# Tópicos de Física Clássica I – Aula 3

a c tort

## As equações de Euler (1744) e Lagrange (1755)

O cálculo variacional ou de variações foi introduzido por Leonhard Euler com a publicação do seu livro *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti* – Um método para a descoberta de linhas curvas que gozm da propriedade de máximo ou mínimo, ou a solução do problema isoperimétrico considerado no seu sentido latíssimo. Muitos historiadores da matemática consideram o livro como marcando o início da teoria do cálculo de variações. A abordagem de Euler foi aperfeiçoada por um jovem de 19 anos que vivia em Turim em uma carta enviada a Euler em 1755. O jovem chamava-se Ludovico de la Grange Tournier e hoje conhecido como Joseph–Louis Lagrange (1736–1813). Lagrange transformou a linguagem geométrica de Euler em linguagem analítica simplificando o método.

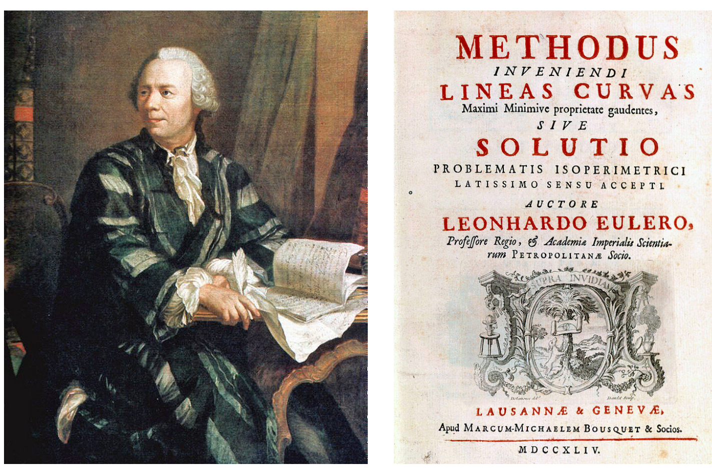


Figura 1: Leonhard Euler, (1707–1783). (Imagens Wikipedia)

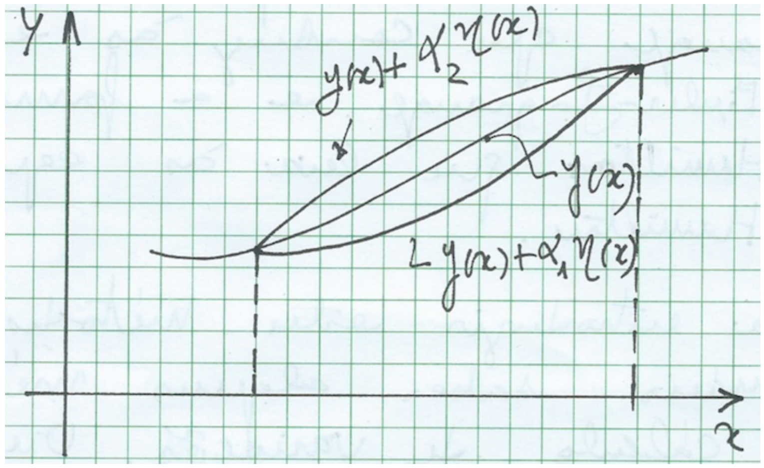


Figura 2: O problema fundamental do cálculo variacional.

## Obtenção das equações de Euler-Lagrange

O problema fundamental do cálculo variacional ou de variações é determinar a função $y(x)$ tal que a integral

$$J \equiv J[y] = \int_{x_a}^{x_b} F\left[y, y'; x\right] dx, \quad y(x_a) = y_a; \quad y(x_b) = y_b; \quad x_b > x_a, \tag{1}$$

seja um **extremo**, isto é: tenha um valor **máximo** ou **mínimo**. A notação $J[y]$ indica que o valor de $J$ depende da escolha de $y(x)$, isto é, $J$ é um **funcional**.

Considere então a integral

$$J(\alpha) = \int_a^b F\left[\bar{y}(x,\alpha), \bar{y}'(x,\alpha); x\right] dx, \tag{2}$$

onde

$$\bar{y}(x,\alpha) = y(x) + \alpha\eta(x), \tag{3}$$

e

$$\bar{y}'(x,\alpha) = y'(x) + \alpha\eta'(x), \tag{4}$$

com a condição de que nos extremos $\eta(x)$ seja nula, isto é: $\eta(x_a) = \eta(x_b) = 0$. Derivando em relação ao parâmetro $\alpha$,

$$\begin{aligned}
\frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} &= \int_{x_a}^{x_b} \left[\frac{\partial F[\bar{y}, \bar{y}'; x]}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \alpha} + \frac{\partial F[\bar{y}, \bar{y}'; x]}{\partial \bar{y}'} \frac{\partial \bar{y}'}{\partial \alpha}\right] dx \\
&= \int_{x_a}^{x_b} \left[\frac{\partial F[\bar{y}, \bar{y}'; x]}{\partial \bar{y}} \eta(x) + \frac{\partial F[\bar{y}, \bar{y}'; x]}{\partial \bar{y}'} \eta'(x)\right] dx.
\end{aligned} \tag{5}$$

