Aula 7: Geometria das superfícies bidimensionais II; gravitação e geometria

A C Tort[1]

[1]Departmento de Física Teórica
Instituto Física – Universidade Federal do Rio de Janeiro

18 de Maio de 2010

Revisão da aula anterior: Circunferência C de um círculo geodésico de raio ℓ.

O primeiro passo para construção de um círculo de raio ℓ sobre uma *superfície arbitrária* com centro em um ponto O, é traçar algumas curvas geodésicas representativas que partem do ponto O. A seguir marcamos sobre cada uma das geodésicas, o ponto cuja distância ao ponto O é ℓ. O lugar geométrico de todos esses pontos, por definição, é o círculo que queremos.

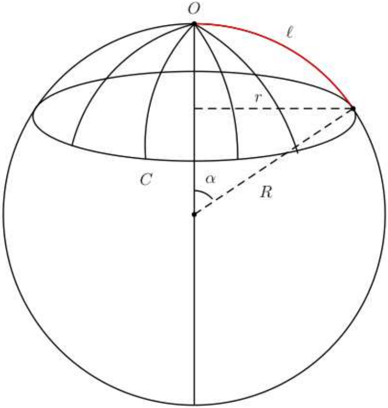


Figura: Círculo geodésico de raio ℓ (em vermelho) sobre uma esfera de raio R.

Apliquemos a construção acima à uma esfera de raio R:

$$C = 2\pi r = 2\pi R \,\text{sen}\, \alpha, \tag{1}$$

mas, por definição:

$$\alpha = \frac{\ell}{R}, \tag{2}$$

logo

$$C = 2\pi R \sin\left(\frac{\ell}{R}\right). \tag{3}$$

Vamos supor que $\ell \ll R$. Então podemos fazer uso da expansão de Taylor do seno e escrever:

$$\sin\left(\frac{\ell}{R}\right) \approx \frac{\ell}{R} - \frac{1}{3!}\frac{\ell^3}{R^3}, \tag{4}$$

segue então que a circunferência se escreve:

$$C \approx 2\pi\ell \left(1 - \frac{1}{6}\frac{\ell^2}{R^2}\right) = 2\pi r \left(1 - \frac{1}{6}\ell^2 K\right), \tag{5}$$

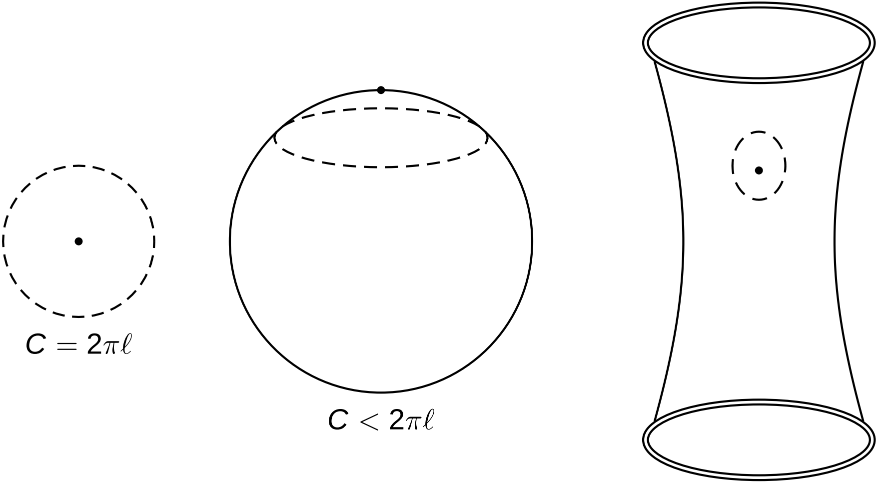
onde

$$K := \frac{1}{R^2}, \tag{6}$$

é a **curvatura** da esfera. A curvatura pode ser rescrita na forma:

$$K = \frac{3}{\pi} \lim_{\ell \to 0} \left(\frac{2\pi\ell - C}{\ell^3}\right), \tag{7}$$

Se $C < 2\pi\ell$, então a curvatura local é positiva; se $C = 2\pi\ell$, a curvatura local é nula. Finalmente, se $C > 2\pi\ell$, então a curvatura é negativa.


$C = 2\pi\ell$
$C < 2\pi\ell$

Como saber se uma superfície é realmente curva do ponto de vista de um bípede implume bidimensional? Resposta: o *Teorema Egregium*:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\sqrt{g_{11}}}{\partial x^2}\right)\right\},$$

Figura: Karl Friedrich Gauss (1777–1858) em 1828. A obra de Gauss é vastíssima e abrange muitos ramos da matemática. Boa parte dessa obra foi recuperada e publicada postumamente. Em vida, Gauss publicou relativamente pouco, *pauca sed matura* era seu lema. A contribuição de Gauss à teoria das superfícies está em dois trabalhos de 1825 e 1826.

