

Mecânica Quântica

Carlos Eduardo Aguiar

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Instituto de Física - UFRJ

1º período letivo de 2009

Plano do curso

1. A física clássica em dificuldades.
2. Os princípios da mecânica quântica: sistemas de dois estados.
3. Sistemas de dois estados: aplicações.
4. Sistemas de N estados.
5. Partículas idênticas.
6. Simetrias.
7. Posição e momentum.
8. Equação de Schroedinger em 1 dimensão: aplicações.
9. A soma sobre caminhos.

C.E. Aguiar / Mecânica Quântica / 2009

2

Leituras recomendadas

- M. Le Bellac, *Quantum Physics*, Cambridge, 2006.
- H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica: Ótica, Relatividade, Física Quântica*, Blucher, 2002.
- R.P. Feynman, *Lições de Física de Feynman*, vol. III, Bookman, 2008.
- R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *QED - A estranha teoria da luz e da matéria*, Gradiva, 1988.
- T.F. Jordan, *Quantum Mechanics in Simple Matrix Form*, Dover, 2005.
- D.F. Styer, *The Strange World of Quantum Mechanics*, Cambridge, 2000.
- J.S. Townsend, *A Modern Approach to Quantum Mechanics*, USB, 2000.
- O. Pessoa Jr, *Conceitos de Física Quântica*, Livraria da Física, 2003.
- A. Zeilinger, *A Face Oculta da Natureza*, Globo, 2005.

C.E. Aguiar / Mecânica Quântica / 2009

3

Sobre o ensino de mecânica quântica:

- M. A. Moreira, I. M. Greca, *Uma revisão da literatura sobre estudos relativos ao ensino da mecânica quântica introdutória*, Investigações em Ensino de Ciências, 6 (2001) 29-56.
- I. M. Greca, M. A. Moreira, V.E. Herscovitz, *Uma proposta para o ensino de mecânica quântica*, Revista Brasileira de Ensino de Física, 33 (2001) 444.
- R. Müller, H. Wiesner, *Teaching quantum mechanics on an introductory level*, American Journal of Physics 70 (2002) 200; 70 (2002) 887.
- I. D. Johnston, K. Crawford, P. R. Fletcher, *Student difficulties in learning quantum mechanics*, International Journal of Science Education 20 (1998) 427-446.
- I. M. Greca, O. Freire Jr, *Does an Emphasis on the Concept of Quantum States Enhance Students' Understanding of Quantum Mechanics?*, Science & Education 12 (2003) 541-557.
- D. F. Styer, *Common Misconceptions Regarding Quantum Mechanics*, American Journal of Physics 64 (1996) 31-34.
- C. R. Rocha, V. E. Herscovitz, M. A. Moreira, *O Ensino de Mecânica Quântica sob a Perspectiva dos Referenciais Teóricos da Aprendizagem Significativa e dos Campos Conceituais*, Anais do XVIII SNEF (2009).
- L. D. Carr, S. B. McKagan, *Graduate Quantum Mechanics Reform*, arxiv.org: 0806.2628

C.E. Aguiar / Mecânica Quântica / 2009

5

A física clássica em dificuldades



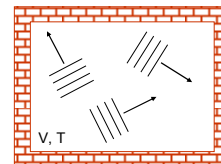
Charles Addams, New Yorker, 1940

C.E. Aguiar / Mecânica Quântica / 2009

12

Radiação térmica

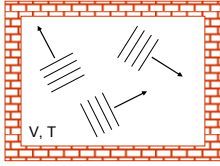
- Um recipiente onde foi feito vácuo não está inteiramente vazio: ele ainda contém *ondas eletromagnéticas*, emitidas e absorvidas pelas paredes.



