Aula 2: Relatividade Restrita

Postulados e transformações de Lorentz

A C Tort[1]

[1]Departmento de Física Teórica
Instituto Física – Universidade Federal do Rio de Janeiro

17 de Março de 2010

Roteiro

A origem da RR

A Relatividade Restrita ou Especial surge para resolver problemas teóricos suscitados pela teoria eletromagnética de Maxwell:

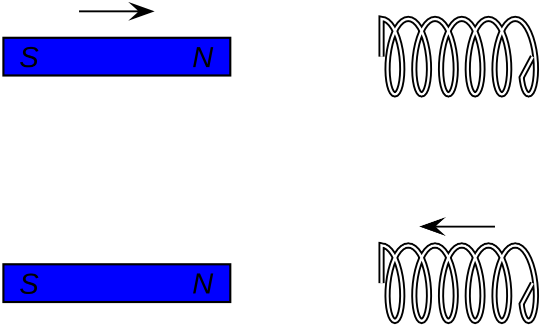


Figura: A corrente induzida no condutor é experimentalmente a mesma.

Se supusermos que o condutor tem uma resistência $\mathcal{R}$, então a corrente $i(t)$ induzida no condutor será dada por:

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{\mathcal{R}} = -\frac{1}{\mathcal{R}}\frac{d\Phi(t)}{dt}. \tag{1}$$

Em um caso a f.e.m. relaciona-se com o campo magnético:

$$i(t) = -\frac{1}{\mathcal{R}}\oint_{\text{condutor}} (\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot d\boldsymbol{\ell}. \tag{2}$$

e no outro com o campo elétrico.

$$i'(t) = -\frac{1}{\mathcal{R}}\oint_{\text{condutor}} \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\ell}. \tag{3}$$

Mas, experimentalmente:

$$i(t) = i'(t) \text{ !!!} \tag{4}$$

E, *en passant*:

> *Exemplos deste tipo – em conjunto com tentativas mal sucedidas de detectar um movimento da Terra relativo ao “meio luminífero ”– levam à conjectura de que não apenas os fenômenos da mecânica, mas também os da eletrodinâmican não têm propriedades que correspondam ao conceito de repouso absoluto.*

Os postulados da RR

Ao contrário, as mesmas leis da eletrodinâmica e da óptica serão válidas para todos os sistemas de coordenadas nos quais valem as equações da mecânica, como foi recentemente demonstrado para quantidades de primeira ordem. Elevaremos essa conjectura [...] à condição de um postulado. Iremos introduzir também um outro postulado, apenas aparentemente incompatível com esse, a saber: que a luz sempre se propaga no vazio com uma velocidade definida, que é independente do estado de movimento do corpo emissor. Esses dois postulados são suficientes para a obtenção de uma eletrodinâmica dos corpos em movimento simples e consistente, baseada na teoria de Maxwell para corpos em repouso.

A equação da onda se escreve:

$$\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2} = 0; \tag{5}$$

A solução geral é (d'Alembert):

$$\Psi(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct). \tag{6}$$

Transformações de Galileu:

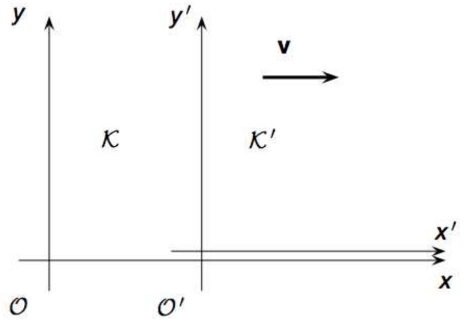
$$x = x' + vt', \quad t = t'; \quad x' = x - vt \quad t' = t. \tag{7}$$

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\Psi(x',t')}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi(x',t')}{\partial t'^2} + 2\frac{v}{c^2}\frac{\partial^2\Psi(x',t')}{\partial x'\partial t'} = 0, \tag{8}$$

$$\tilde{\Psi}(x',t') = \tilde{F}(x'-c't') + \tilde{G}(x'+c't'), \tag{9}$$

onde

$$c' = c - v. \tag{10}$$



$$x = a x' + b t' \tag{11}$$

$$t = e x' + f t', \tag{12}$$

a, b, e, e f podem depender de v; $y = y'$, e $z = z'$.

