Métodos Matemáticos

Dinâmica no plano complexo: Referências girantes pêndulo de Foucault

A C Tort[1]

[1]Departmento de Física Teórica
Instituto Física – Universidade Federal do Rio de Janeiro

3 de setembro de 2012

Motivação física: o pêndulo de Foucault

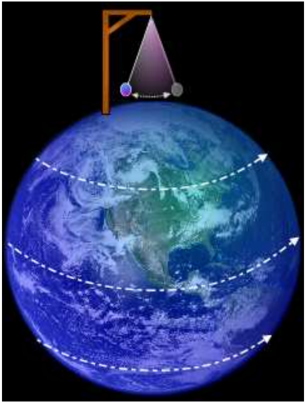

Figura: Pêndulo de Foucault no Polo Norte.

Referencias girantes

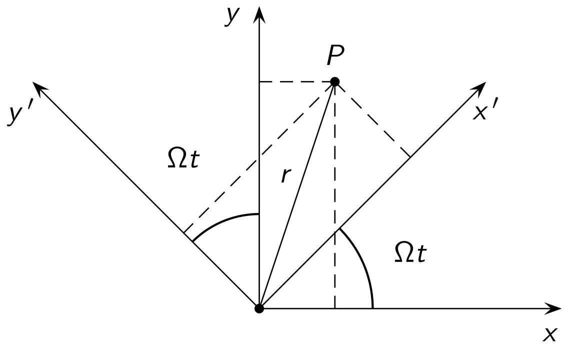

Figura: Rotação no $\mathbf{R}^2$.

$$x = x' \cos \Omega t - y' \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Omega t\right) = x' \cos \Omega t - y' \operatorname{sen} \Omega t,$$

$$y = x' \operatorname{sen} \Omega t + y' \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \Omega t\right) = x' \operatorname{sen} \Omega t + y' \cos \Omega t.$$

Multiplicando a segunda equação por i e somando com a primeira obtemos:

$$z(t) = z'(t)\, \mathrm{e}^{i\,\Omega t}.$$

A transformação inversa se escreve:

$$z'(t) = z(t)\, \mathrm{e}^{-i\,\Omega t}.$$

A velocidade transforma-se de acordo com:

$$\frac{dz(t)}{dt} = \left(\frac{dz'(t)}{dt} + i\,\Omega z'(t)\right)\,\mathrm{e}^{i\,\Omega t},$$

a aceleração de acordo com:

$$\frac{d^2z(t)}{dt^2} = \left(\frac{d^2z'(t)}{dt^2}\,\mathrm{e}^{i\,\Omega t} + 2i\,\Omega\,\frac{dz'(t)}{dt} - \Omega^2 z'(t)\right)\,\mathrm{e}^{i\,\Omega t}.$$

A equação newtoniana de movimento no referencial inercial se lê:

$$m\,\frac{d^2z(t)}{dt^2} = \tilde{F}.$$

A força deve transformar-se de mesmo modo que a posição:

$$\tilde{F} = \tilde{F}\,'\,\mathrm{e}^{i\,\Omega t}.$$

Segue que a equação de movimento no referencial girante se escreve:

$$m\,\frac{d^2z'(t)}{dt^2} + 2i\,\Omega\,m\,\frac{dz'(t)}{dt} - m\,\Omega^2 z'(t) = \tilde{F}\,',$$

que pode ser rescrita na forma:

$$m\,\frac{d^2 z'(t)}{dt^2} = \tilde{F}'_{\text{efetiva}},$$

onde:

$$\tilde{F}'_{\text{efetiva}} := \tilde{F}' - 2i\,\Omega\,m\,\frac{dz'(t)}{dt} + m\,\Omega^2 z'(t),$$

Exemplo: partícula "livre"

Partícula lançada de um ponto arbitrário do referencial girante, isto é: $z(0) = x_0 + iy_0$, com velocidade inicial $\tilde{v}(0) = v_{0x'} + iv_{0y'}$, livre de forças, isto é: $\tilde{F}\,' = 0$.

$$\frac{d^2 z'(t)}{dt^2} + 2i\,\Omega\,\frac{dz'(t)}{dt} - \Omega^2 z'(t) = 0.$$

A solução geral desta equação é:

$$z\,'(t) = (C_1 + C_2\,t)\;\mathrm{e}^{i\Omega t},$$

onde C_1 e C_2 são constantes complexas.

Fazendo uso das condições iniciais obtemos:

$$z'(t) = \left(z_0' + \tilde{v}_0' t - i\,\Omega z_0'\, t\right)\, \mathrm{e}^{i\,\Omega t}.$$

Extraindo a parte real e a parte imaginária obtemos:

$$x' = \left(x_0' + v_{0x'}' t + \Omega y_0' t\right)\, \cos\,\Omega t - \left(y_0' + v_{0y'} t - \Omega x_0' t\right)\, \mathrm{sen}\,\Omega t,$$

e,

$$y' = \left(y_0' + v_{0y'}' t - \Omega x_0' t\right)\, \cos\,\Omega t + \left(x_0' + v_{0x'} t + \Omega y_0' t\right)\, \mathrm{sen}\,\Omega t.$$

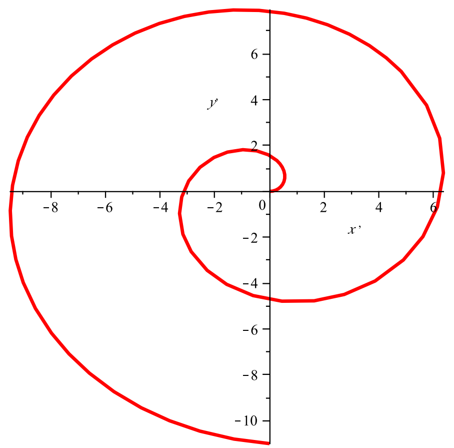

Figura: Trajetória n o referencial girante. As condições iniciais são: $x_0' = y_0' = 0$, $v_{0x'}' = 1\,\mathrm{m/s}$, $v_{0y'}' = 0$. O módulo da velocidade angular vale $\Omega = 1\,\mathrm{rad/s}$. No referencial fixo, a trajetória observada é retilínea.