C.E. Aguiar / Mecânica Quântica / 2009

16

Radiação em equilíbrio térmico



Lei de Stefan-Boltzmann

densidade de energia: $u = U/V = a T^4$

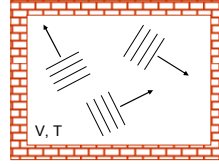
calor específico: $c_V = C_V/V = 4 a T^3$

Valor medido da constante de radiação:
 $a = (7,565 \pm 0,001) \times 10^{-16} \text{ J/m}^3/\text{K}^4$

O calor específico do "vácuo"

Segundo a física clássica:

onda estacionária \leftrightarrow oscilador harmônico: $E = \frac{1}{2} V \dot{X}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 X^2$



teorema da equipartição: $\frac{1}{2} kT$

energia média: $\bar{E} = kT$

energia total: $U = NkT$

capacidade térmica: $C_V = Nk$

número de ondas estacionárias: **$N = ?$**

O calor específico do vácuo

Em 1 dimensão:

$$L = n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

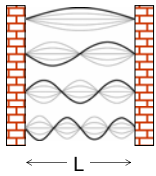


O número de ondas estacionárias na caixa é infinito ($N = \infty$).



$$C_V = NkT = \infty$$

Segundo a física clássica, o calor específico do vácuo é infinito!



O calor específico do vácuo

Em 3 dimensões a situação é ainda pior:

$$L_x = n_x \frac{\lambda_x}{2}, \quad n_x = 1, 2, 3, \dots$$

$$L_y = n_y \frac{\lambda_y}{2}, \quad n_y = 1, 2, 3, \dots$$

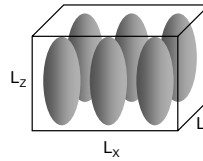
$$L_z = n_z \frac{\lambda_z}{2}, \quad n_z = 1, 2, 3, \dots$$



O número de ondas estacionárias na caixa tridimensional é infinito.



$$C_V = NkT = \infty$$



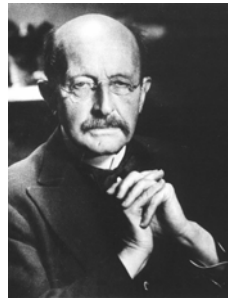
Em suma:

➡ Segundo a física clássica, o calor específico da radiação eletromagnética confinada em uma caixa é infinito.

➡ É impossível haver equilíbrio térmico entre as paredes da caixa e a radiação no seu interior.

➡ A física clássica não entende uma caixa vazia.

Quantização da energia



Max Planck: the reluctant revolutionary

Helge Kragh, Physics World (Dec. 2000)
<http://physicsworld.com/cws/article/print/373>

O quantum de Planck

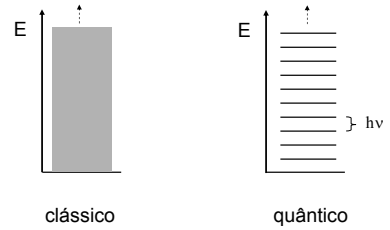
Um oscilador harmônico de frequência ν pode ter apenas as energias

$$E = n h \nu, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$h\nu =$ *quantum* de energia

$h =$ *constante de Planck* = $6,626069 \times 10^{-34}$ Js

O quantum de Planck



h-cortado

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054\,571\,6 \times 10^{-34} \text{ Js} \quad (\text{constante de Planck reduzida})$$

$$\omega = 2\pi \nu \quad \Rightarrow \quad \hbar\omega = h\nu$$

↑
frequência angular do oscilador

Energia média do oscilador de Planck

Oscilador em equilíbrio térmico com um corpo de temperatura T :

Distribuição de Boltzmann: $P(E) \propto \exp(-E/kT)$

Energia média:
$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n \exp(-E_n/kT)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-E_n/kT)}$$

Cálculo da energia média

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n \exp(-E_n/kT)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-E_n/kT)}$$

$$X = \exp(-h\nu/kT)$$

$$\bar{E} = h\nu \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n X^n}{\sum_{n=0}^{\infty} X^n} = h\nu \frac{X \sum_{n=0}^{\infty} n X^{n-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} X^n} = h\nu X \frac{d}{dX} \sum_{n=0}^{\infty} X^n = h\nu X \frac{1}{1-X} = h\nu \frac{X}{1-X}$$

