2 Vetores

2.1 Definição. Seja V um conjunto qualquer e sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{M}$ duas operações,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : V \times V &\longrightarrow V \\ : (x,y) &\longmapsto x+y \ , \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathcal{M} : \mathbb{R} \times V &\longrightarrow V \\ : (\lambda, x) &\longmapsto \lambda x \ . \end{aligned} \tag{1}$$

Dizemos que o conjunto V munido dessas operações é um **espaço vetorial** sobre $\mathbb{R}$ se as seguintes propriedades são satisfeitas:

V1) para quaisquer x e y em V, $\quad x+y=y+x\,;$

V2) para quaisquer x, y e z em V, $\quad (x+y)+z=x+(y+z)\,;$

V3) existe em V um elemento $\mathbb{0}$ tal que, para todo x em V, $\quad x+\mathbb{0}=x\,;$

V4) para cada x em V existe em V um elemento $-x$ tal que $\quad x+(-x)=\mathbb{0}\,;$

V5) para qualquer $x \in V$, $\quad 1x=x\,;$

V6) para quaisquer α e β em $\mathbb{R}$ e x em V, $\quad \alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x\,;$

V7) para quaisquer α e β em $\mathbb{R}$ e x em V, $\quad (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x\,;$

V8) para qualquer α em $\mathbb{R}$ e quaisquer x e y em V, $\quad \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y\,.$

2.1.1 Os elementos do conjunto V são chamados **vetores**, a operação $\mathcal{A}$ é chamada **adição vetorial** e a operação $\mathcal{M}$ é chamada **multiplicação de número por vetor**. De acordo com a notação estabelecida, o resultado da adição dos vetores x e y pode ser representado por $\mathcal{A}(x, y)$ ou por $x + y$; essa última representação é a que usamos sempre, por motivos óbvios. Analogamente, a multiplicação de um número λ por um vetor x é representada pela mera justaposição de λ e x, e não por $\mathcal{M}(\lambda, x)$.

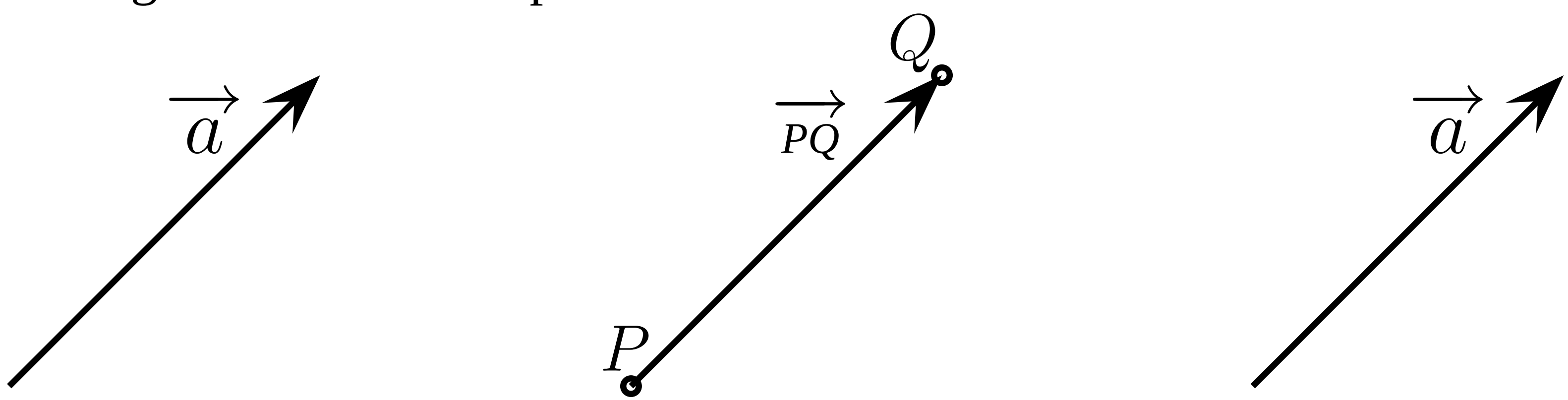
2.1.2 Usamos para a adição de vetores o mesmo símbolo $+$ usado para representar a adição de números, pois isso não causa confusões. Por exemplo, na propriedades *V1* $-$ *V4*, $+$ representa a adição vetorial, enquanto na propriedade *V7* temos $+$ representando adição de números no membro esquerdo da equação e adição de vetores no membro direito da equação. Por razão idêntica usamos a justaposição de fatores para representar tanto a multiplicação de número por vetor quanto a multiplicação de números.