Exemplo

Considere a superfície bidimensional definida por:

$$z - e^{-(x^2+y^2)} = 0, \quad x, y \in (-\infty, +\infty),$$

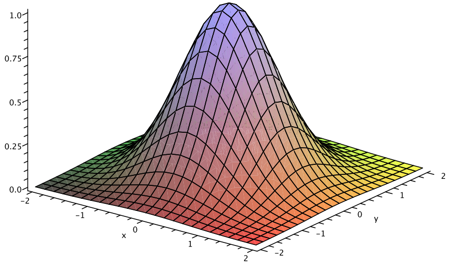


Figura: A superfície $z - e^{-(x^2+y^2)} = z - e^{-r^2} = 0$, que também pode ser escrita na forma:

$$z - e^{-r^2} = 0, \qquad r \in [0, \infty),$$

onde $r^2 = x^2 + y^2$.

Observe também que r não é diretamente acessível aos bípedes implumes bidimensionais que habitam a superfície dada.

Para medir r temos que medir uma circunferência C tal que $r = C/(2\pi)$.

A distância ao quadrado entre dois pontos sobre essa superfície infinitesimalmente próximos obedece à relação:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (dr)^2 + r^2\,(d\theta)^2 + (dz)^2,$$

(coordenadas cilíndricas). Como:

$$dz = -2\,\mathrm{e}^{-2r}\,dr,$$

segue que:

$$(ds)^2 = (1 + 4\,r^2\,\mathrm{e}^{-2r^2})\,(dr)^2 + r^2\,(d\theta)^2.$$

Fazendo as identificações: $x^1 = r$ e $x^2 = \theta$, vemos que o tensor métrico correspondente se escreve:

$$[\![g]\!] = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4\,r^2\,\mathrm{e}^{-2r^2} & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Observe que quando $r \to \infty$, temos $(ds)^2 \to (dr)^2 + r^2\,(d\theta)^2$, que corresponde a uma métrica plana.

Como a métrica não depende do ângulo $\theta = x^2$, o *Teorema Egregium* assume a forma particular:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial x^1}\right),$$

que nos dá

$$K = -\frac{1}{\sqrt{\left(1+4\,r^2\,\mathrm{e}^{-r^2}\right)r^2}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\sqrt{1+4\,r^2\,\mathrm{e}^{-r^2}}}\frac{\partial\sqrt{r^2}}{\partial r}\right).$$

Efetuando as derivadas e simplificando obtemos:

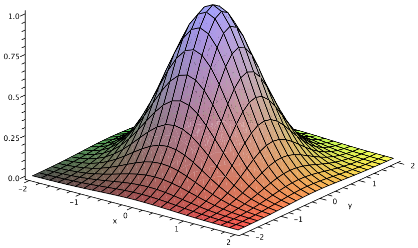
$$K = -\frac{4\,\mathrm{e}^{-2\,r^2}\left(-1+2\,r^2\right)}{\left(1+4\,r^2\,\mathrm{e}^{-2\,r^2}\right)^2}.$$

Se a partir do ponto ($x = 0, y = 0, z = 1/e$) construirmos com as geodésicas dessa superfície círculos geodésicos de raio ℓ e circunferência $2\pi\ell$, como no caso da esfera, a distância entre duas circunferências geodésicas infinitesimalmente próximas será dada por:

$$d\ell = \left(1 + 4\,r^2\,\mathrm{e}^{-r^2}\right)^{1/2}\,dr,$$

onde, não custa insistir, r é defindo por $r = C/(2\pi)$, com C medido sobre a superfície com uma trena, (lembre-se: você é um bípede implume bidimensional!).

No limite $r \to \infty$, a curvatura é nula e a superfície é plana.



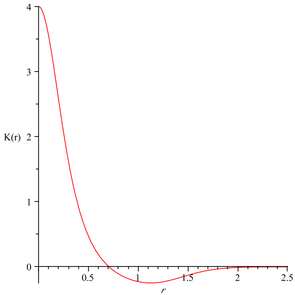


Figura: A superfície $z - e^{-(x^2+y^2)} = z - e^{-r^2} = 0$, e sua curvatura gaussiana. Observe que a curvatura muda de sinal e que para $r \to \infty$, $K \to 0$, e a superfície torna-se plana.

A curvatura gaussiana é uma propriedade intrínsica!!!

A curvatura gaussiana é uma propriedade intrínsica das superfícies. Ela não depende de uma escolha particular de sistemas de coordenadas.

Exemplo: em coordenadas esféricas, a distância entre dois pontos sobre a esfera infinitesimalmente próximos ao quadrado é dada por:

$$(d\mathbf{s})^2 = R^2\,(d\theta)^2 + R^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\,(d\phi)^2,$$

onde R é o raio da esfera, θ é o ângulo polar e ϕ é o ângulo azimutal.