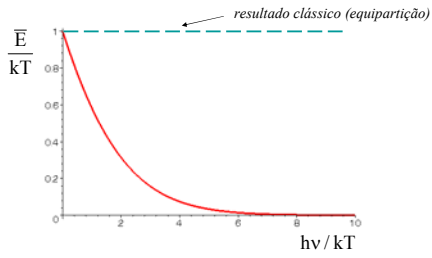
Energia média do oscilador de Planck

$$\bar{E} = \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1}$$

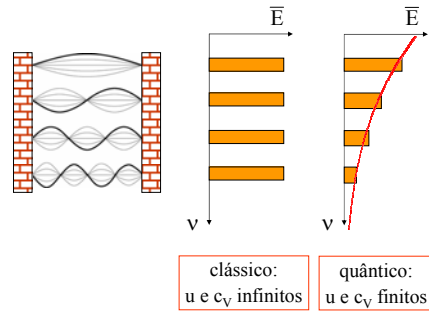
$$h\nu \ll kT \Rightarrow \bar{E} = kT \quad (\text{resultado clássico - teorema da equipartição})$$

$$h\nu \gg kT \Rightarrow \bar{E} = 0 \quad (\text{oscilador "congelado" em } E = 0)$$

Energia média do oscilador de Planck



O calor específico do vácuo



O calor específico do vácuo

$$U = \int_0^{\infty} \bar{E}(v, T) n(v) dv$$

energia média de uma onda com frequência v

número de ondas com frequência entre v e $v+dv$

$$\bar{E} = \frac{hv}{\exp(hv/kT) - 1}$$

$$n(v) = \frac{8\pi v^2}{c^3} V$$

O calor específico do vácuo

$$u = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{\infty} \frac{v^3}{\exp(hv/kT) - 1} dv$$

$$= \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^{\infty} \frac{s^3}{\exp(s) - 1} ds$$

$$= a T^4$$

$c_v = 4 a T^3$

$a = \frac{8\pi^5 k^4}{15(hc)^3}$
 $= (7,5657 \pm 0,0005) \times 10^{-16} \text{ J/m}^3/\text{K}^4$

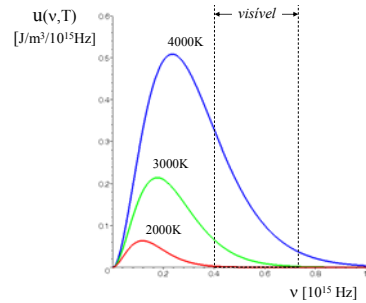
$a_{\text{exp}} = (7,565 \pm 0,001) \times 10^{-16} \text{ J/m}^3/\text{K}^4$

O espectro de Planck

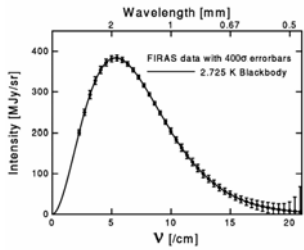
$$u(v, T) = \frac{\bar{E}(v, T) n(v)}{V}$$

$$u(v, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{v^3}{\exp(hv/kT) - 1}$$

O espectro de Planck

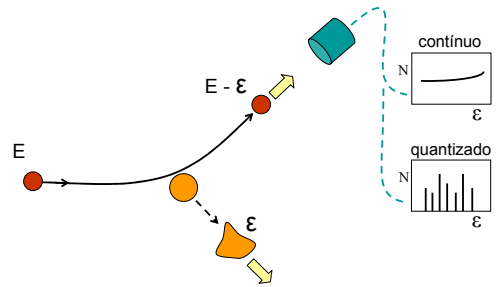


Radiação cósmica de fundo



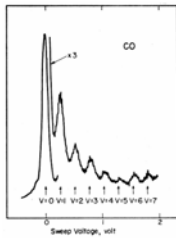
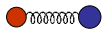
Dados do satélite Cobe

Evidências diretas da quantização da energia: espalhamento inelástico



Espalhamento inelástico pela molécula de CO

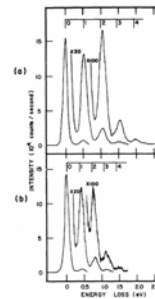
e + CO



G. J. Schulz, *Vibrational Excitation of N₂, CO, and H₂ by Electron Impact*, Phys. Rev. **135**, A988 (1964)

Espalhamento inelástico por moléculas de hidrogênio

p + H₂



$$\omega = \sqrt{k/m}$$

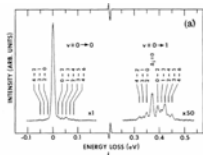
$$\frac{\omega(D_2)}{\omega(H_2)} = \sqrt{\frac{m(H)}{m(D)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$$

$$\frac{\Delta E(D_2)}{\Delta E(H_2)} \approx 0,8$$

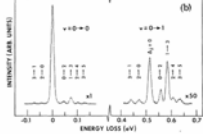
J.H. Moore and J.P. Doering, *Ion-Impact Excitation of Pure Vibrational Transitions in Diatomic Molecules*, Phys. Rev. Lett. **23**, 564 (1969)

