Tópicos de Física Clássica I – Aula 4
A identidade de Beltrami; a notação δ e alguns exemplos

a c tort

A segunda forma da equação de Euler-Lagrange

Considere $F = F\left[y(x), y'(x); x\right]$. Então:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{dx} + \frac{\partial F}{\partial x} \equiv y'\frac{\partial F}{\partial y} + y''\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{\partial F}{\partial x}. \tag{1}$$

Agora considere

$$\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = y''\frac{\partial F}{\partial y'} + y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right). \tag{2}$$

Da primeira equação vemos que

$$y''\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{dF}{dx} - y'\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial x}, \tag{3}$$

logo, a segunda equação pode ser rescrita como

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) &= \frac{dF}{dx} - y'\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x} + y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\\ &= \frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial x} + y'\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y}\right).\end{aligned} \tag{4}$$

Fazendo uso da equação de Euler-Lagrange vemos que o último termo do lado direito zero, logo

$$\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial x}. \tag{5}$$

Segue que

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0. \tag{6}$$

Esta é a **segunda forma da equação de Euler-Lagrange**. Se F não depender explicitamente de x,

$$\left(F - y'\,\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \text{constante}, \tag{7}$$

que é conhecida como a **identidade de Beltrami**. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1 *Geodésicas na esfera*

O comprimento infinitesimal ds sobre uma esfera de raio R se escreve

$$ds = R\,\left(d\theta^2 + \sin^2\,\theta\,d\varphi^2\right)^{1/2} = R\,\left[\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 + \sin^2\,\theta\right]^{1/2}\,d\varphi. \tag{8}$$

A distância entre dois pontos fixos sobre a esfera é dada por

$$S = R\int_{\varphi_a}^{\varphi_b}\,\left[\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 + \sin^2\,\theta\right]^{1/2}\,d\varphi. \tag{9}$$

Portanto, $F\left[y(x), y'(x); x\right] \to F\left[\theta(\varphi), \theta'(\varphi); \varphi\right]$, onde

$$F\left[\theta(\varphi), \theta'(\varphi); \varphi\right] = \left[\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 + \sin^2\,\theta\right]^{1/2} = \left[\theta'^{\,2} + \sin^2\,\theta\right]^{1/2}. \tag{10}$$

Como F não depende explicitamente de φ, a segunda forma da equação de Euler-Lagrange se escreve:

$$\left[\theta'^{\,2} + \sin^2\,\theta\right]^{1/2} - \theta'\,\frac{d}{d\theta'}\,\left[\theta'^{\,2} + \sin^2\,\theta\right]^{1/2} = \mathrm{C}. \tag{11}$$

Efetuando a derivada

$$\left[\theta'^{\,2} + \sin^2\,\theta\right]^{1/2} - \frac{\theta'^{\,2}}{\left[\theta'^{\,2} + \sin^2\,\theta\right]^{1/2}} = \mathrm{C}. \tag{12}$$

Multiplicando ambos os lados por $\left[\theta'^{\,2} + \sin^2\,\theta\right]^{1/2}$

$$\sin^2\,\theta = \mathrm{C}\,\left[\theta'^{\,2} + \sin^2\,\theta\right]^{1/2}. \tag{13}$$

Com um pouco de algebrismo podemos escrever esta equação na forma

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}\,\frac{d\varphi}{d\theta} &= \frac{\mathrm{C}}{\left(\sin^4\,\theta - \mathrm{C}^2\,\sin^2\,\theta\right)^{1/2}} \\
&= \frac{\mathrm{C}}{\sin^2\,\theta\,\left(1 - \mathrm{C}^2/\sin^2\,\theta\right)^{1/2}} \\
&= \frac{\mathrm{C}\;\;\csc^2\,\theta}{\left(1 - \mathrm{C}^2\,\csc^2\,\theta\right)^{1/2}}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Para efetuar a integração escrevemos