A condição extremante se escreve:

$$\delta J = \left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha = 0. \tag{6}$$

Fazendo $\alpha = 0$, vemos que $\bar{y}(x,\alpha) \to y(x)$ e $\bar{y}'(x,\alpha) \to y'(x)$, temos,

$$\left(\frac{dJ(\alpha)}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = \int_{x_a}^{x_b} \left[\frac{\partial F[y,y';x]}{\partial y}\,\eta(x) + \frac{\partial F[y,y';x]}{\partial y'}\,\eta'(x)\right] dx. \tag{7}$$

O segundo termo pode ser integrado por partes:

$$\int_{x_a}^{x_b} \frac{\partial F[y,y';x]}{\partial y'}\,\eta'(x)\,dx = \frac{\partial F[y,y';x]}{\partial y'}\,\eta(x)|_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} \eta(x)\,\frac{d}{dx}\,\frac{\partial F[y,y']}{\partial y'}. \tag{8}$$

como $\eta(x_a) = \eta(x_b) = 0$, segue que

$$\frac{dJ(\alpha)}{d\alpha}|_{\alpha=0} == \int_{x_a}^{x_b} \left[\frac{\partial F[y,y';x]}{\partial y} - \frac{d}{dx}\,\frac{\partial F[y,y';x]}{\partial y'}\right] \eta(x)\,dx. \tag{9}$$

como $\eta(x)$ é uma função arbitrária, ou mais rigorosamente: invocando o lema fundamental do cálculo de variações (veja a nota complementar ao final, segue que

$$\frac{\partial F[y,y';x]}{\partial y} - \frac{d}{dx}\,\frac{\partial F(y,y';x)}{\partial y'} = 0, \tag{10}$$

que é a equação de Euler-Lagrange. A equação de Euler-Lagrange é condição necessária, mas não é suficiente para a existência de um extremo. A questão da **suficiência** é bastante complexa é só foi resolvida muito mais tarde, no final do século 19 e início do século 20. Em muitos problemas o extremo é um mínimo, mas pode haver surpresas, como veremos mais adiante.

**Exemplo 1** *Caminho mais curto entre dois pontos no plano*

Considere dois pontos $a$ e $b$ no plano $xy$. Queremos encontrar o caminho mais curto entre eles. O comprimento de um trecho da curva que une os dois pontos é

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1 + y'^{\,2}}\,dx.$$

Portanto,

$$F[y,y';x] = \sqrt{1 + y'^{\,2}},$$

e o funcional que queremos extremizar é

$$J = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + y'^{\,2}}\,dx.$$

A exigência de que $\delta J = 0$, nos leva então à equação de E-L. As derivadas parciais que necessitamos são:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{(1 + y'^{\,2})^{1/2}}.$$

Segue que a equação de E-L neste caso nos dá:

$$\frac{d}{dx}\,\frac{y'}{(1 + y'^{\,2})^{1/2}} = 0.$$

Efetuando a derivada em relação a $x$

$$\frac{y''}{(1 + y'^{\,2})^{3/2}} = 0.$$

Como o denominador desta equação diferencial nunca é nulo, $(1 + y'^{\,2})^{3/2} \geq 1$, podemos multiplicá-la por $(1 + y'^{\,2})^{3/2}$ e escrever

$$y'' = 0,$$

cuja solução é

$$y = Ax + B,$$

onde $A$ e $B$ são constantes. A equação acima é a equação da reta. Para determinar $A$ e $B$ usamos as condições: $y(x_a) = y_a$ e $y(x_b) = x_b$. ■

**Exemplo 2** *Geodésicas sobre a superfície de um cilindro reto.*

Considere dois pontos fixos, $a$ e $b$, sobre a superfície de um cilindro reto de raio $R$. A distância entre esses pontos é dada pelo funcional:

$$J = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{R^2 d\phi^2 + dz^2} = \int_{z_a}^{z_b} \sqrt{R^2 + \left(\frac{dz}{d\phi}\right)^2}\, dz.$$

Portanto,

$$F[y, y'; x] \to F[z, dz/d\phi; z] = \sqrt{R^2 + \left(\frac{dz}{d\phi}\right)^2}\, dz.$$

A equação de Euler-Lagrange pertinente se escreve:

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{d\phi}\,\frac{\partial F}{\partial (dz/d\phi)} = 0.$$

Como $F$ não depende explicitamente de $z$, segue que

$$\frac{d}{d\phi}\,\frac{\partial F}{\partial (dz/d\phi)} = \frac{d}{d\phi}\,\frac{(dz/d\phi)}{\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{dz}{d\phi}\right)^2}} = 0,$$

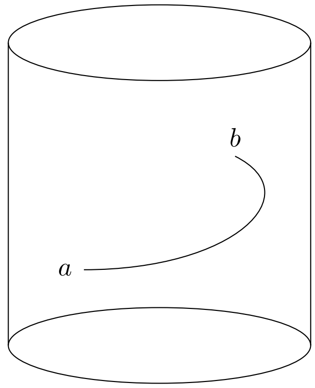


Figura 3: O caminho mais curto entre dois pontos sobre a superfície de um cilindro reto é um arco de hélice.

