Métodos Matemáticos 2012 –Notas de Aula

Equações Diferenciais Ordinárias I

A C Tort*

18 de setembro de 2012

Uma **equação diferencial ordinária** é uma equação que contém uma ou várias derivadas de uma função desconhecida de uma única variável independente x[1] denotada por $y(x)$ que se quer determinar. A equação pode envolver a função $y(x)$ ela própria assim como funções de x e constantes. Exemplos ($y' \equiv d/dx$, $y'' \equiv d^2/dx^2$, etc.):

$$y'(x) = \cos x,$$

$$y''(x) + 6y(x) = 0,$$

$$x^2\, y'''(x) + 2\mathrm{e}^x\, y''(x) = (x^2+2)y^2.$$

Equações diferenciais ordinárias surgem naturalmente quando tratamos com problemas de modelagem matemática, engenharia e física. Por exemplo, um cabo de sustentação em uma ponte suspensa obedece à equação diferencia ordinária:

$$y''(x) = \kappa\, \sqrt{1 + y'^{\,2}(x)}.$$

A **ordem** de uma EDO é por definição a ordem da sua derivada mais alta. Assim, a terceira EDO acima é de terceira ordem, não-linear!

Equações diferenciais de primeira ordem

Vamos começar com as EDO de primeira ordem:

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

que algumas vezes pode ser posta também na forma:

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

Uma **solução** da EDO de primeira ordem em um intervalo aberto $a < x < b$ é uma função $y = h(x)$ tal que a eq. (1) torna-se uma identidade no inetrvalo considerado se substituirmos y por $h(x)$ e $y'(x)$ por $h'(x)$. Por exemplo: $y = h(x) = x^2$ é solução da EDO $xy' = 2y$ (verifique!).

O decaimento radioativo e o problema do valor inicial

Experimentalmente, sabe-se que uma amostra de uma substância radioativa decai com uma taxa instantânea de decaimento proporcional à quantidade de de substância presente no instante t. Se tivermos uma certa quantidade inicial da substância ($t = 0$), qual será a quantidade de substância disponível em um instante $t > 0$?

O primeiro passo é descrever matematicamente o fenômeno que queremos modelar. No caso, escreveremos:

*email: tort@ufrj.br

[1]Se houver várias variáveis independentes a equação diferencial será dita **parcial**

$$\frac{dy}{dt} = -\kappa\, y, \tag{3}$$

onde $y(t)$ é a quantidade da substância no instante t. Por comodidade, trocamos x por t como variável independente. A constante κ deve ser determinada a partir dos dados experimentais. Para o rádium ${}_{88}\mathrm{Ra}^{226}$, temos: $\kappa = 1.4 \times 10^{-11}\,\mathrm{s}^{-1}$. O segundo passo é determinar a solução da nossa EDO de primeira ordem. É fácil ver, neste exemplo, que a solução será:

$$y(t) = C\mathrm{e}^{-\kappa\, t}, \tag{4}$$

onde C é uma constante. Para verificar que (4) é solução (3), calcule a primeira derivada e substitua-a juntamente com a função na EDO. Como C é arbitrária, obtivemos uma **solução geral** para o nosso modelo. O terceiro passo é determinar uma solução particular a partir de uma condição inicial. Por exemplo, suponhamos que no instante $t = 0$ temos 2 gramas de substância radioativa. Então:

$$\frac{dy}{dt} = -\kappa\, y, \qquad y(0) = 2, \tag{5}$$

é um exemplo de um **problema de valor inicial**. Fazendo $t = 0$ na eq. (4), vemos que $C = 2$ e, logo, a solução do nosso problema de valor inicial é:

$$y(t) = 2\,\mathrm{e}^{-\kappa t}, \tag{6}$$

verifique!

O problema do valor inicial

Uma EDO de primeira ordem conjuntamente com uma condição inicial é dita **problema do valor incial**. Formalmente o problema do valor inicial se escreve:

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0, \tag{7}$$

onde x_0 e y_0 são valores dados.

EDO separáveis

Em muitos casos, a EDO de primeira ordem é **separável**, isto é, pode ser posta na forma:

$$g(y)y'(x) = f(x). \tag{8}$$

Como $y' = dy/dx$, é conveniente rescrever a EDO de primeira ordem acima na forma:

$$g(y)\, dy = f(x)\, dx. \tag{9}$$

Agora podemos integrar ambos os lados e obter:

$$\int g(y)\, dy = \int f(x)\, dx\ + C, \tag{10}$$

onde C é uma constante de integração que podemos determinar com uma condição adicional (problema do valor inicial).