2.1.3 Listemos algumas conseqüencias imediatas das propriedades $V1 - V8$ que definem um espaço vetorial. *(i)* Para qualquer vetor $x, \theta + x = x$ e $(-x) + x = \theta$. *(ii)* Existe um único vetor θ que satisfaz $V3$, e que chamamos **vetor nulo** do espaço vetorial; para cada vetor x, existe um único vetor $-x$ que satisfaz $V3$, e que chamamos **vetor oposto** a x. *(iii)* O produto do número zero por qualquer vetor é o vetor nulo, $0x = \theta$ ($x \in V$); o produto de qualquer número pelo vetor nulo é o vetor nulo, $\alpha\theta = \theta$ ($\alpha \in \mathbb{R}$); o produto de um numero por um vetor é o vetor nulo somente se o numero é zero ou o vetor é nulo; *(iv)* o produto do número -1 por qualquer vetor é o vetor oposto, $-1x = -x$ ($x \in V$).

2.1.4 Podemos definir vetores a partir de segmentos de reta orientados, como veremos no primeiro exemplo seguinte. Esse talvez seja o primeiro tipo de vetor com o qual fazemos contato em Física. No entanto, há exemplos de vários outros tipos de vetores mais abstratos que são necessários em Física e Matemática. Alguns serão descritos de um modo sucinto depois do primeiro exemplo.

2.2 Espaço vetorial das setas livres. Um segmento de reta orientado no espaço euclidiano $\mathcal{E}$ é definido por um par ordenado de pontos distintos; o primeiro é dito inicial e o segundo, final. Vamos chamar um tal segmento de **seta** e representá-lo por $\overrightarrow{PQ}$ quando P é o ponto inicial e Q, o final. O conjunto de todas as setas que têm um dado comprimento, uma dada direção e um dado sentido é chamado uma **seta livre**; cada uma das setas que formam uma seta livre é chamada um **representativo** da seta livre. **Comprimento**, **direção** e **sentido** de uma seta livre são, respectivamente, o comprimento, a direção e o sentido de qualquer dos representativos da seta livre; o comprimento de uma seta livre também é denominado seu **módulo**. Podemos pensar em uma seta livre como uma seta que pode ser deslocada para qualquer lugar do espaço desde que não sejam alterados o seu comprimento, direção e sentido. Representamos uma seta livre por uma letra encimada por uma setinha, *e.g.*, $\overrightarrow{a}$. Também podemos escolher um representativo qualquer da seta livre, digamos uma seta $\overrightarrow{PQ}$, e usá-la para representar a seta livre; nesse caso temos a liberdade de escrever $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{PQ}$. O módulo de uma seta livre é representado pelo seu símbolo entre barras verticais; assim o módulo de $\overrightarrow{a}$ é $|\overrightarrow{a}|$.

A figura a seguir mostra três representativos da seta livre $\overrightarrow{a}$.