Pêndulo de Foucault

$$\frac{d^2 z'(t)}{dt^2} + 2i\,\Omega\,\frac{dz'(t)}{dt} + \left(\omega^2 - \Omega^2\right)\, z'(t) = 0,$$

Ω é o módulo da velocidade angular do referencial girante em relação ao referencial fixo e $\omega = \sqrt{g/\ell}$, é a frequência angular do pêndulo cônico.

A solução desta equação diferencial é:

$$z'(t) = C_1\, \mathrm{e}^{i(\omega-\Omega)t} + C_2\, \mathrm{e}^{-i(\omega+\Omega)t},$$

onde C_1 e C_2 são duas constantes complexas.

Convém rescrever a solução na forma:

$$z'(t) = e^{-i\Omega t}\left(C_1\, e^{i\omega t} + C_2\, e^{-i\omega t}\right) = e^{-i\Omega t}\, z(t).$$

Identificando as partes reais e imaginárias em ambos os lados desta equação escrevemos:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Omega t & \operatorname{sen}\Omega t \\ -\operatorname{sen}\Omega t & \cos\Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

onde $x(t)$ e $y(t)$ são as soluções que obtivemos anteriormente para o pêndulo cônico em um referencial inercia, a saber:

$$x(t) = x_0 \cos\omega t + \frac{v_{0x}}{\omega}\operatorname{sen}\omega t,$$

$$y(t) = y_0 \cos\omega t + \frac{v_{0y}}{\omega}\operatorname{sen}\omega t.$$

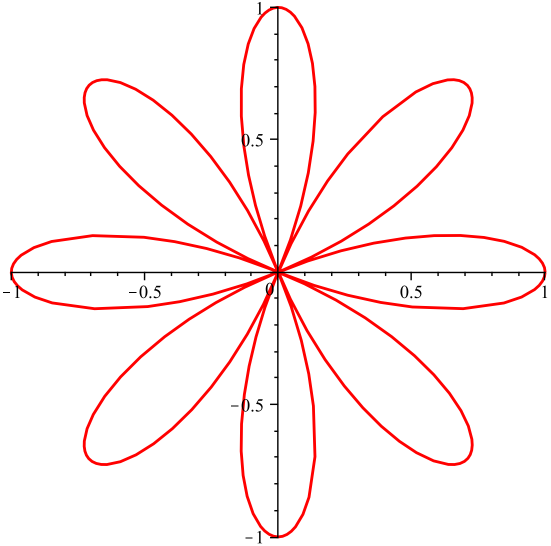

Figura: Trajetórias de um pêndulo de Foucault do ponto de vista do referencial girante.

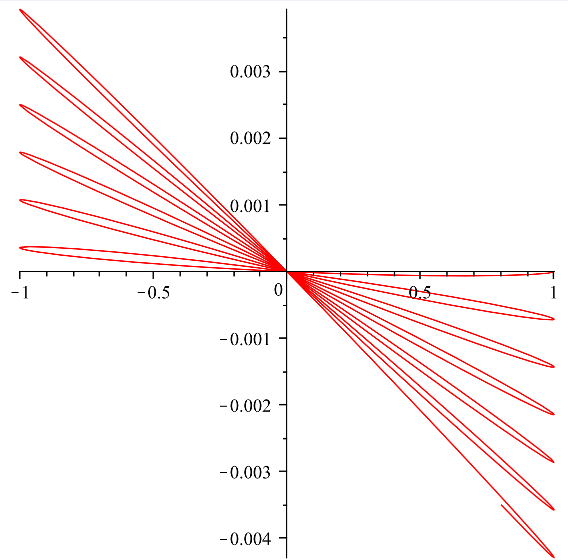

Figura: Trajetórias de um pêndulo de Foucault do ponto de vista do referencial girante.

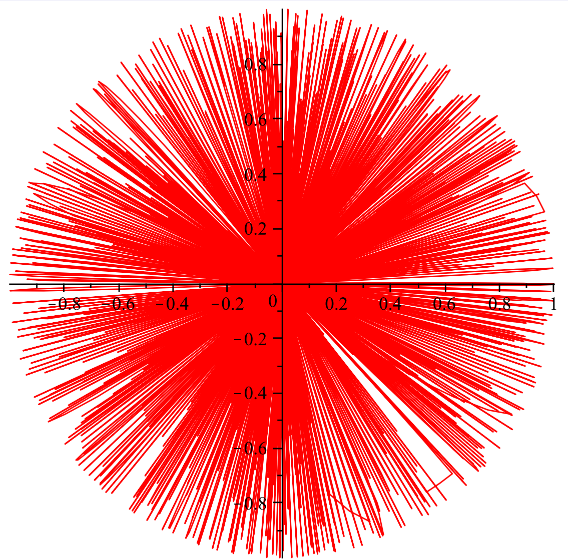

Figura: Trajetórias de um pêndulo de Foucault do ponto de vista do referencial girante.