Espalhamento inelástico por moléculas de hidrogênio

e + D₂



e + H₂

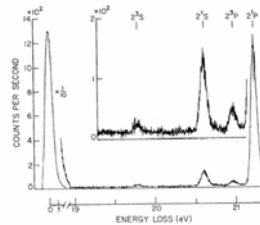


a energia de rotação também é quantizada

E.S. Chang, S-F. Wong, *Isotope Effects in Molecular Scattering by Electrons*, Phys. Rev. Lett. **38**, 1327 (1977)

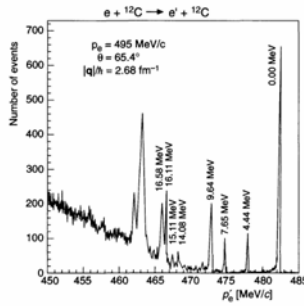
Espalhamento inelástico pelo átomo de He

e + He



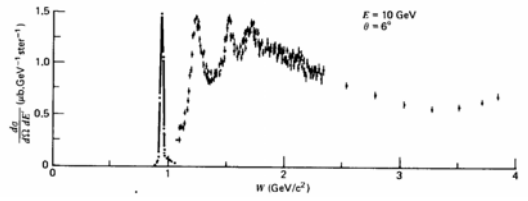
D.G. Truhlar, *Differential and Integral Cross Sections for Excitation of the 2¹P State of Helium by Electron Impact*, Phys. Rev. A **1**, 778 (1970)

Espalhamento inelástico pelo núcleo de ^{12}C



B. Povh et al., *Particles and Nuclei* (Springer, 2004) p.70

Espalhamento inelástico pelo próton



F. Halzen, A.D. Martin, *Quarks and Leptons* (Wiley, 1984) p.180

Em suma:

A energia de

- moléculas,
- átomos,
- núcleos atômicos,
- hádrons,
- ...

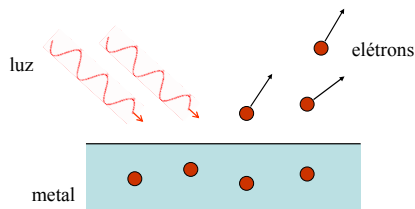
é *quantizada*.

Partículas de luz

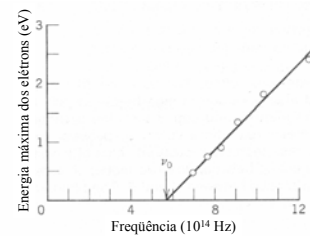


Albert Einstein

O efeito fotoelétrico



O efeito fotoelétrico

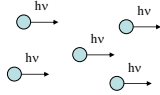


Fótons



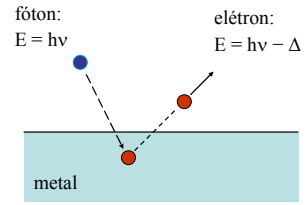
Planck:
oscilador quantizado

$$E = nh\nu$$



Einstein:
n = número de fótons
hv = energia de um fóton

O efeito fotoelétrico



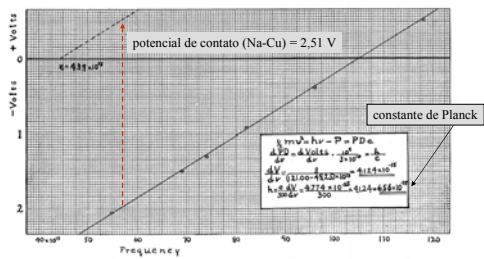
$$\Delta_{\min} \equiv W \leftrightarrow \text{função trabalho} \Rightarrow E_{\max} = hv - W$$

$$\nu_0 = W/h = \text{frequência de corte}$$

O efeito fotoelétrico

Sódio metálico

R.A. Millikan, *A Direct Photoelectric Determination of Planck's "h"*, Physical Review 7, 355-388 (1916)



Massa do fóton

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \left. \vphantom{E} \right\} E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$$