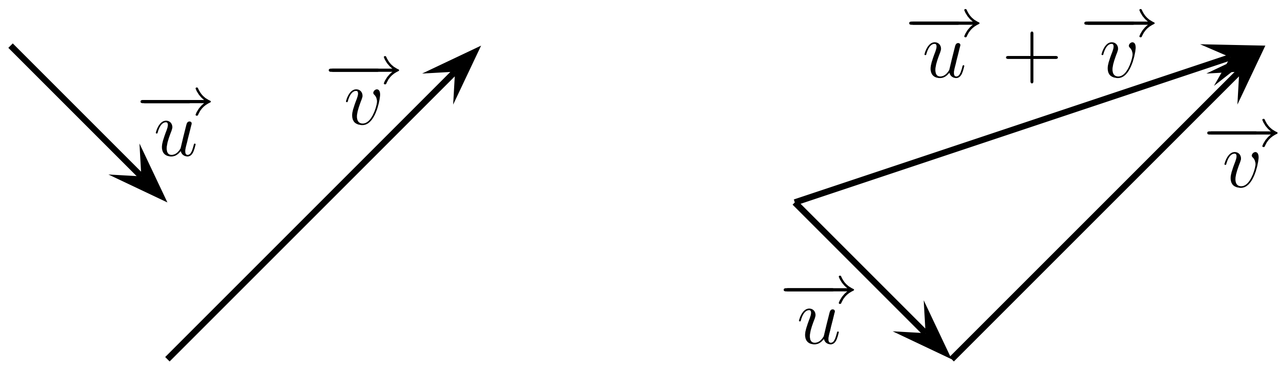


Seta nula, por definição, é a seta degenerada em que o ponto inicial coincide com o final; ela tem comprimento nulo, e direção e sentido indeterminados. **Seta livre nula** é o conjunto de todas as setas nulas. Vamos representá-la por $\overrightarrow{0}$ ou, quando conveniente, por um símbolo como $\overrightarrow{PP}$, no qual P é um ponto do espaço. O conjunto de todas as setas livres no espaço euclidiano será denotado por $\overrightarrow{\mathcal{S}}(\mathcal{E})$.

2.2.1 Dado um par ordenado de setas livres $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, vamos associar a esse par uma única seta livre pela chamada **regra do triângulo**. De acordo com essa regra, escolhemos um representativo qualquer da primeira seta livre $\overrightarrow{u}$ e consideramos o representativo da segunda seta livre $\overrightarrow{v}$ cujo ponto inicial coincide com o ponto final do representativo da primeira seta.

Há uma única seta, que chamamos resultante, que vai do ponto inicial do representativo da primeira seta livre até o ponto final do representativo da segunda seta livre. O conjunto de todas as setas com mesmo comprimento, mesma direção e o mesmo sentido da seta resultante é uma seta livre que chamamos **soma vetorial das setas livres** $\overrightarrow{u}$ **e** $\overrightarrow{v}$, e que representamos por $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. A regra do triângulo é pois uma função

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_s : \overrightarrow{\mathcal{S}}(\mathcal{E}) \times \overrightarrow{\mathcal{S}}(\mathcal{E}) &\longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{S}}(\mathcal{E}) \\ : (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) &\longmapsto \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \ . \end{aligned} \tag{2}$$



2.2.2 Seja um par ordenado $(\lambda, \overrightarrow{u})$, no qual λ é um número real e $\overrightarrow{u}$, uma seta livre. Se $\lambda = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, definimos $\lambda\overrightarrow{u}$ como sendo a seta livre nula, $\lambda\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$. Nos outros casos, por definição, $\lambda\overrightarrow{u}$ é uma seta livre com a mesma direção que $\overrightarrow{u}$, comprimento igual a $|\lambda|\,|\overrightarrow{u}|$, e sentido igual ou oposto ao de $\overrightarrow{u}$, conforme λ seja positivo ou negativo. Chamamos $\lambda\overrightarrow{u}$ **produto do número** λ **pela seta livre** $\overrightarrow{u}$. A regra de obtenção desse produto é a função

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_s : \mathbb{R} \times \overrightarrow{\mathcal{S}}(\mathcal{E}) &\longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{S}}(\mathcal{E}) \\ : (\lambda, \overrightarrow{u}) &\longmapsto \lambda\overrightarrow{u} \quad . \end{aligned} \tag{3}$$

2.2.3 O conjunto $\overrightarrow{\mathcal{S}}(\mathcal{E})$ das setas livres munido das operações (2) e (3) é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. De fato, $\overrightarrow{\mathcal{S}}(\mathcal{E})$ com essas operações satisfaz às propridades *V1-V8* listadas em 2.1. Por essa razão podemos chamar as setas livres de vetores. São vetores de caráter geométrico, são visualizáveis e suas operações são também visualizáveis.

2.2.4 Também definimos para setas livres as operações de produtos escalar e vetorial, duas operações que são úteis mas não são necessárias para definir as setas como vetores.

