Aula 4: Dinâmica relativística

A C Tort[1]

[1]Departmento de Física Teórica
Instituto Física – Universidade Federal do Rio de Janeiro

30 de Março de 2010

Dinâmica relativística

A equação de movimento de uma partícula na dinâmica relativística se escreve:

$$m\,\frac{d\,\mathbf{u}}{d\tau} = \mathbf{F}, \tag{1}$$

onde m é a massa inercial da partícula, também chamada **massa de repouso**. A quadriaceleração fica definida por:

$$\mathbf{a} := \frac{d\,\mathbf{u}}{d\tau}. \tag{2}$$

Isto significa que podemos escrever também:

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}. \tag{3}$$

A normalização da velocidade implica em:

$$\frac{d}{d\tau}\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) = 0. \tag{4}$$

Como:

$$m\,\frac{d\,\mathbf{u}}{d\tau}\cdot\mathbf{u} = \frac{m}{2}\,\frac{d}{d\tau}\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) = \mathbf{F}\cdot\mathbf{u}, \tag{5}$$

segue então que:

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{u} = 0. \tag{6}$$

Isto significa que a equação de movimento relativística leva a três equações de movimento independentes.

Quadrimomento

Por definição:

$$\mathbf{p} := m\,\mathbf{u}. \tag{7}$$

A equação de movimento pode ser então rescrita na forma:

$$\frac{d\,\mathbf{p}}{d\tau} = \mathbf{F}. \tag{8}$$

Temos também:

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = \mathbf{p}^2 = -m^2c^2. \tag{9}$$

Como sabemos as componentes da quadrivelocidade, podemos escrever:

$$\mathbf{p} \equiv p^\alpha = \left(\gamma mc, \gamma m\vec{v}\right). \tag{10}$$

A componente p^0 pode ser relacionada com a energia da partícula:

$$\begin{aligned} p^0 &= \gamma mc = mc\left(1-\beta^2\right)^{-1/2} \\ &= mc\left(1+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{3}{8}\beta^4+O(\beta^6)\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Multiplicando ambos os lados por c:

$$cp^0 = mc^2 + \frac{1}{2}v^2 + \cdots . \tag{12}$$

Temos um termo constante, mc^2, a energia de repouso; um termo familiar, a energia cinética não-relativística, e termos de ordem mais alta que dependem da velocidade da partícula – correções relativística. Portanto, é plausível definir: $E := cp^0$, como a energia relativística de uma partícula livre e escrever:

$$\mathbf{p} \equiv p^\alpha = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right). \tag{13}$$

Agora que sabemos as componentes do quadrimomento podemos usar a Eq. (9) e mostrar facilmente que:

$$E = \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^2}. \tag{14}$$

A energia cinética relativística é definida por:

$$K := E - mc^2 = \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^2} - mc^2. \tag{15}$$

A quadriforça:

$$(F^0, \vec{F}) = \left(\frac{d\,E/c}{d\tau}, \frac{d\,\vec{p}}{d\tau} \right) = \left(\frac{\gamma}{c} \frac{d\,E}{dt}, \gamma \frac{d\,\vec{p}}{dt} \right). \tag{16}$$

Estabelecendo as correspondências:

$$F^0 \to \frac{\gamma}{c} \frac{d\,E}{dt} = \frac{\gamma}{c} \vec{F} \cdot \vec{v},$$

$$\vec{F} \to \gamma \frac{d\,\vec{p}}{dt} = \gamma \vec{F}.$$

A quadriforça se escreve então:

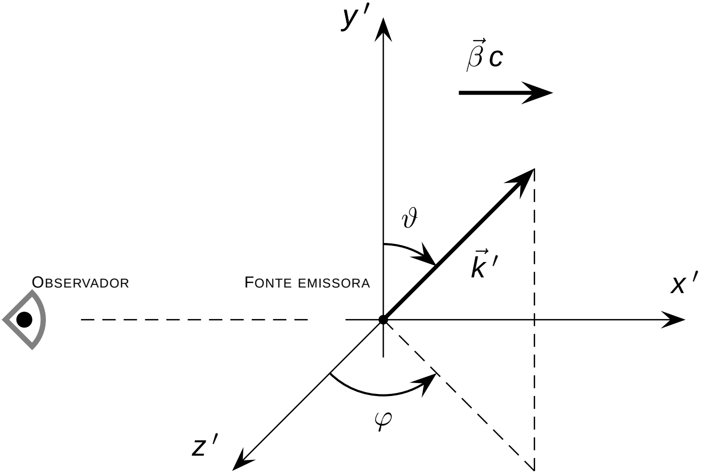
$$\mathbf{F} = \left(\gamma\vec{F} \cdot \vec{v}, \gamma\vec{F} \right). \tag{17}$$

