Aula 3: O espaçotempo da relatividade restrita

Diagramas espaçotempo; quadrivetores

A C Tort[1]

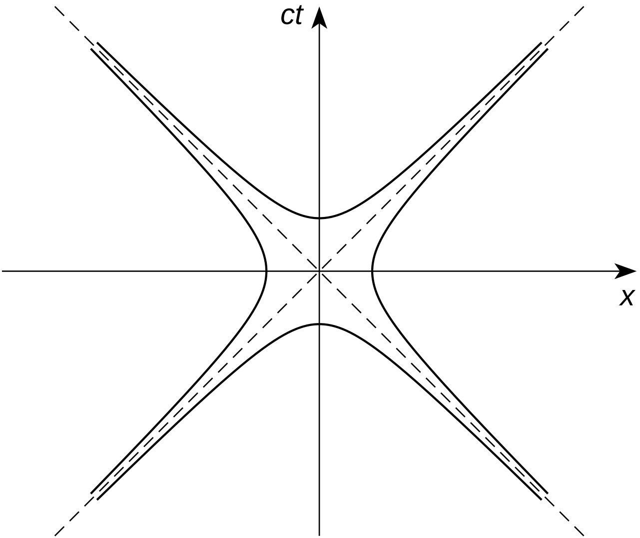
[1]Departmento de Física Teórica
Instituto Física – Universidade Federal do Rio de Janeiro

23 de Março de 2010

O espaçotempo de Minkowski

As transformações de Lorentz (redescsobertas por Einstein) mostram que o tempo deve ser tratado como uma coordenada ordinária. Isto permite imaginar uma fusão do espaço e do tempo em uma única entidade: o espaçotempo. Foi Hermann Minkowski, antigo professor de Einstein na ETH, quem introduziu e desenvolveu matematicamente o conceito em um ensaio de 1908. A citação abaixo é famosa.

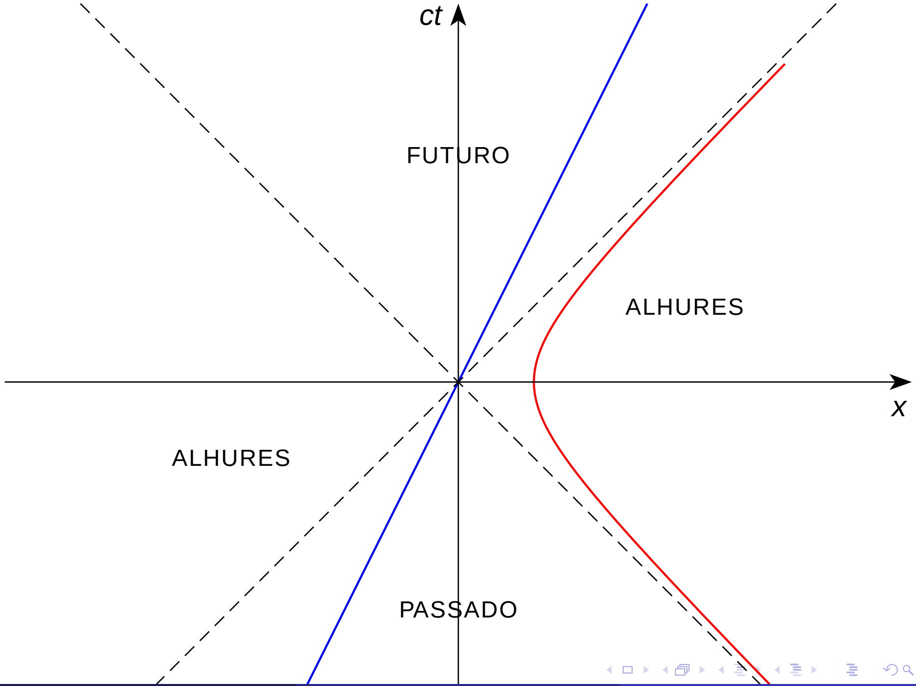
> *As visões de espaço e de tempo que quero apresentar-lhes brotaram do solo da física experimental, e nisto reside sua força. Elas são radicais. Doravante, o espaço em si mesmo e o tempo em si mesmo estão condenados a esmaecer transformando-se em simples sombras e somente uma espécie de união dos dois persevará uma realidade independente.*


ct
x

Invariante de Lorentz fundamental:

$$(d\,s)^2 = -c^2\,(d\,t)^2 + (d\,x)^2 + (d\,y)^2 + (d\,z)^2\,. \tag{1}$$

O invariante $(d\,s)^2$, pode ser negativo, nulo ou positivo. **tipo tempo** se $(d\,s)^2 < 0$, **tipo luz** se $(d\,s)^2 = 0$, e **tipo espaço** se $(d\,s)^2 > 0$. Uma trajetória no diagrama espaçotempo é chamada **linha de universo** ou **linha de mundo**.