2.3 Seja $\mathbb{R}^n$ o conjunto das n-uplas ordenadas de números reais. Uma tal n-upla será representada por uma letra em negrito ou por uma letra sobrelinhada; por exemplo, usamos $\mathbf{a}$ ou $\overline{a}$ para representar o elemento $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Definimos soma de duas n-uplas $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ como sendo a n-upla $(u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$, *i.e.*,

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) := (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)\ . \tag{4}$$

Definimos produto de um número real λ por uma n-upla $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ como sendo a n-upla $(\lambda u_1, \lambda u_2, \ldots, \lambda u_n)$, *i.e.*,

$$\lambda(u_1, u_2, \ldots, u_n) := (\lambda u_1, \lambda u_2, \ldots, \lambda u_n)\ . \tag{5}$$

Em (4) temos uma operação de adição de n-uplas e em (5) uma operação de multiplicação de número real por n-upla. O conjunto $\mathbb{R}^n$ munido dessas operações satisfaz às propriedades *V1-V8* listadas em 2.1 e, portanto, forma um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. As n-uplas são vetores de caráter aritmético, muito práticos de se operar.

2.3.1 No espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ o vetor nulo é dado por $\mathbf{0} := (0, 0, \ldots, 0)$ e o oposto do vetor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é o vetor $-\mathbf{a} = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$.

2.3.2 O próprio conjunto $\mathbb{R}$ forma um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Nele, o vetor nulo é o número zero e o oposto do vetor $x \in \mathbb{R}$ é o seu negativo $-x$. Naturalmente, podemos identificar os espaços vetoriais $\mathbb{R}^1$ e $\mathbb{R}$.

2.4 Seja D um conjunto não vazio qualquer e $\mathbb{R}^D$, o conjunto de todas as funções de D em $\mathbb{R}$. Definimos soma de duas funções f e g de $\mathbb{R}^D$ como sendo a função $f+g$ de $\mathbb{R}^D$ dada por

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{para todo } x \text{ em } D\ . \tag{6}$$

Definimos produto de um número real λ por uma função f de $\mathbb{R}^D$ como sendo a função λf de $\mathbb{R}^D$ dada por

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x) \quad \text{para todo } x \text{ em } D\ . \tag{7}$$

Em (6) temos uma operação de adição de funções de $\mathbb{R}^D$ e em (7) uma operação de multiplicação de número real por função de $\mathbb{R}^D$. O conjunto $\mathbb{R}^D$ munido dessas operações satisfaz às propriedades *V1-V8* listadas em 2.1 e, portanto, forma um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Por isso, uma função de $\mathbb{R}^D$ também pode ser considerada como um vetor.

2.4.1 O vetor nulo em $\mathbb{R}^D$ é a chamada **função nula**; ela associa o número zero a todos os elementos do domínio D. Se ela for representada por $\mathcal{O}$, temos $\mathcal{O}(x) = 0$ para todo x em D. No espaço vetorial $\mathbb{R}^D$ o vetor oposto a f é a chamada função oposta de f, representada por $-f$ e definida por $(-f)(x) = -f(x)$ para qualquer x em D.

2.5 Base e dimensão de um espaço vetorial.

2.5.1 Seja um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$. Tendo em vista que a soma de dois vetores é um vetor e que para a adição vetorial valem as propriedades comutativa *V1* e associativa *V2*, podemos considerar expressões como $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$, na qual x_1, x_2,..., x_n são vetores de V e α_1, α_2,..., α_n, números reais. A expressão $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ é chamada **combinação linear** dos vetores x_1, x_2,..., x_n com **coeficientes** respectivos α_1, α_2,..., α_n. Dizemos que α_i é o coeficiente do vetor x_i na combinação linear em questão ($i = 1, 2, \ldots, n$). Uma combinação linear, por definição, envolve um número finito de vetores.