A versão relativística do teorema trabalho-energia cinética leva a um célebre resultado:

$$\Delta K = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \gamma m c^2 - m c^2. \tag{18}$$

Exemplos:

- Partícula em campo magnético;
- Movimento hiperbólico.


y'
$\vec{\beta}c$
ϑ
$\vec{k}'$
OBSERVADOR
FONTE EMISSORA
x'
φ
z'

Em relação ao referencial $O'x'y'$, veja a Figura 9:

$$
\begin{aligned}
k'^0 &= k' \\
k'^1 = k'_x &= k' \operatorname{sen}\vartheta' \operatorname{sen}\varphi', \\
k'^2 = k'_y &= k' \cos\varphi', \\
k'^3 = k'_z &= k' \operatorname{sen}\vartheta' \cos\varphi',
\end{aligned}
$$

onde $k' = \|\vec{k}'\| = \omega'/c$. Portanto, quadrivetor de onda associado com a onda emitida no sistema $O'x'y'$ se escreve:

$$
k'^{\alpha} = \left(\frac{\omega'}{c}, \frac{\omega'}{c} \operatorname{sen}\vartheta' \operatorname{sen}\varphi', \frac{\omega'}{c} \cos\varphi', \frac{\omega'}{c} \operatorname{sen}\vartheta' \cos\varphi' \right). \tag{19}
$$

A componente temporal do quadrivetor de onda no referencial do emissor e e no referencial do observador estão relacionadas por:

$$k^0 = \gamma\, k^{0\,\prime} + \gamma\,\beta\, k^{\,\prime\,1}, \tag{20}$$

ou ainda:

$$\frac{\omega}{c} = \gamma\,\frac{\omega^{\,\prime}}{c} + \frac{\omega^{\,\prime}}{c}\,\gamma\,\beta\,\mathrm{sen}\,\vartheta^{\,\prime}\,\mathrm{sen}\,\varphi^{\,\prime}. \tag{21}$$

Lembrando que a frequência angular ω e a frequência diferem por um fator multiplicativo igual a 2π, escrevemos:

$$\nu_{\text{Obs}} = \gamma\, \nu_{\text{Fonte}} \, \left(1 + \beta \,\text{sen}\, \vartheta' \,\text{sen}\, \varphi'\right). \tag{22}$$

Este resultado vale para o caso em que o observador vê a fonte emissora afastar-se. Se a fonte aproximar-se do observador deve-se fazer a troca $\beta \to -\beta$.

Considere o caso em que a fonte afasta-se do observador como na Figura 9, mas emite no sentido oposto ao de sua velocidade. Neste caso, $\vartheta' = \pi/2$, e $\varphi' = -\pi/2$. A Eq. (22) se escreve:

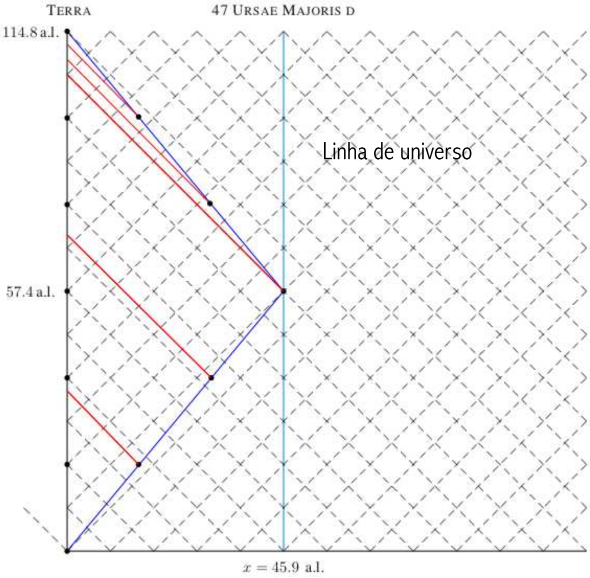
$$\nu_{\text{Obs}} = \gamma\, \nu_{\text{Fonte}}\, (1-\beta) = \nu_{\text{Fonte}}\, \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}}. \tag{23}$$

Este é o efeito Doppler longitudinal. Se $\vartheta' = 0$, ou $\varphi' = 0$, a Eq. (22) leva à:

$$\nu_{\text{Obs}} = \gamma\, \nu_{\text{Fonte}} = \frac{\nu_{\text{Fonte}}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{24}$$

Este é o efeito Doppler transverso.

O efeito Doppler e o paradoxo dos gêmeos



Fim da aula 4