ct
FUTURO
ALHURES
x
ALHURES
PASSADO

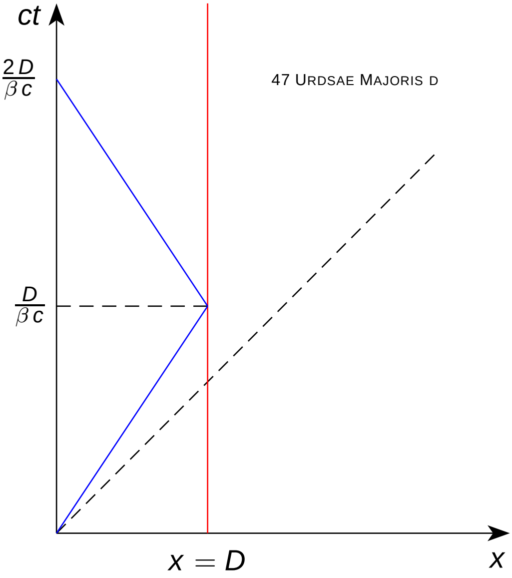
A duração medida por um relógio que se move ao longo da linha de universo é definido por:

$$(d\,\tau)^2 := -\frac{(d\,s)^2}{c^2}. \tag{2}$$

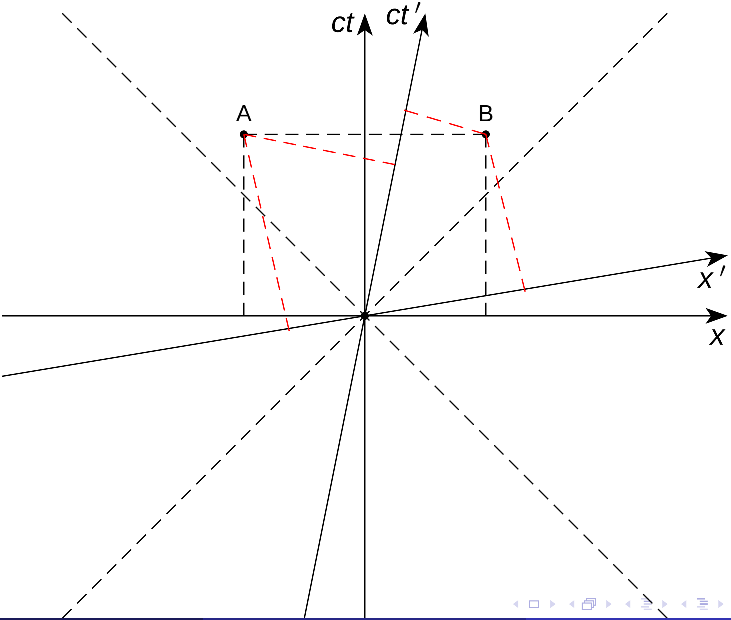
Este é o **tempo próprio** e, por construção, é um invariante de Lorentz.

O tempo próprio é sempre menor do que o intervalo de tempo coordenado dt.

Paradoxo dos gêmeos



Simultaneidade



Quadrivetores

os quadrivetores unitários se escrevem:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e_0} &= (1, 0, 0, 0)\,, &(3)\\
\mathbf{e_1} &= (0, 1, 0, 0)\,, &(4)\\
\mathbf{e_2} &= (0, 0, 1, 0)\,, &(5)\\
\mathbf{e_3} &= (0, 0, 0, 1)\,. &(6)\\
& &(7)
\end{aligned}
$$

Um quadrivetor **a** pode ser expresso como:

$$\mathbf{a} = a^t\,\mathbf{e_t} + a^x\,\mathbf{e_x} + a^y\,\mathbf{e_y} + a^z\,\mathbf{e_z}\,, \tag{8}$$

ou de forma equivalente:

$$\mathbf{a} = a^0\,\mathbf{e_0} + a^1\,\mathbf{e_1} + a^2\,\mathbf{e_2} + a^2\,\mathbf{e_3} = \sum_{\alpha=1}^{3} a^\alpha\,\mathbf{e}_\alpha. \tag{9}$$

A convenção de Einstein:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} a^{\alpha}\,\mathbf{e}_{\alpha} \equiv a^{\alpha}\,\mathbf{e}_{\alpha}; \tag{10}$$

logo, podemos escrever:

$$\mathbf{a} = a^{\alpha}\,\mathbf{e}_{\alpha}. \tag{11}$$

Há formas alternativas muito comuns de representar quadrivetores:

$$a^{\alpha} = (a^{t}, a^{x}, a^{y}, a^{z}); \quad a^{\alpha} = (a^{0}, a^{i}); \quad a^{\alpha} = (a^{0}, \vec{a}), \tag{12}$$

Exemplos

O quadrivetor de posição em relação a um sistema inercial é definido por:

$$\mathbf{x} = x^0\,\mathbf{e_0} + x^1\,\mathbf{e_1} +^2\,\mathbf{e_2} + z^3\,\mathbf{e_3},$$

onde $x^0 := ct$. Ou ainda:

$$x^\alpha = (x^0, \vec{x}).$$

A separação entre dois eventos A e B no espaçotempo é definida por:

$$\Delta\,\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\mathrm{B}} - \mathbf{x}_{\mathrm{A}},$$

ou:

$$\Delta\,x^\alpha = x^\alpha_{\mathrm{B}} - x^\alpha_{\mathrm{A}}.$$

(Esta última equação equivale a quatro equações.)

