

Aula 6: Geometria das superfícies bidimensionais

A C Tort¹

¹Departamento de Física Teórica
Instituto Física – Universidade Federal do Rio de Janeiro

28 de Abril de 2010

Superfícies bidimensionais

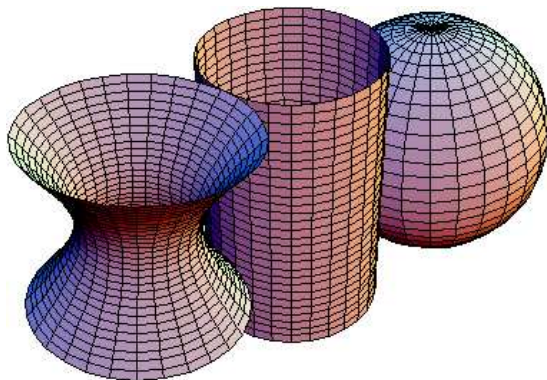


Figura: Superfícies hiperbólica, cilíndrica e esférica. A curvatura da superfície cilíndrica é nula. A superfície hiperbólica tem curvatura negativa e a esférica positiva.



Figura: Curvatura!.

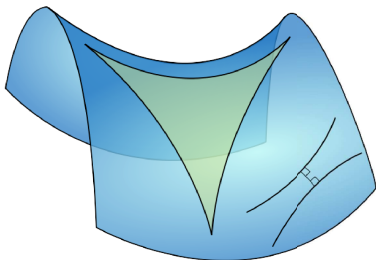
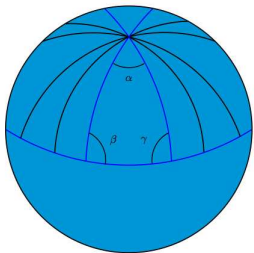
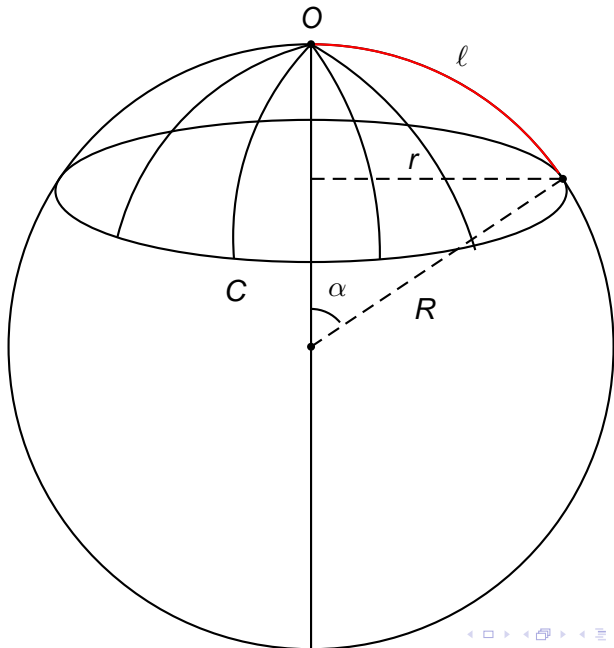


Figura: Sobre a superfície de uma esfera, a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico, $\alpha + \beta + \gamma$, é maior do que 180° . Sobre uma superfície em forma de sela, a soma dos ângulos internos é menor do que 180° .

Circunferência C de um círculo geodésico de raio ℓ . O primeiro passo para construção de um círculo de raio ℓ sobre uma *superfície arbitrária* com centro em um ponto O , é traçar algumas curvas geodésicas representativas que partem do ponto O . A seguir marcamos sobre cada uma das geodésicas, o ponto cuja distância ao ponto O é ℓ . O lugar geométrico de todos esses pontos, por definição, é o círculo que queremos.



Aplicamos a construção acima à uma esfera de raio R :

$$C = 2\pi r = 2\pi R \operatorname{sen} \alpha, \quad (1)$$

mas, por definição:

$$\alpha = \frac{\ell}{R}, \quad (2)$$

logo

$$C = 2\pi R \sin \left(\frac{\ell}{R} \right). \quad (3)$$

Vamos supor que $\ell \ll R$. Então podemos fazer uso da expansão de Taylor do seno e escrever:

$$\sin \left(\frac{\ell}{R} \right) \approx \frac{\ell}{R} - \frac{1}{3!} \frac{\ell^3}{R^3}, \quad (4)$$

segue então que a circunferência se escreve:

$$C \approx 2\pi\ell \left(1 - \frac{1}{6} \frac{\ell^2}{R^2}\right) = 2\pi r \left(1 - \frac{1}{6} \ell^2 K\right), \quad (5)$$

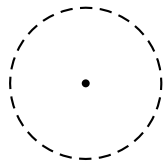
onde

$$K := \frac{1}{R^2}, \quad (6)$$

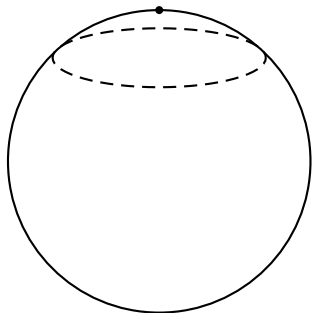
é a **curvatura** da esfera. A Eq. (5) pode ser reescrita na forma:

$$K = \frac{3}{\pi} \lim_{\ell \rightarrow 0} \left(\frac{2\pi\ell - C}{\ell^3} \right), \quad (7)$$