Versão 1: continuação

A seguir, aplicando os postulados da TRR, podemos calcular os coeficientes da transformação. Os resultados são:

$$a = f = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \tag{13}$$

$$b = \frac{v}{c^2\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{14}$$

e:

$$e = \frac{v}{c^2\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}. \tag{15}$$

Definindo:

$$\gamma(\beta) := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \beta := \frac{v}{c}. \tag{16}$$

Segue que:

$$x = \gamma\left(x' + vt'\right), \tag{17}$$

e

$$t = \gamma\left(\frac{\beta}{c}x' + t'\right). \tag{18}$$

Para obter a transformação inversa basta fazer as substituições: $\beta \to -\beta$, $x \leftrightarrow x'$, e $t \leftrightarrow t'$.

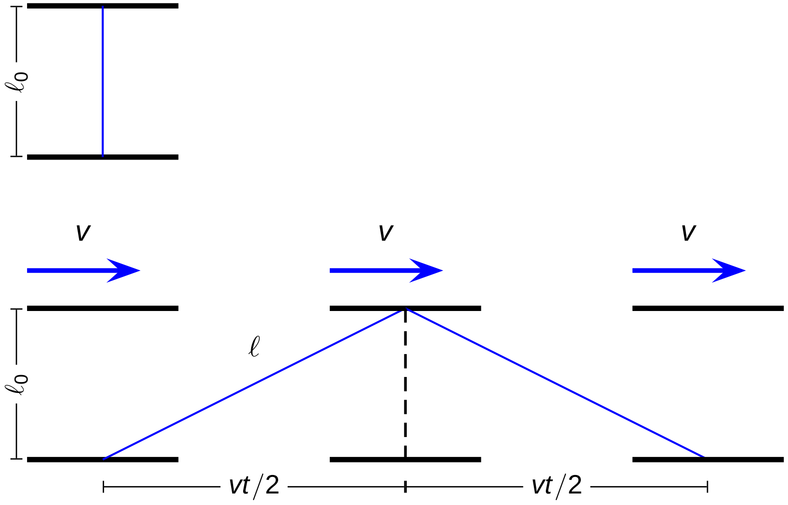


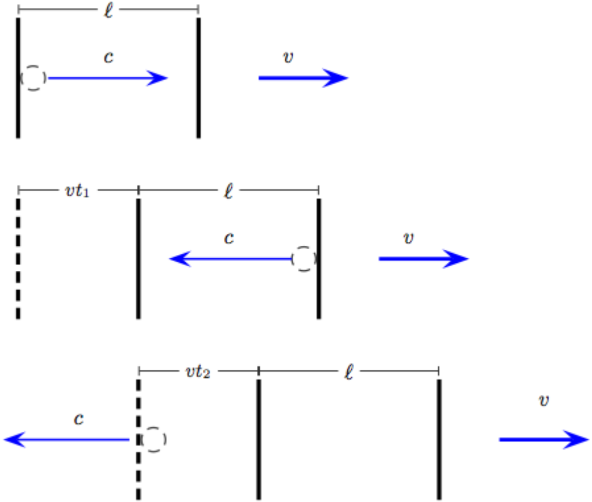
Figura: Relógio em repouso e em movimento com celeridade constante.

$$\tau = \gamma(\beta)\,\tau_0, \tag{19}$$

$$\gamma(\beta) := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \beta := \frac{v}{c}.$$

O intervalo de tempo marcado por um relógio em movimento (τ) é igual ou maior do que o intervalo de tempo marcado por um relógio em repouso (τ_0) .

Contração de Lorentz



$$\ell(\beta) = \frac{\ell_0}{\gamma(\beta)}. \tag{20}$$

A Eq. (20) descreve a contração de um corpo rígido na direção do movimento. Historicamente, ela foi proposta por Lorentz e por FitzGerald para explicar os resultados nulos de experiências projetadas para determinar a velocidade da Luz em relação à Terra. No texto, ela é deduzida como conseqüencia dos postulados da RR.