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

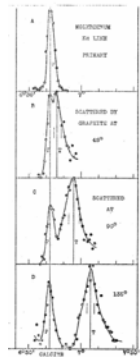
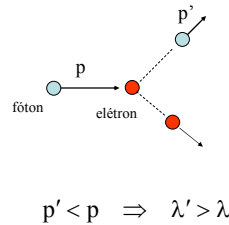
$$v = c \Rightarrow m = 0 \Rightarrow E = cp$$

Momentum do fóton

$$p = \frac{E}{c} = h \frac{\nu}{c} \Rightarrow p = \frac{h}{\lambda}$$

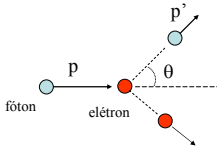
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow p = \hbar k$$

O efeito Compton



A. H. Compton, *The Spectra of Scattered X-Rays*, Physical Review 22, 409 (1923)

O efeito Compton



conservação da energia e momentum



$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

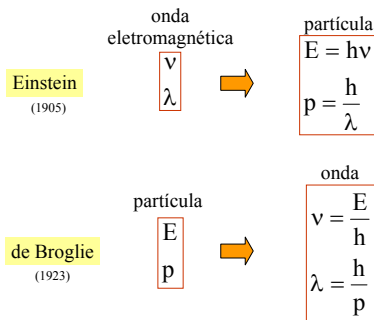
$h/m_e c$ = comprimento de onda Compton = 0,024 Å

Ondas de matéria



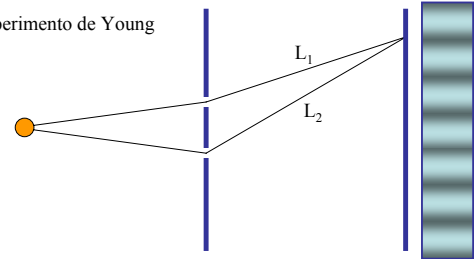
Louis de Broglie
(Louis-Victor-Pierre-Raymond,
7º duque de Broglie)

Relações de de Broglie



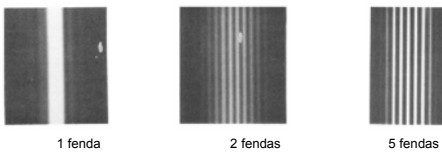
Interferência de partículas

Experimento de Young



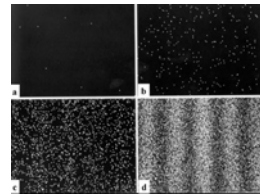
interferência construtiva: $L_1 - L_2 = n\lambda$

Experimento de Young: elétrons



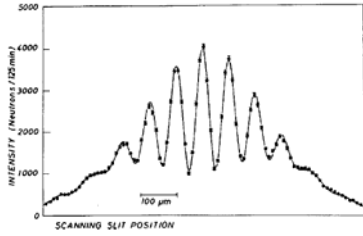
C. Jönsson, *Electron diffraction at multiple slits*, Am. J. Phys. **42**, 4 (1974)

Elétrons (um a um)



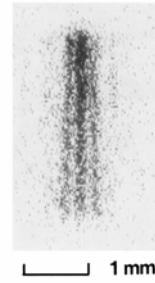
A Tonomura et al., *Demonstration of single-electron build-up of an interference pattern*, Am. J. Phys. **57**, 117 (1989)

Duas fendas: nêutrons



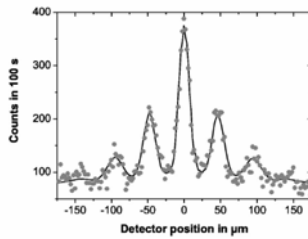
R. Gähler, A. Zeilinger, *Wave-optical experiments with very cold neutrons*, Am. J. Phys. 59, 316 (1991).

Duas fendas: átomos de neônio



F. Shimizu et al., *Double-slit interference with ultracold metastable neon atoms*, Phys. Rev. A 46, R17 (1992)

Duas fendas: moléculas de carbono 60



O. Nairz, M. Arndt, A. Zeilinger, *Quantum interference experiments with large molecules*, Am. J. Phys. 71, 319 (2003).

Em suma:

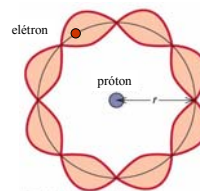
- Ondas eletromagnéticas podem ter comportamento corpuscular
- Partículas podem ter comportamento ondulatório

Dois “mistérios”

- Quantização da energia
- Dualidade onda-partícula

Esses dois “mistérios” estão relacionados.