2.5.2 Se um vetor x de V é igual a uma combinação linear de elementos de V dizemos que a combinação linear **representa** o vetor e que o vetor é **representado** pela combinação linear. Suponhamos que no espaço vetorial V haja um conjunto $\mathcal{B}$ de vetores com a seguinte propriedade: cada vetor do espaço vetorial V pode ser representado por uma, e somente uma, combinação linear de vetores de $\mathcal{B}$. Nesse caso, dizemos que o conjunto $\mathcal{B}$ é uma **base** de V. Exemplificando, o conjunto $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$, constituído por três setas livres de comprimento unitário e ortogonais entre sí, é uma base do espaço vetorial $\overrightarrow{\mathcal{S}}(\mathcal{E})$.

2.5.3 Demonstra-se que todo espaço vetorial tem uma base. Além disso, se um espaço vetorial tem uma base com um número finito de vetores, qualquer outra base tem esse mesmo número de vetores, que é chamado **dimensão** do espaço vetorial. Assim, qualquer base do espaço $\overrightarrow{\mathcal{S}}(\mathcal{E})$ das setas livres tem 3 vetores e a dimensão de $\overrightarrow{\mathcal{S}}(\mathcal{E})$ é 3. Se um espaço vetorial tem base com número infinito de vetores, dizemos que é um espaço com **dimensão infinita**. O espaço vetorial $\mathbb{R}^D$ definido em **2.4** é um espaço vetorial de dimensão infinita se, *e.g.*, $D = \mathbb{R}$.

2.5.4 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com dimensão n e $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ uma base de V. É conveniente ordenar os vetores da base, que é então considerada como uma n-upla ordenada de vetores, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Se x é um vetor de V e $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$, os coeficientes α_1, α_2,..., α_n são chamados **componentes** do vetor x na base $\mathcal{B}$. Dizemos que α_i é a componente de x ao longo do elemento e_i da base $\mathcal{B}$, ou que α_i é a i-ésima componente do vetor na base $\mathcal{B}$. As componentes de x na base $\mathcal{B}$ formam uma n-upla ordenada de números reais, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Cada vetor tem uma única n-upla de componentes em uma dada base. **Expandir um vetor em uma base** é obter a combinação linear de elementos da base que representa o vetor.

2.5.5 No espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ os vetores são n-uplas de reais. Uma base desse espaço é dada por $\mathcal{B}_c = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$, sendo o vetor $\mathbf{u}_i$ a n-upla em que todos os elementos são nulos com excessão do i-esimo, que é igual a 1 ($i = 1, 2, \ldots, n$),

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, \ldots, 0)\ , \quad \mathbf{u}_2 = (0, 1, \ldots, 0)\ , \ldots\ \mathbf{u}_n = (0, 0, \ldots, 1)\ . \tag{8}$$

Chamamos $\mathcal{B}_c$ **base canônica** de $\mathbb{R}^n$. Naturalmente, a dimensão de $\mathbb{R}^n$ é n.

2.5.6 Seja um vetor qualquer de $\mathbb{R}^n$, digamos a n-upla $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Expandindo esse vetor na base canônica, obtemos $\mathbf{a} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_n\mathbf{u}_n$. Vemos que as componentes do vetor na base canônica são os próprios números que formam o vetor $\mathbf{a}$ de $\mathbb{R}^n$; isso acontece apenas na base canônica! Seja $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ uma outra base qualquer de $\mathbb{R}^n$; expandindo $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nessa base encontraremos uma expressão $\mathbf{a} = \xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \xi_n\mathbf{e}_n$ na qual as componentes ξ_1, ξ_2,..., ξ_n não serão, em geral, os números a_1, a_2,..., a_n. É instrutivo verificar isso no exemplo em que a base $\mathcal{B}$ é formada pelos vetores $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$,..., $\mathbf{e}_n = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_n$.

2.6 Funções em espaços vetoriais. Funções que estabelecem relações com espaços vetoriais costumam receber nomes especiais. Se V e W são espaços vetoriais, $f : V \to W$ é chamada **transformação** de V em W; se $W = V$, $f : V \to V$ é chamada **operador** sobre V. Um função como $S : V \to \mathbb{R}$, que associa um número a cada vetor de um espaço vetorial V, é chamada **funcional** sobre V.