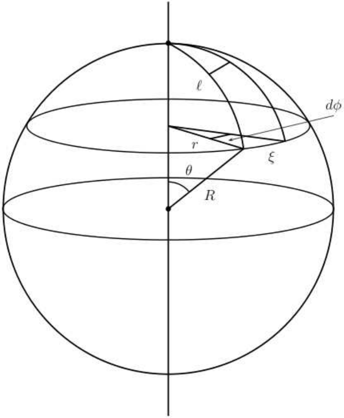
Se no lugar dos ângulos θ e ϕ, utilizarmos a coordenada r definida por $r = C/(2\pi)$, a mesma quantidade será dada por:

$$(d\mathbf{s})^2 = \frac{(dr)^2}{1 - \dfrac{r^2}{R^2}} + r^2\,(d\phi)^2,$$

Quaisquer que sejam as coordenadas, desde que localizem corretamente um ponto da superfície da esfera, o *Teorema Egregium* nos dirá que a curvatura gaussiana da esfera vale $1/R^2$!

Desvio geodésico I

Outro modo de perceber a curvatura de uma superfície bidimensional é estudar como duas geodésicas próximas afastam-se ou aproximam-se uma da outra. Isto nos leva à idéia do **desvio geodésica**.



Consideremos dois arcos de grande círculo de comprimento ℓ, isto é duas geodésicas, sobre a superfíce de uma esfera de raio R que partem de um ponto comum. Da figura, vemos que o comprimento de arco ξ subentendido pelo ângulo $d\phi$ se escreve:

$$\xi = r\, d\phi = R \operatorname{sen}\theta = R \operatorname{sen}\left(\frac{\ell}{R}\right). \tag{8}$$

Derivando em relação a ℓ duas vezes obtemos:

$$\frac{d^2\xi}{d\ell^2} = -\frac{d\phi}{R} \operatorname{sen}\left(\frac{\ell}{R}\right). \tag{9}$$

Multiplicando e dividindo por R e lembrando que a curvatura gaussiana da esfera é $1/R^2$:

$$\frac{d^2\xi}{d\ell^2} = -K\,\xi, \tag{10}$$

que é a equação da separação ou desvio geodésico.

Exemplo

Considere $K > 0$. A solução geral da equação do desvio geodésico se escreve:

$$\xi(\ell) = \xi_0 \cos\left(\sqrt{K}\,\ell + \alpha\right),$$

onde ξ_0 e α são constantes que devem ser determinadas com as condições de contorno do problema.

Se supusermos que as geodésicas partem de um ponto comum, então uma solução (falta determinar ξ_0!) será:

$$\xi(\ell) = \xi_0 \sin\left(\sqrt{K}\,\ell\right).$$

A curvatura é dada por:

$$K = \frac{1}{\ell^2} \, \text{arcsen}^2 \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right).$$

Considere duas geodésicas que partem do pólo norte da Terra. Acompanhe essas geodésicas até que interceptem a linha do Equador, quando então a separação entre elas vale ξ_0. Sobre a linha do Equador, $\xi = \xi_0$ e $\ell = (\pi/2)R$.

Segue então que:

$$K = \frac{1}{R^2_{\text{Terra}}} \approx \frac{1}{(6 \times 10^6 \, \text{m})^2} = 1 \times 10^{-12} \, /\text{m}^2.$$

Curvatura em dimensões superiores

Superfícies imersas em espaços de dimensões maiores do que três – o que significa que essas superfícies têm dimensões maiores do que dois – , também podem ser estudadas com métodos analíticos, isto é, com a geometria diferencial. Entretanto, este é um problema muito mais complexo do que o das superfícies estudadas por Gauss. Em superfícies com dimensões superiores a dois não é possível descrever a curvatura com apenas uma função, a curvatura gaussiana K computada com o *Teorema Egregium*. Há necessidade de inventar outras ferramentas. Bernhard **Riemann**, Elwin Bruno **Christoffel**, Gregorio **Ricci**-Cubastro, Tulio **Levi–Civita**, Élie **Cartan**, e muitos outros são alguns dos grandes matemáticos que inventaram as ferramentas que utilizamos para investigar a curvatura dessas superfícies.

Roteiro para o estudo da curvatura em dimensões superiores

Dada uma métrica $g_{\alpha\beta}$, calculamos:

(i) os símbolos de Christoffel $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$:

$$\Gamma \sim g, \quad \partial g/\partial x;$$

(ii) o tensor de Riemann $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} \sim \Gamma, \quad \partial\Gamma/\partial x \sim g, \quad \partial g/\partial x, \quad \partial^2 g/\partial x^2;$$

(iii) o tensor de Ricci $R_{\alpha\beta}$;

(iv) o escalar de curvatura $R = \sum_{\alpha} R^{\alpha}_{\alpha}$;

(v) a equação da geodésica.

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{d\tau^2} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\frac{dx^{\beta}}{d\tau}\frac{dx^{\gamma}}{d\tau} = 0.$$

As equações de Einstein para o campo gravitacional

A física acontece quando relaciona-se a métrica com a distribuição de energia-matéria por meio das equações de campo de Einstein:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = \kappa T_{\alpha\beta};$$

onde $T_{\alpha\beta}$ descreve a distribuição de energia-matéria. Uma vez resolvidas (uma tarefa na maior parte das vezes hercúlea!), as equações de Einstein fornecem $g_{\alpha\beta}$.

Fim da aula 7