$$\begin{aligned} \mathrm{C}\, d\varphi &= \frac{\mathrm{C}^{\,2} \csc^2\, \theta\, d\theta}{\left(1-\mathrm{C}^2 \csc^2\, \theta\right)^{1/2}} \\ &= \frac{\mathrm{C}\ \ \csc^2\, \theta\, d\theta}{\left[1-\mathrm{C}^2\, \left(1+\cot^2\, \theta\right)\right]^{1/2}}, \end{aligned} \tag{15}$$

ou ainda

$$d\varphi = \frac{\csc^2\, \theta\, d\theta}{\left(\beta^2 - \cot^2\, \theta\right)^{1/2}}, \tag{16}$$

onde $\beta^2 = \left(1-\mathrm{C}^2\right)/\mathrm{C}^2$. Agora, sabemos que

$$d\left(\cot\, \theta\right) = -\csc^2\, \theta\, d\theta, \tag{17}$$

logo,

$$d\varphi = -\frac{d(\cot\, \theta)}{\left(\beta^2 - \cot^2\, \theta\right)^{1/2}}. \tag{18}$$

Fazendo $x = -\cot\, \theta$, escrevemos

$$d\varphi = \frac{dx}{\left(\beta^2 - x^2\right)^2}. \tag{19}$$

Integrando obtemos

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{x}{\beta}\right) + \gamma = -\arcsin\left(\frac{\cot\, \theta}{\beta}\right) + \gamma, \tag{20}$$

onde γ é uma constante de integração. Invertendo

$$\cot\, \theta = -\beta\, \sin\left(\varphi - \gamma\right). \tag{21}$$

Esta última equação representa em coordenadas polares r, θ, φ um plano que contém a origem, que é também o centro geométrico da esfera de raio R. Para verificar isto basta rescrever o resultado acima em coordenadas cartesianas. Multiplique a equação acima por $R\,\mathrm{sen}\,\theta$ e expanda $\sin\left(\varphi - \gamma\right)$. Identifique a relação entre as coordenadas cartesianas e esféricas e o resultado será:

$$z = Ax - By, \tag{22}$$

que é a equação do plano que contém a origem, veja a Figura 1.

O caminho mais curto entre dois pontos fixos sobre a esfera, a **geodésica**, é o menor dos dois arcos do grande círculo determinado pela intersecção do plano e com a superfície da esfera. O arco maior não representa sequer o caminho mais longo.

■

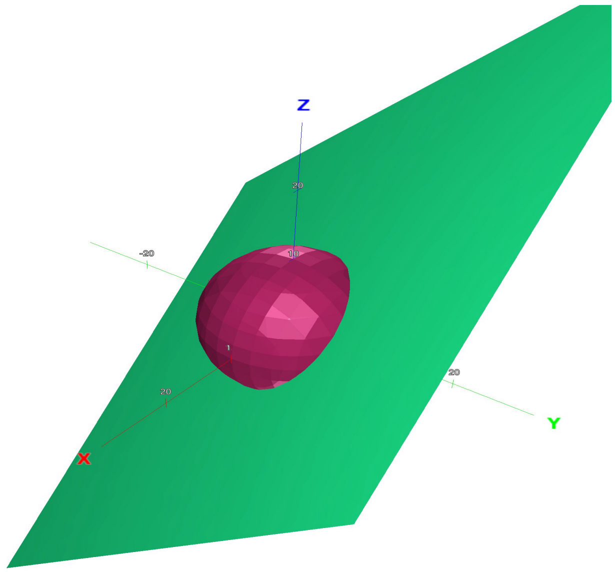

Figura 1: Sobre uma esfera, a geodésica que une dois pontos fixos é o menor dos dois arcos que formam um grande círculo.