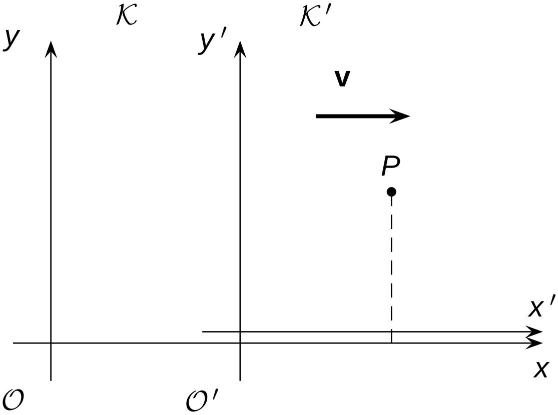


Figura: TL.

Considere agora um ponto P do espaço. Do ponto de vista do referencial $\mathcal{K}$ podemos escrever

$$x = vt + \underbrace{x'}_{\text{visto de } \mathcal{K}}, \tag{21}$$

onde x e x' são as abicissas do ponto P em relação aos seus referenciais respectivos. Mas, em razão da contração de Lorentz podemos escrever:

$$\underbrace{x'}_{\text{visto de } \mathcal{K}} = \frac{x'}{\gamma(\beta)}. \tag{22}$$

Segue que:

$$x' = \gamma(\beta)\,(x - \beta\, ct)\,. \tag{23}$$

Do ponto de vista do referencial $\mathcal{K}$, teremos:

$$x' = -vt' + \underbrace{x_{\text{visto de } \mathcal{K}'}}, \tag{24}$$

mas agora,

$$\underbrace{x}_{\text{visto de } \mathcal{K}'} = \frac{x}{\gamma(\beta)}. \tag{25}$$

Segue que:

$$x = \gamma(\beta)\left(x' + \beta\, ct'\right). \tag{26}$$

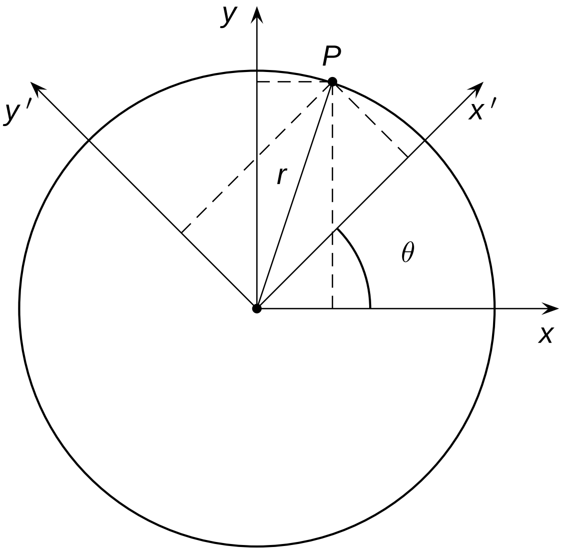
Com um pouco de algebrismo obtemos:

$$t' = \gamma(\beta)\left(t - \frac{\beta\, x}{c}\right). \tag{27}$$

e a transformação inversa:

$$t = \gamma(\beta)\left(t' + \frac{\beta\, x'}{c}\right), \tag{28}$$

Rotações no $\mathbb{R}^2$



$$
\begin{aligned}
x &= \cos\theta\, x' - \operatorname{sen}\theta\, y' && (29)\\
y &= \operatorname{sen}\theta\, x' + \cos\theta\, y'. && (30)
\end{aligned}
$$

Para obter a transformação inversa fazemos as substituções $\theta \to -\theta$, $x \leftrightarrow x'$, e $y \leftrightarrow y'$:

$$
\begin{aligned}
x' &= \cos\theta\, x + \operatorname{sen}\theta\, y && (31)\\
y' &= -\operatorname{sen}\theta\, x + \cos\theta\, y. && (32)
\end{aligned}
$$

O invariante associada com essa transformação é:

$$
x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2, \tag{33}
$$

que é o quadrado da distância da origem a um ponto P do $\mathbb{R}^2$.

