Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física - UFRJ

Mecânica Quântica – Lista de Exercícios 2 – 2010/1

Questão única

Considere uma partícula que só pode ocupar duas posições, de coordenadas $x = 0$ e $x = a$ (veja a figura 1).

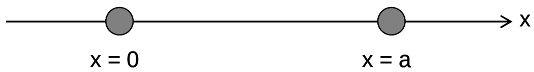

Figura 1. As duas posições da partícula.

O estado quântico correspondente à partícula na posição $x = 0$ é

$$|x_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

e na posição $x = a$,

$$|x_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

a) Escreva a matriz que representa, na base $|x_i\rangle$, o operador posição X.

b) Suponha que, nessa mesma base, o operador quantidade de movimento seja dado pela matriz

$$P = \frac{\pi\hbar}{2a}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Mostre que os autovalores de P são $p_0 = 0$ e $p_1 = \pi\hbar / a$.

c) Mostre que os autovetores $|p_i\rangle$ correspondentes às quantidades de movimento calculadas no item (b) são

$$|p_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |p_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

d) A figura 2 mostra os vetores $|x_i\rangle$ no espaço de estados do sistema. Represente graficamente os autoestados $|p_i\rangle$ nesse diagrama.

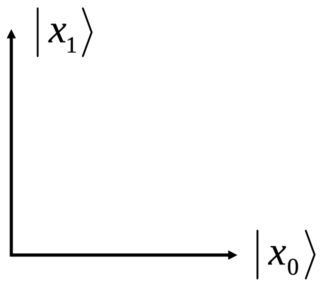

Figura 2. A base de autovetores da posição *X*.

e) Existem estados onde os valores de X e P estejam *simultaneamente* bem definidos? Ou seja, a posição e quantidade de movimento da partícula são observáveis compatíveis? Justifique sua resposta com base nos resultados dos itens (c) e (d).

f) Mostre que a função de onda de um estado de momentum *p*, $\psi_p(x) = \langle x | p \rangle$, é dada por $\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(ipx/\hbar)$. Faça o gráfico da função de onda de cada estado de momentum (note que esse gráfico só tem dois pontos, $x = 0$ e a). Faça também o gráfico da probabilidade da partícula ser encontrada na posição *x*.

g) Calcule o comutador $[X, P]$. O que o resultado mostra sobre a compatibilidade dos observáveis posição e quantidade de movimento?

h) Suponha que, na base $|x_i\rangle$, o operador energia (o hamiltoniano) é dado pela matriz

$$H = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} .$$

Mostre que as energias que a partícula pode ter são $E_0 = -\varepsilon$ e $E_1 = 2\varepsilon$.

i) Mostre que os autoestados $|E_i\rangle$ correspondentes às energias calculadas no item anterior são

$$|E_0\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |E_1\rangle = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ \sqrt{2/3} \end{pmatrix} .$$

j) Represente graficamente os autoestados $|E_i\rangle$ no diagrama da figura 2. Note que $\operatorname{sen} 35° \approx 1/\sqrt{3}$ e $\cos 35° \approx \sqrt{2/3}$.

k) Existem estados onde os valores da posição e energia estejam *simultaneamente* bem definidos? E os valores da quantidade de movimento e energia?

l) Faça o gráfico da função de onda $\psi_E(x) = \langle x|E\rangle$ de cada estado de energia. Para os mesmos estados, faça também o gráfico da probabilidade da partícula ser encontrada na posição x.

m) Suponha que a partícula tenha energia E_0. Qual é a amplitude de probabilidade dela ser encontrada em repouso ($p = p_0 = 0$)? E em movimento ($p = p_1 = \pi\hbar/a$)? Quais são as correspondentes probabilidades? Qual é o valor médio de P nesse estado?

n) Repita os cálculos acima para o estado de energia E_1 e compare os resultados.

o) Calcule o comutador $[H, P]$. A quantidade de movimento da partícula é conservada?

p) Suponha que no instante $t = 0$ a partícula esteja no estado $|\varphi(0)\rangle = |x_0\rangle$. Mostre que a evolução temporal desse estado é dada por

$$|\varphi(t)\rangle = \begin{pmatrix} 2/3 \\ \sqrt{2}/3 \end{pmatrix} \exp(i\varepsilon t/\hbar) + \begin{pmatrix} 1/3 \\ -\sqrt{2}/3 \end{pmatrix} \exp(-i2\varepsilon t/\hbar) \ .$$

q) Qual é a probabilidade da partícula no estado $|\varphi(t)\rangle$ ser encontrado na posição $x = 0$? E em $x = a$? Discuta esses resultados.

r) Calcule o valor médio da posição no estado $|\varphi(t)\rangle$. Comente o resultado.

s) Qual é a probabilidade da partícula no estado $|\varphi(t)\rangle$ ser encontrada em repouso? E em movimento? Qual é o valor médio do momentum $\langle P\rangle$?

t) Qual é a probabilidade da partícula no estado $|\varphi(t)\rangle$ ser encontrada com energia E_0? E com energia E_1? Qual é o valor médio da energia $\langle E\rangle$? Esses valores dependem do tempo? Discuta esse último aspecto à luz da conservação da energia.