A notação δ

Uma relação útil

$$\delta y = y(x;\alpha) - y(x), \tag{23}$$

$$\frac{d}{dx}\,\delta y = \frac{d}{dx}\,\left[y(x;\alpha) - y(x)\right], \tag{24}$$

mas $y(x,\alpha) = y(x) + \alpha\,\eta(x)$, logo,

$$\frac{d}{dx}\,\delta y = \alpha\,\eta'(x), \tag{25}$$

Por outro lado,

$$\delta y' = y'(x;\alpha) - y'(x) = \alpha\,\eta'(x), \tag{26}$$

Portanto

$$\frac{d}{dx}\,\delta y = \delta\,\frac{dy}{dx} = \delta y'. \tag{27}$$

A diferença entre os símbolos δ e d

Considere

$$F = F\left[y(x), y'(x); x\right]. \tag{28}$$

Se fixarmos y e variarmos o ponto teremos:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial y}\, dy + \frac{\partial F}{\partial y'}\, dy' + \frac{\partial F}{\partial x}\, dx. \tag{29}$$

Mas, se fixarmos x e variarmos y teremos:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\, \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\, \delta y'. \tag{30}$$

A notação δ e as equações de Euler-Lagrange

Considere

$$\Delta F = F[y + \epsilon\eta, y' + \epsilon\eta'; x] - F[y, y'; x]. \tag{31}$$

interpretando F como uma função das variáveis y e y' (x é fixo) podemos fazer uso da expansão em serie de Taylor e escrever:

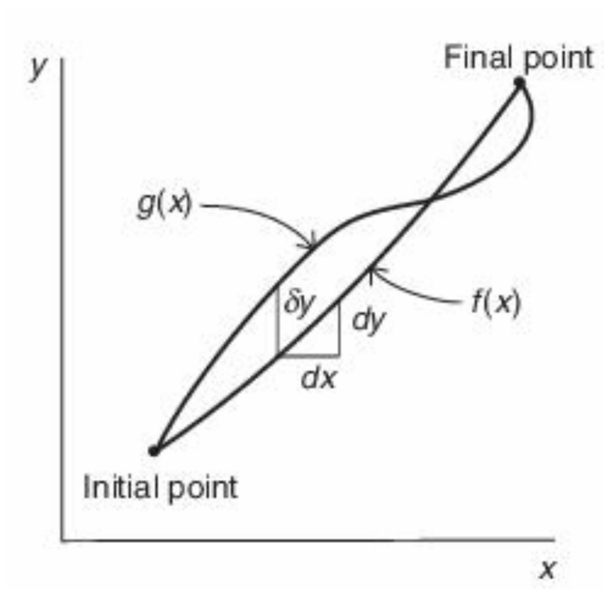

Figura 2: A diferença entre dy e δy.

$$F[y + \epsilon\eta, y' + \epsilon\eta'; x] = F[y, y'; x] + \frac{\partial F}{\partial y}\,\epsilon\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\,\epsilon\eta' + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{32}$$

Segue que

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\,\epsilon\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\,\epsilon\eta' + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{33}$$

Por definição, a variação de F é dada por

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\,\epsilon\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\,\epsilon\eta'. \tag{34}$$

Suponha que $F = y$, então

$$\delta y = \epsilon\eta. \tag{35}$$

Agora suponha que $F = y'$,

$$\delta y' = \epsilon\eta'. \tag{36}$$

Portanto,

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta y'. \tag{37}$$

Lembrando que

$$\delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\,(\delta y), \tag{38}$$

podemos reobter a equação de Euler-Lagrange:

$$\delta J = \delta\int_{x_a}^{x_b} F[y, y'; x]\,dx = \int_{x_a}^{x_b} \delta F[y, y'; x]\,dx, \tag{39}$$

pois x_a e x_b são fixos. Segue que:

$$\delta J = \int_{x_a}^{x_b}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta y'\right)dx, \tag{40}$$

ou ainda – veja a equação (38):

$$\begin{aligned}\delta J &= \int_{x_a}^{x_b}\frac{\partial F}{\partial y}\,\delta y\,dx + \int_{x_a}^{x_b}\frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)dx \\ &= \int_{x_a}^{x_b}\frac{\partial F}{\partial y}\,\delta y\,dx + \int_{x_a}^{x_b}\frac{\partial F}{\partial y'}\,\frac{d}{dx}\,(\delta y)\,dx. \end{aligned} \tag{41}$$