A energia do átomo de hidrogênio



interferência construtiva
(onda estacionária)

$$2\pi r = n\lambda$$

$$2\pi r = n \frac{h}{p}$$

$$pr = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

Momento angular quantizado!
Bohr (1913)

$$\leftarrow \boxed{L = n\hbar}$$

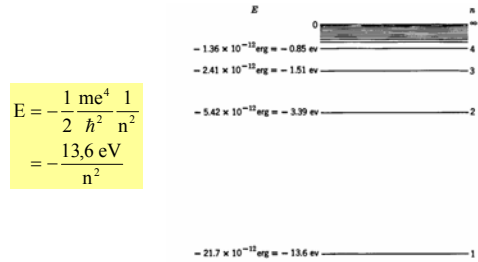
A energia do átomo de hidrogênio

mecânica clássica ($F = ma$): $m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{r^2} \Rightarrow mv^2 r = e^2$

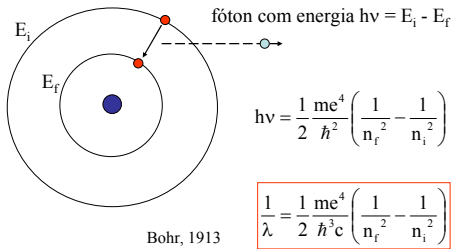
$$mv^2 r = e^2 \left. \begin{array}{l} \\ mvr = n\hbar \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v = \frac{e^2}{\hbar n} \\ r = \frac{\hbar^2}{me^2} n^2 \end{array} \right.$$

$$E = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{e^2}{r} \Rightarrow E = -\frac{1}{2} \frac{me^4}{\hbar^2 n^2}$$

A energia do átomo de hidrogênio



O espectro do hidrogênio



O espectro do hidrogênio

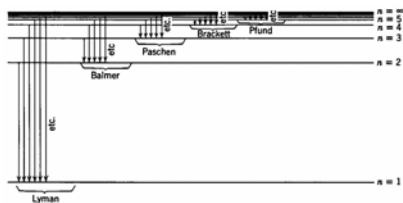
espectro visível



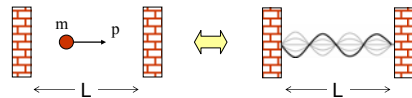
Balmer: $\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$ $R_H = 109,677 \text{ cm}^{-1}$
constante de Rydberg

Bohr: $R_H = \frac{1}{2} \frac{me^4}{\hbar^3 c}$ $m = \text{massa reduzida e-p}$

O espectro do hidrogênio



Partícula em uma caixa

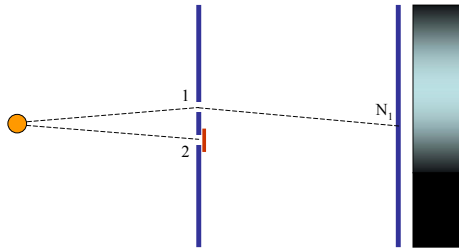


de Broglie: $p = \frac{h}{\lambda}$ $\text{onda estacionária: } L = n \frac{\lambda}{2}$

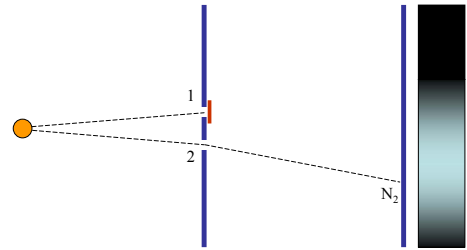
$$p_n = \frac{h}{2L} n$$

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{h^2}{8mL^2} n^2$$

Experimento de dupla fenda com partículas

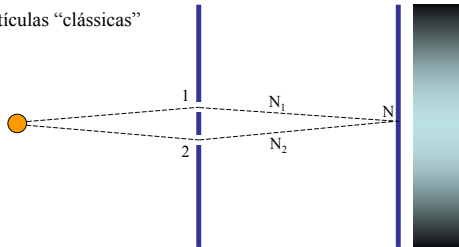


Experimento de dupla fenda com partículas



Experimento de dupla fenda com partículas

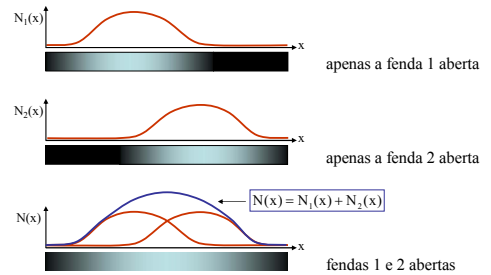
Partículas "clássicas"