A característica marcante dos quadrivetores é o seu **produto escalar** que é definido por:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := -a^0\, b^0 + a^1\, b^1 + a^2\, b^2 + a^3\, b^3. \tag{13}$$

O produto escalar tem as propriedades usuais:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}; & (14)\\ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}; & (15)\\ (\lambda\, \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} &= \lambda\, (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,. & (16) \end{aligned}$$

Com as propriedades do produto escalar podemos escrever (soma dupla impícita):

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (a^{\alpha}\,\mathbf{e}_{\alpha})\cdot\left(b^{\beta}\,\mathbf{e}_{\beta}\right) = (\mathbf{e}_{\alpha}\cdot\mathbf{e}_{\beta})\,a^{\alpha}\,b^{\beta}, \tag{17}$$

Definindo:

$$\eta_{\alpha\beta} := \mathbf{e}_{\alpha}\cdot\mathbf{e}_{\beta}, \tag{18}$$

escrevemos:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \eta_{\alpha\beta}\,a^{\alpha}\,b^{\beta}. \tag{19}$$

A soma dupla pode ser desenvolvida e o resultado é:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= \eta_{00}\,a^0\,b^0 + \eta_{01}\,a^0\,b^1 + \eta_{02}\,a^0\,b^2 + \eta_{03}\,a^0\,b^3 \\
&+ \eta_{10}\,a^1\,b^0 + \eta_{11}\,a^1\,b^1 + \eta_{12}\,a^1\,b^2 + \eta_{13}\,a^1\,b^3 \\
&+ \eta_{20}\,a^2\,b^0 + \eta_{21}\,a^2\,b^1 + \eta_{22}\,a^2\,b^2 + \eta_{23}\,a^2\,b^3 \\
&+ \eta_{30}\,a^3\,b^0 + \eta_{31}\,a^3\,b^1 + \eta_{32}\,a^3\,b^2 + \eta_{33}\,a^3\,b^3. \qquad (20)
\end{aligned}$$

Mas (o PE é comutativo!)

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\beta\alpha}. \qquad (21)$$

e como:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} := -a^0\,b^0 + a^1\,b^1 + a^2\,b^2 + a^3\,b^3. \qquad (22)$$

Todos os coeficientes $\eta_{\alpha\beta}$ devem ser nulos, exceto os coeficientes para os quais $\alpha = \beta$. Segue também da definição do produto escalar que: $\eta_{00} = -1$, $\eta_{11} = 1$, $\eta_{22} = 1$, e $\eta_{33} = 1$.

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Frente às transformações de Lorentz na direção do eixo x que vimos anteriormente, um quadrivetor deve transformar-se como o quadrivetor de posição x^α, isto é:

$$
\begin{aligned}
a'^{0} &= \gamma\, a^0 - \gamma\beta\, a^1 && (24)\\
a'^{1} &= -\gamma\,\beta\, a^0 + \gamma\, a^1 && (25)\\
a'^{2} &= a^2 && (26)\\
a'^{3} &= a^3 && (27)\\
& && (28)
\end{aligned}
$$

A quadrivelocidade

Como na geometria euclidiana, convém descrever a curva no espaço quadridimensional por meio de uma representação paramétrica bem definida. Neste caso, a curva fica descrita por:

$$x^\alpha = x^\alpha(\sigma), \tag{29}$$

onde σ é um parâmetro conveniente. Muitas são as possibilidades de escolha do parâmetro, mas uma delas é a natural: o tempo próprio τ que relaciona-se com a distância percorrida pela partícula ao longo da sua linha de universo medida a partir de um ponto de referência. Neste caso, a representação paramétrica da linha de mundo se escreve:

$$x^\alpha = x^\alpha(\tau). \tag{30}$$

O parâmetro τ pode ser medido com um relógio que viaja com a partícula.

A quadrivelocidade é definida por:

$$\mathbf{u} := \frac{d\,\mathbf{x}}{d\tau}, \tag{31}$$

ou em termos das componentes:

$$u^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{d\tau}. \tag{32}$$

As quatro componentes da quadrivelocidade se escrevem:

$$\begin{aligned} u^0 &= \frac{dx^0}{d\tau} = c\,\frac{dt}{d\tau} = \gamma\,c, && (33)\\ u^1 &= \frac{dx^1}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\,\frac{dx^1}{dt} = \gamma\,v^1 = \gamma v_x\,, && (34)\\ u^2 &= \frac{dx^2}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\,\frac{dx^2}{dt} = \gamma\,v^2 = \gamma v_y\,, && (35)\\ u^3 &= \frac{dx^3}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\,\frac{dx^3}{dt} = \gamma\,v^3 = \gamma v_z\,, && (36)\\ & && (37) \end{aligned}$$

ou ainda:

$$\mathbf{u} = (\gamma\,c, \gamma\,\vec{v}). \tag{38}$$

A quadrivelocidade satisfaz à relação:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = -c^2. \tag{39}$$

Fim da aula 3