Integrando o segundo termo do lado direito por partes:

$$\delta J = \int_{x_a}^{x_b}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\,\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\,dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta y\right]_{x_b} - \left[\frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta y\right]_{x_a}. \tag{42}$$

Se $\delta y(x_a) = \delta y(x_b) = 0$, podemos aplicar o lema fundamental do cálculo variacional (veja a Aula 3) e obter a equação de Euler-Lagrange para extremos fixos.

Funcionais de duas ou mais funções

Comecemos com um problema simples: a forma paramétrica de uma curva no plano cartesiano se escreve:

$$x = x(u), \qquad y = y(u), \tag{43}$$

onde u é um paraâmetro conveniente, o comprimento da curva ou o tempo. Um comprimento elementar ds se escreve

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)}\, du, \tag{44}$$

onde $x' := dx/du$ e $y' := dy/du$. O comprimento da curva é

$$L = \int_{u_a}^{u_b} \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)}\, du. \tag{45}$$

O problema é determinar as funções x e y para as quais L é um extremo.

O problema geral é o seguinte: dada a integral

$$J \equiv J[x, y] = \int_{u_a}^{u_b} F\left[x(u), y(u), x'(u), y'(u); u\right]\, du, \tag{46}$$

Seja $x(u)$ e $y(u)$ as funções que extremizam J. Considere as funções próximas:

$$X(u, \alpha) = x(u) + \alpha\, \chi(u) \qquad Y(u, \beta) = y(u) + \beta\, \eta(u). \tag{47}$$

A exigência de que J tenha um valor extremo para as funções corretas se escreve $\delta J = 0$. Fazendo uso dos resultados da seção precedente para um funcional que depende de duas funções e uma variável independente obtemos:

$$\frac{\partial F(x, x', y, y'; u)}{\partial x} - \frac{d}{du}\frac{\partial F(x, x', y, y'; u)}{\partial x'} = 0, \tag{48}$$

e

$$\frac{\partial F(x, x', y, y'; u)}{\partial y} - \frac{d}{du}\frac{\partial F(x, x', y, y'; u)}{\partial y'} = 0. \tag{49}$$

Exercício 1 Obtenha as equações de E-L para $F\left[x(u), y(u), x'(u), y'(u); u\right]$.
■

Estender este resultado para várias funções $y_i(x)$ e uma variável independente x, isto é, para $F[y_i(x), y_i'; x]$ é imediato e o resultado é:

$$\frac{\partial F[y_i(x), y_i'; x]}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F[y_i(x), y_i'; x]}{\partial y_i'(x)} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{50}$$

Exemplo 2 *O caminho mais curto entre dois pontos no plano II*

Como vimos no começo desta seção, a distância infinitesimal entre dois pontos no plano se escreve

$$\ell = \int_{u_a}^{u_b} \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)}\, du, \tag{51}$$

logo,

$$F\left[x(u), x'(u), y(u), y'(u); u\right] = \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)}\, du. \tag{52}$$

Como F não depende de $x(u)$ e de $y(u)$, segue que

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)}} = C_1, \tag{53}$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)}} = C_2. \tag{54}$$

Dividindo uma equação pela outra obtemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_2}{C_1}, \tag{55}$$

ou

$$y(x) = a\,x + b, \tag{56}$$

que é a equação da reta. ■

Referências

[1] J. B. Marion & S. T. Thornton *Classical Dynamics of Particles and Systems* 5th edition. (Thomson Brooks/Cole; Belmont) 2004.

[2] I. M. Gelfand & S. V. Fomin *Calculus of Variations* (Dover; Mineola) 2000.

[3] H. Sagan *Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics* (Dover; New York) 1989.

[4] R. Weinstock *Calculus of Variations* (Dover; New York) 1974.