Cada partícula passa *ou* pela fenda 1 *ou* pela fenda 2 $\Rightarrow N = N_1 + N_2$

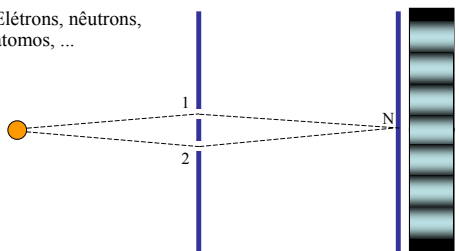
Partículas clássicas

Cada partícula passa *ou* pela fenda 1 *ou* pela fenda 2 $\Rightarrow N = N_1 + N_2$



Experimento de dupla fenda com partículas

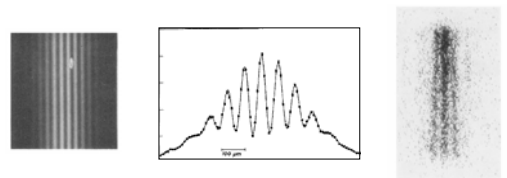
Elétrons, nêutrons, átomos, ...



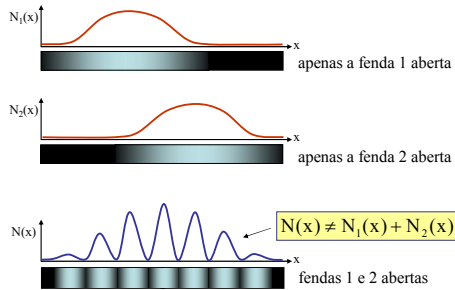
$N \neq N_1 + N_2$

Experimento de dupla fenda com partículas

Elétrons, nêutrons, átomos, ...



Elétrons, nêutrons, átomos, ...



Elétrons, nêutrons, átomos, ...

$$N(x) \neq N_1(x) + N_2(x)$$



A afirmativa

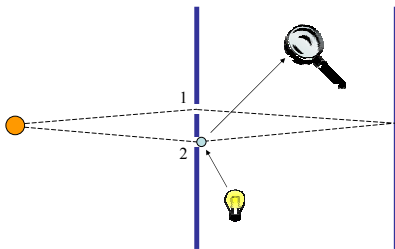
“cada partícula passa ou pela fenda 1 ou pela fenda 2”

é falsa.

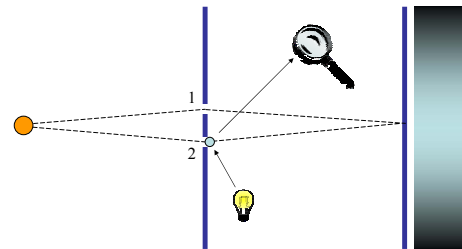
... a phenomenon which is impossible, *absolutely* impossible, to explain in any classical way, and which has in it the heart of quantum mechanics. In reality, it contains the *only* mystery.

R. P. Feynman, *The Feynman Lectures on Physics*, v.3, p.1-1

E se *observarmos* por onde passa a partícula?

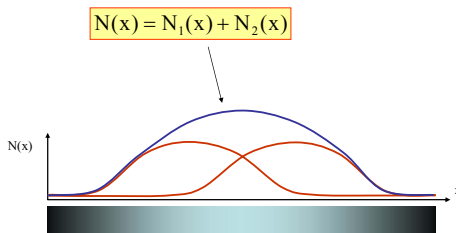


E se *observarmos* por onde passa a partícula?

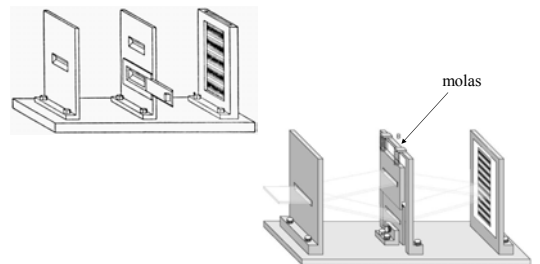


A interferência desaparece!
-- complementaridade --

E se *observarmos* por onde passa a partícula?