logo, derivando uma vez mais:

$$\frac{(d^2z/d\phi^2)}{\left[R^2+\left(\dfrac{dz}{d\phi}\right)^2\right]^{1/2}}-\frac{(dz/d\phi)^2\,d^2z/d\phi^2}{\left[R^2+\left(\dfrac{dz}{d\phi}\right)^2\right]^{3/2}}=0.$$

Como o denominador de ambos os termos nunca é nulo, podemos multiplicá-los por $\left[R^2+\left(\dfrac{dz}{d\phi}\right)^2\right]^{3/2}$, e obter:

$$R\,\frac{d^2z}{d\phi^2}=0.$$

A integração é imedita e o resultado é:

$$z=C_1\,\phi+C_2,$$

onde $C_1$ e $C_2$ são constantes de integração. As geodésicas são curvas helicoidais de raio constante e para que uma delas passe pelos pontos $a$ e $b$, as constantes $C_1$ e $C_2$ devem ser ajustadas com as condições $z(\phi_a)=z_a$ e $z(\phi_b)=z_b$. ■

## Complemento 1: o lema fundamental do cálculo variacional

Eis o lema fundamental do cálculo de variações [2, 3, 4] e sua demonstração:

> *Se $M(x)$ for uma função contínua no intervalo fechado $x_a \leq x \leq x_b$ e $\eta(x)$ for qualquer função que: (a) é contínua nesse intervalo, (b) é nula em $x_a$ e $x_b$, isto é: $\eta(x_a) = \eta(x_b) = 0$, e se*
>
> $$\int_{x_a}^{x_b} M(x)\, \eta(x)\, dx = 0,$$
>
> *então para todas as funções $\eta(x)$ que satisfazem as condições acima segue necessariamente que $M(x)$ é identicamente nula no intervalo $x_a \leq x \leq x_b$, isto é:*
>
> $$M(x) \equiv 0, \quad x \in [x_a, x_b].$$

Demonstração Suponha que $M(x)$ não seja identicamente nula no intervalo fechado $x_a \leq x \leq x_b$. Suponha que em um ponto $x_0$ no intervalo $M(x)$ possa ser positiva ou negativa. Suponhamos, sem perda de generalidade, que seja positiva,

$$M(x_0) > 0.$$

*A demonstração depende da existência de pelo menos uma função $\eta(x)$ para a qual a condição principal não é válida.*

Como por hipótese $M(x)$ é contínua no intervalo dado, há um número real positivo $\delta > 0$ tal que

$$M(x) > 0 \quad \text{para todo } x \text{ no intervalo} \quad |x - x_0| < \delta.$$

(Veja a definição de continuidade no Complemento 2). Como $\eta(x)$ é arbitrária podemos considerar a função

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & |x - x_0| > \delta; \\ (x - x_0 + \delta)\,(x_0 + \delta - x), & |x - x_0| \leq \delta. \end{cases}$$

Observe que $\eta(x)$ é uma função contínua, veja a Figura 4. Portanto,

*Observe que $x_0$ é um ponto arbitrário do intervalo.*

$$\int_{x_a}^{x_b} M(x)\, \eta(x)\, dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} M(x)\,(x - x_0 + \delta)\,(x_0 + \delta - x)\, dx > 0.$$

Mas este resultado está em contradição com as hipóteses iniciais, logo, estas serão válidas somente se $M(x) \equiv 0$ em todo o intervalo $x_a \leq x \leq x_b$.

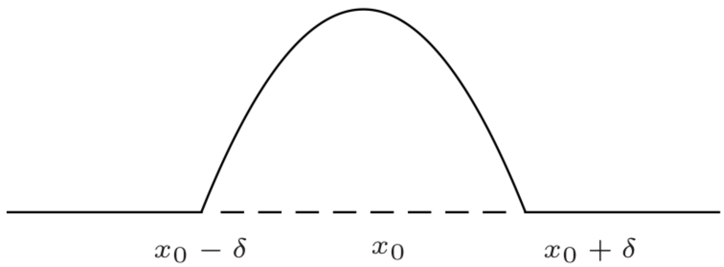


Figura 4: Uma escolha possível para $\eta(x)$ no interval $x_a \leq x \leq x_b$.

**Complemento 2: continuidade**

Uma função $f(x)$ é contínua em um ponto $x_0$ se:

(a) $f(x)$ é definida em $x_0$;

(b)
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Definição alternativa: $f(x)$ é contínua em $x_0$ se para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \text{ sempre que } |x - x_0| < \delta.$$

# Referências

[1] J. B. Marion & S. T. Thornton *Classical Dynamics of Particles and Systems* 5th edition. (Thomson Brooks/Cole; Belmont) 2004.

[2] I. M. Gelfand & S. V. Fomin *Calculus of Variations* (Dover; Mineola) 2000.

[3] H. Sagan *Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics* (Dover; New York) 1989.

[4] R. Weinstock *Calculus of Variations* (Dover; New York) 1974.