2.6.1 Exemplo. Tanto o conjunto $\mathcal{C}(a,b)$ das funções contínuas no intervalo real (a,b), quanto o conjunto $\mathcal{C}^1(a,b)$ das funções com derivadas contínuas em (a,b), formam espaços vetoriais se definirmos as operações nesses espaços como em (6) e (7). Portanto, a função D que transforma funções em suas derivadas, definida em **1.7**, é uma **transformação** de vetores de $\mathcal{C}^1(a,b)$ em vetores de $\mathcal{C}(a,b)$; podemos chamá-la **transformaçao derivada**.

2.6.2 Exemplo. O conjunto $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ forma um espaço vetorial se definirmos suas operações como em (6) e (7). A função Δ_0 definida em **1.1.7** transforma vetores de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ em números e, por esse motivo, é um funcional sobre o espaço vetorial $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. Em **1.9.2** já havíamos comentado que Δ_0 é chamado um funcional de Dirac.

2.6.3 Exemplo. O conjunto $\mathcal{C}[a,b]$ das funções contínuas no intervalo $[a,b]$ forma um espaço vetorial se definirmos suas operações como em (6) e (7). A integração de funções desse espaço vetorial as transforma em números. Portanto, essa integração, definida em **1.8**, é um funcional sobre o espaço vetorial $\mathcal{C}[a,b]$.

2.6.4 Exemplo. Agora, vamos preparar um funcional usando vários ingredientes em diversos passos. No primeiro passo, tomamos uma função ϕ no espaço vetorial $\mathcal{C}^1(T_1, T_2)$ das funções com derivadas contínuas no intervalo real (T_1, T_2). Naturalmente, podemos derivar tal função e obter a função contínua ϕ'. No segundo passo, consideramos a função $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $L(q_1, q_2) = q_2^2 - q_1^2$ e, seguindo o mesmo método exposto em **1.6.2**, usamos as funções L, ϕ e ϕ' para formar a função composta $L_1 : (T_1, T_2) \to \mathbb{R}$, dada pela expressão $L_1(t) = L(\phi(t), \phi'(t)) = [\phi'(t)]^2 - [\phi(t)]^2$. Nada impede definirmos a função $\overline{L}_1 : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$, sendo $\overline{L}_1(t) = [\phi'(t)]^2 - [\phi(t)]^2$ e $[t_1, t_2]$ qualquer intervalo fechado contido em (T_1, T_2). A função $\overline{L}_1$ é contínua (como diferença de quadrados de funções contínuas) e, portanto, é um vetor em $\mathcal{C}[t_1, t_2]$. O terceiro passo consiste em aplicar nesse vetor o funcional integração $\int_{[t_1,t_2]}$ para obter a integral da função $\overline{L}_1$ no intervalo $[t_1, t_2]$,

$$\int_{[t_1,t_2]} \overline{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \overline{L}_1(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ [\phi'(t)]^2 - [\phi(t)]^2 \right\} dt \quad . \tag{9}$$

A integral (9) é um número que depende da função ϕ que escolhemos no espaço vetorial $\mathcal{C}^1(T_1, T_2)$. Portanto, a expressão (9) define um funcional $S_{[t_1,t_2]} : \mathcal{C}^1(T_1, T_2) \to \mathbb{R}$ dado por

$$S_{[t_1,t_2]}(\phi) := \int_{t_1}^{t_2} \{[\phi'(t)]^2 - [\phi(t)]^2\} \, dt \quad . \tag{10}$$

Esse é o funcional prometido.

2.7 Funções lineares. Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Uma transformação $f : V \to W$ é dita uma **transformação linear** se $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer x e y em V, e $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ para quaisquer λ em $\mathbb{R}$ e x em V. No caso em que $V = W$ dizemos que f é um **operador linear**. Um funcional $f : V \to \mathbb{R}$ sobre um espaço vetorial V é dito um **funcional linear** se $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer x e y em V, e $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ para quaisquer λ em $\mathbb{R}$ e x em V. A transformação derivada D em **2.6.1**, o funcional de Dirac Δ_0 em **2.6.2** e o funcional integral $\int_{[a,b]}$ em **2.6.3** são lineares; o funcional S em (10) não é linear.