A figura geométrica naturalmente associada com essa rotação e o seu invariante é o círculo de raio r, cuja equação em cartesianas é:

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{34}$$

A relação trignométrica fundamental:

$$\cos^2\,\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta = 1, \tag{35}$$

sugere a representação paramétrica:

$$x = r\,\cos\theta \tag{36}$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta. \tag{37}$$

Consideremos agora o invariante relativístico fundamental:

$$(\Delta s)^2 = -c^2\,(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2\,, \tag{38}$$

e as transformações:

$$\begin{aligned} ct' &= \cosh\theta\, ct - \operatorname{senh}\theta\, x && (39)\\ x' &= -\operatorname{senh}\theta\, ct + \cosh\theta\, x && (40)\\ y' &= y, && (41)\\ z' &= z, && (42) \end{aligned}$$

onde θ é determinado por:

$$\beta = \tanh\theta. \tag{43}$$

Lembrarando a relação fundamental:

$$\cosh^2\,\theta - \mathrm{senh}^2\,\theta = 1. \tag{44}$$

segue que:

$$\mathrm{senh}\,\theta = \gamma(\beta), \tag{45}$$

e

$$\cosh\,\theta = \beta\,\gamma(\beta). \tag{46}$$

Segue então que:

$$t' = \gamma(\beta)\left(t - \beta\,\frac{x}{c}\right) \tag{47}$$

$$x' = \gamma(\beta)\,(x - \beta\,ct)\,, \tag{48}$$

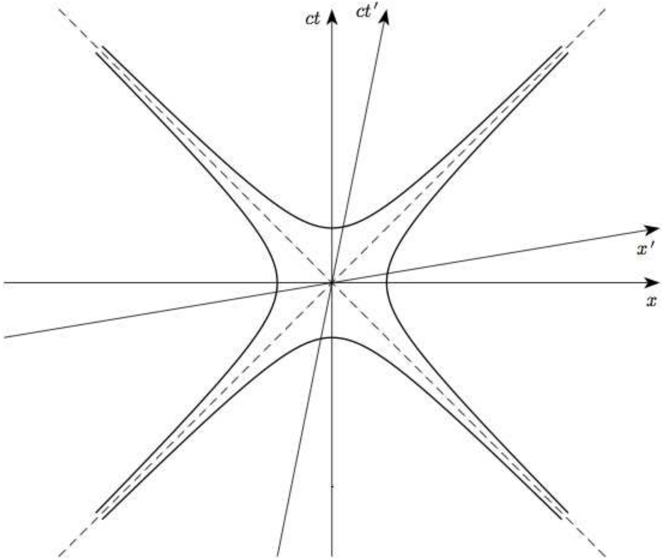
Essa forma das TL representam uma rotação de um ângulo imaginário $i\,\theta$ e a figura geométrica naturalmente associada com o invariante é uma hiperbóle cuja equação se escreve:

$$-(ct)^2 + x^2 = r^2, \tag{49}$$

A representação paramétrica natural dessa hipérbole é"

$$x = r\ \cosh\theta = \frac{r\,\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{50}$$

$$ct = r\,\mathrm{senh}\,\theta = \frac{r}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{51}$$


ct
ct'
x'
x

TL para a velocidade

$$u_x = \frac{u_x' + \beta\, c}{1 + \frac{v\, u_x'}{c^2}} \tag{52}$$

$$u_y = \frac{u_y'}{1 + \frac{v\, u_x'}{c^2}} \tag{53}$$

$$u_z = \frac{u_z'}{1 + \frac{v\, u_x'}{c^2}} \tag{54}$$

TL para a aceleração

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3\left(1 + \dfrac{V\,v'_x}{c^2}\right)^3},$$

$$a_y = \frac{a'_y}{\gamma^2\left(1 + \dfrac{V\,v'_x}{c^2}\right)^2} - \frac{(V\,v'_y/c^2)\,a'_x}{\gamma^3\left(1 + \dfrac{V\,v'_x}{c^2}\right)^3},$$

e uma expressão similar para a_z. Para obter as transformações inversas troque V por $-V$.

Fim da aula 2