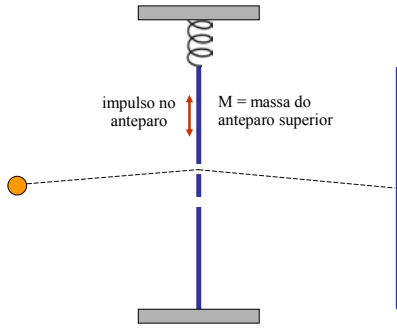


Experimento sobre a complementaridade

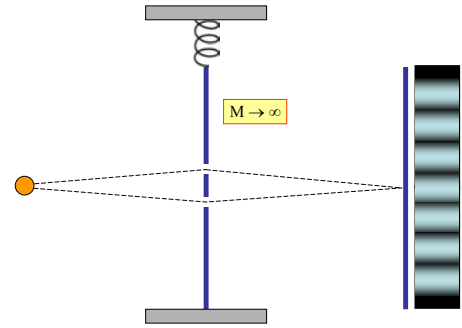


Desenhos: Niels Bohr

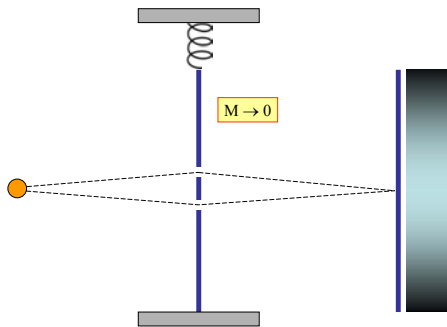
Experimento sobre a complementaridade



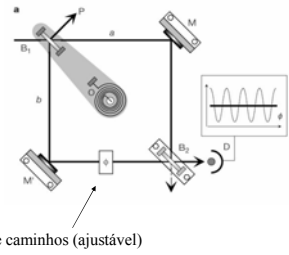
Experimento sobre a complementaridade



Experimento sobre a complementaridade

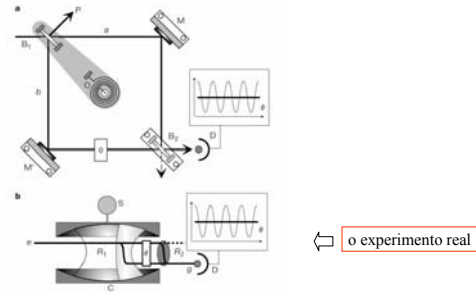


Experimento sobre a complementaridade



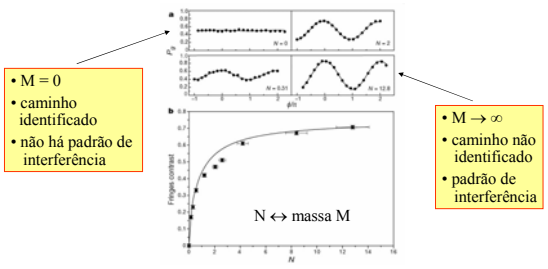
P. Bertet et al., A complementarity experiment with an interferometer at the quantum-classical boundary, Nature **411**, 166 (2001)

Experimento sobre a complementaridade



P. Bertet et al., A complementarity experiment with an interferometer at the quantum-classical boundary, Nature **411**, 166 (2001)

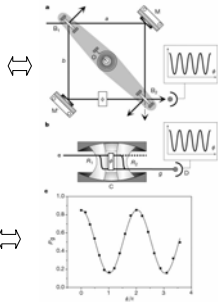
Experimento sobre a complementaridade



P. Bertet et al., A complementarity experiment with an interferometer at the quantum-classical boundary, Nature **411**, 166 (2001)

Experimento sobre a complementaridade

impossível determinar o caminho



interferência

P. Bertet et al., A complementarity experiment with an interferometer at the quantum-classical boundary, *Nature* **411**, 166 (2001)

Próximos passos (não estão em ppt)

2. Os princípios da mecânica quântica: sistemas de dois estados.
3. Sistemas de dois estados: aplicações.
4. Sistemas de N estados.
5. Partículas idênticas.
6. Simetrias.
7. Posição e momentum.
8. Equação de Schroedinger em 1 dimensão: aplicações.
9. A soma sobre caminhos.