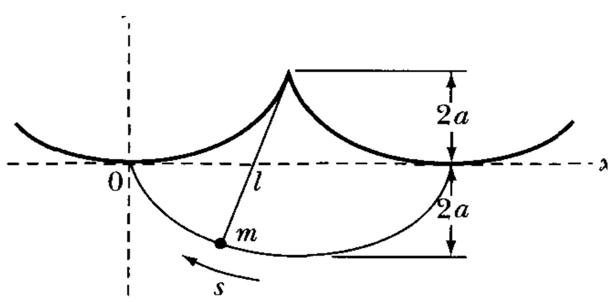

Figura 8: O pêndulo cicloidal de Huygens.

Referências

[1] P. J. Nahim *When Least Is Best* (Princeton University Press; Princeton) 2004.

[2] J. B. Marion & S. T. Thornton *Classical Dynamics of Particles and Systems* 5th edition. (Thomson Brooks/Cole; Belmont) 2004.

[3] J. Ferguson *A Brief Survey of the History of the Calculus of Variations and its Applications*. ArXiv: math/0402357 v1, 2004.

[4] H. E. Taylor & T. L. Wade *University Calculus and Subsets of the Plane* combined edition (Wiley; New York) 1962.