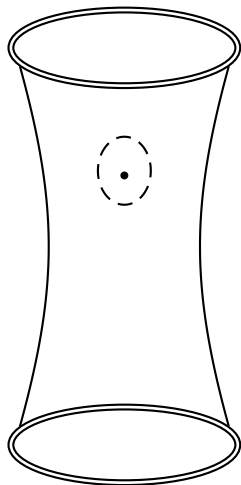
que é uma forma mais útil para a identificação do tipo de curvatura que estamos com a qual estamos lidando, pois nessa forma, podemos estudar a curvatura local de superfícies arbitrárias, como por exemplo, uma superfície em forma de sela de cavalo, ou hiperbólica. Se $C < 2\pi\ell$, então a curvatura local é positiva; se $C = 2\pi\ell$, a curvatura local é nula. Finalmente, se $C > 2\pi\ell$, então a curvatura é negativa.



$$C = 2\pi l$$



$$C < 2\pi l$$



A abordagem à curvatura que desenvolvemos até aqui é chamada *geométrica*. Esta abordagem fundamenta-se na definição de Gauss, Eq. (7). Entretanto, dependendo da superfície bidimensional que estamos estudando a definição de Gauss pode ser de difícil aplicação prática. Há, felizmente, outra abordagem à curvatura das superfícies bidimensionais que baseia-se no estudo da distância entre dois pontos da superfície curva infinitesimalmente próximos. Essa distância pode ser estudada por meio de um objeto matemático chamado: **métrica**. Essa abordagem foi desenvolvida por Gauss por volta de 1827 e chama-se *geometria diferencial*.

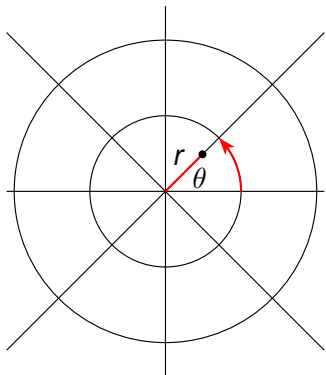
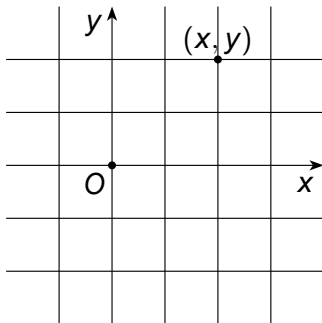
A distância entre dois pontos fixos do plano infinitesimalmente próximos um do outro em cartesianas é dada por (Pitágoras!):

$$(ds^2) = (dx)^2 + (dy)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2, \quad (8)$$

onde $g_{11} = 1$ e $g_{22} = 1$, são componentes de um objeto com dois índices inferiores cristianizado como **tensor métrico** ou **métrica**.

Tensores métricos podem ser representados por matrizes. No caso:

$$\llbracket g \rrbracket = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$



A relação entre as coordenadas cartesianas e as plano-polares é:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta, \quad (10)$$

ou, fazendo $x^1 = x$, $x^2 = y$, $\bar{x}^1 = r$, e $\bar{x}^2 = \theta$,

$$x^1 = \bar{x}^1 \cos \bar{x}^2, \quad x^2 = \bar{x}^1 \operatorname{sen} \bar{x}^2. \quad (11)$$

A transformação inversa se escreve:

$$\bar{x}^1 = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} \quad \text{ou,} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad (12)$$

e:

$$\tan \bar{x}^2 = \frac{x^2}{x^1} \quad \text{ou,} \quad \tan \theta = \frac{y}{x}. \quad (13)$$

Para calcular a distância entre dois pontos infinitesimalmente próximos em coordenadas plano-polares escrevemos:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta = \cos \theta dr - r \operatorname{sen} \theta d\theta, \quad (14)$$

e:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta = \operatorname{sen} \theta dr + r \cos \theta d\theta \quad (15)$$

Segue que:

$$(dx)^2 + (dy)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2, \quad (16)$$

ou:

$$\left(dx^1\right)^2 + \left(dx^2\right)^2 = \left(d\bar{x}^1\right)^2 + (\bar{x}^1)^2 \left(d\bar{x}^2\right)^2, \quad (17)$$

É fácil escrever o tensor métrico associado com as coordenadas plano-polares:

$$\llbracket g \rrbracket = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\bar{x}^1)^2 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

O fato de utilizarmos coordenadas plano-polares para localizar um ponto no plano não significa que este tenha curvatura. Da mesma forma, em três dimensões, usar coordenadas esféricas para localizar um ponto do espaço também não significa que este seja curvo. Dada uma métrica, como saber se não existe um truque, uma transformação mágica, que mostre que a superfície é na verdade intrinsecamente plana, em outras palavras: como saber se uma superfície é realmente curva do ponto de vista de um bípede implume bidimensional?

A resposta foi dada pelo grande Gauss por meio do *Teorema Egregium*. A fórmula de Gauss nos dá a curvatura local intrínseca da superfície em termos das componentes da métrica e de suas derivadas de primeira e segunda ordem. Em coordenadas ortogonais ($g_{12}(x^1, x^2) = g_{21}(x^1, x^2) = 0$), o teorema, sumarizado na equação que se segue, envolve apenas as componentes $g_{11}(x^1, x^2)$ e $g_{22}(x^1, x^2)$. Ei-lo:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial x^2} \right) \right\}, \quad (19)$$

Mais sobre o tema na próxima aula!

Fim da aula 6