Exemplo 1 Considere

$$9yy' + 4x = 0, \tag{11}$$

ou ainda:

$$9y\, dy = -4x\, dx. \tag{12}$$

Integrando ambos os lados:

$$\frac{9}{2}\,y^2 = -2\,x^2 + C. \tag{13}$$

que pode ser posta na forma mais elegante:

$$\frac{4}{9}\,x^2 + y^2 = A, \tag{14}$$

onde $A = 2C/9$.

Exemplo 2 Considere:

$$y' = 1 + y^2, \tag{15}$$

ou ainda

$$\frac{dy}{1+y^2} = dx. \tag{16}$$

Integrando:

$$\arctan y = x + C, \tag{17}$$

explicitando y:

$$y = \tan\,(x + C) \tag{18}$$

Exemplo 3 *Problema de valor inicial*. Resolver o problema de valor inicial:

$$y' + 5x^4 y^2 = 0, \qquad y(0) = 1. \tag{19}$$

Separando as variáveis:

$$\frac{dy}{y^2} = -5x^4\,dx. \tag{20}$$

Integrando:

$$-\,\frac{1}{y} = -x^5 + C. \tag{21}$$

Fazendo $x - 0$, vemos que $C = -1$. Portanto,

$$y = \frac{1}{x^5+1}. \tag{22}$$

Exemplo 4 *Datação com carbono radioativo* Na atmosfera terrestre, a razão entre as quantidades de carbono radioativo ${}_6\mathrm{C}^{14}$ e carbono comum ${}_6\mathrm{C}^{12}$ é constante. Isto também é válido para os organismos vivos. Porém, quando um organismo vivo morre a absorção de ${}_6\mathrm{C}^{14}$ cessa. A idade de um fóssil pode ser determinada pela comparação entre a razão entre as quantidades de carbono radioativo ${}_6\mathrm{C}^{14}$ e carbono comum ${}_6\mathrm{C}^{12}$ medida em uma amostra do fóssil e a medida na atmosfera. Se um osso fossilizado contém apenas 25% da quantidade original de ${}_6\mathrm{C}^{14}$, qual é a sua idade? A meia-vida do ${}_6\mathrm{C}^{14}$ é de $5\,730$ anos.

Solução: o decaimento radioativo é governado pela EDO:

$$\frac{dM(t)}{dt} = -\kappa M(t), \tag{23}$$

onde $M(t)$ é a quantidade da substância radioativa no instante t, e κ é a constante de decaimento peculiar à substância em questão. A solução dessa equação é dada por:

$$M(t) = M_0\,e^{-\kappa t}, \tag{24}$$

onde M_0 é a quantidade inicial de ${}_6\mathrm{C}^{14}$. A constante κ pode ser determinada a partir da meia-vida do ${}_6\mathrm{C}^{14}$:

$$\frac{M_0}{2} = M_0\, e^{-5\,730\,\kappa}. \tag{25}$$

Calculando logarítimos:

$$\ln\,(1/2) = -5\,730\,\kappa, \tag{26}$$

ou ainda:

$$\kappa = \frac{\ln(2)}{5\,730} = 0.\,000\,121. \tag{27}$$

No instante atual t (em anos!) temos apenas 25% da quantidade original de ${}_6\mathrm{C}^{14}$, logo:

$$\frac{M_0}{4} = M_0\, e^{-0.\,000\,121\,t}, \tag{28}$$

ou

$$t = \frac{\ln\,(4)}{0.\,000\,121} = 11\,460 \text{ anos}. \tag{29}$$

Este resultado vale se a razão entre as quantidades de carbono radioativo ${}_6\mathrm{C}^{14}$ e o carbono comum ${}_6\mathrm{C}^{12}$ se mantiver ao longo do tempo. Esta hipótese pode não ser correta. Além disso é preciso levar em conta o erro experimental na determinção da constante κ, em torno de 40 anos.

Referências

[1] E. Kreyszig: *Advanced Engineering Mathematics*. (Wileyl: New York) 1993.

[2] G. E. H. Reuter: *A Elementary Differential Equations* & *Operators*. (Routledge & Kegan Paul: London) 1958.